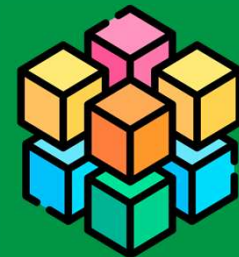
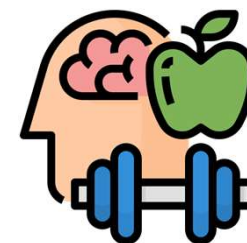


Soluciones sesión 5

Matemáticas Aplicadas II



Ejercicio 1



Beneficio de una empresa

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 20$$

1. Derivadas

$$B'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

$$B''(x) = -6x + 12$$

2. Crecimiento y decrecimiento

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0$$

Dividiendo entre -3 :

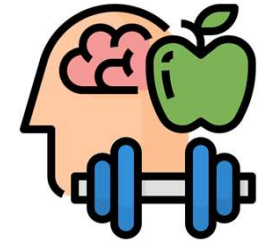
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$$
$$x = 1, x = 3$$

- Crece en $(1, 3)$
- Decrece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
- **Máximos y mínimos**

$$B''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

$$B''(3) = -6 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Ejercicio 1



3. Estudio de la curvatura:

$$B''(x) = -6x + 12$$

Calculamos **punto de inflexión**:

$$B''(x) = 0$$

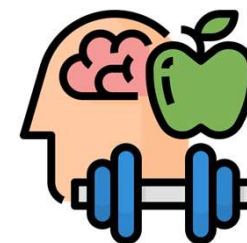
Resolvemos:

$$-6x + 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

Ejercicio 1



Estudio del signo de la segunda derivada, Analizamos el signo de $B''(x)$:

Si $x < 2$:

$$B''(x) = -6x + 12 > 0$$

⇒ función **convexa**

Si $x > 2$:

$$B''(x) = -6x + 12 < 0$$

⇒ función **cóncava**

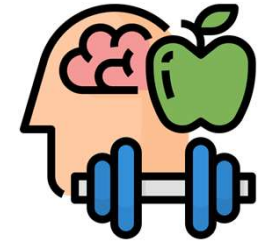
Por tanto, **la curvatura cambia en $x = 2$** .

Calculamos la ordenada:

$$B(2) = -8 + 24 - 18 + 20 = 18$$

$(2, 8)$

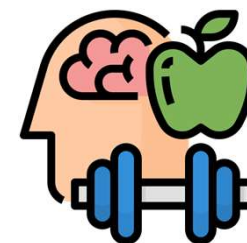
Ejercicio 1



4. Interpretación económica

- Hasta $x = 2$, el beneficio crece con **ritmo en aumento**: el beneficio marginal aumenta.
- A partir de $x = 2$, el beneficio sigue creciendo, pero con **ritmo en disminución**: el beneficio marginal empieza a disminuir.
- Este cambio de comportamiento marca el paso de una fase de expansión acelerada a una fase de saturación del mercado.
- El **máximo beneficio** se alcanza **después** del punto de inflexión, en $x = 3$, lo cual es coherente con el análisis económico.

Ejercicio 2



Demanda y sensibilidad al precio

$$D(p) = 200 - 40p + p^2$$

Derivadas

$$D'(p) = -40 + 2p$$

$$D''(p) = 2 > 0$$

Curvatura

Como $D''(p) > 0$ para todo p , la función es **convexa en todo su dominio**.

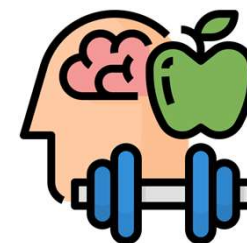
Punto de inflexión

No existe, porque $D''(p) \neq 0$.

Interpretación económica:

La sensibilidad de la demanda **aumenta** a medida que sube el precio: pequeñas subidas provocan caídas cada vez mayores de la demanda.

Ejercicio 3



Cotización de acciones

$$C(x) = x^3 - 45x^2 + 243x + 30000$$

Derivadas

$$C'(x) = 3x^2 - 90x + 243$$

$$C''(x) = 6x - 90$$

Máximos y mínimos

$$3x^2 - 90x + 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0$$

$$(x - 3)(x - 27) = 0$$

Máximo en $x = 3$

Mínimo en $x = 27$

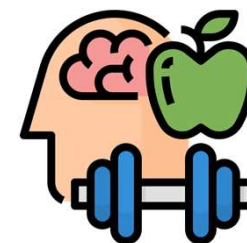
Curvatura y punto de inflexión

$$C''(x) = 0 \Rightarrow x = 15$$

Interpretación:

En $x = 15$ cambia la aceleración del precio: pasa de desacelerarse a acelerarse de nuevo.

Ejercicio 4



Rendimiento en un examen

$$R(t) = 300t(1 - t), 0 \leq t \leq 1$$

.Derivadas

$$R'(t) = 300(1 - 2t)$$

$$R''(t) = -600 < 0$$

.Máximo

$$R'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Máximo rendimiento en la mitad del examen.

Curvatura: Siempre **cóncava**, no hay punto de inflexión.

Interpretación:

El ritmo de mejora del rendimiento empieza a disminuir desde el principio del examen.

Ejercicio 5

Radón en un edificio

$$R(t) = 200 + ke^{-t}$$

a) Cálculo de k

$$R(0) = 300 \Rightarrow 200 + k = 300 \Rightarrow k = 100$$

$$R(t) = 200 + 100e^{-t}$$

b) Monotonía y tendencia

$$R'(t) = -100e^{-t} < 0$$

Función **decreciente** en todo el intervalo, no hay puntos críticos

Curvatura: $R''(t) = 100 \cdot e^{-t} > 0$, la función es convexa y no hay puntos de inflexión

Asíntota vertical: no hay, **Asíntota horizontal:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 200$$

c) Interpretación:

Las medidas correctoras reducen progresivamente el radón, estabilizándose en un nivel seguro.

