Sesión 3 – Crecimiento y Decrecimiento

Soluciones detalladas

Ejercicio 1 (modelo): Estudio de crecimiento y decrecimiento

Sea la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

1. Cálculo de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

2. Puntos críticos

Se resuelve:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Dividimos entre 3:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$(x-1)(x-3) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 3.$$

Estos son los **puntos críticos**.

3. Tabla de signos de $f'(x)$

Los intervalos quedan determinados por los puntos críticos:

$$(-\infty, 1), \quad (1, 3), \quad (3, +\infty).$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo:

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3).$$

x	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$

$$\Rightarrow \; f \text{ crece en } (-\infty,1), \; \text{decrece en } (1,3), \; \text{crece en } (3,+\infty).$$

4. Máximos y mínimos

Como f' pasa de $+$ a $-$ en $x=1$:

$$\Rightarrow \textbf{máximo local en } x=1.$$

Como f' pasa de $-$ a $+$ en $x=3$:

$$\Rightarrow \textbf{mínimo local en } x=3.$$

5. Valores de la función

$$f(1) = 1 - 6 + 9 = 4.$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27 = 0.$$

$$\boxed{\text{Máximo local: } (1,4) \qquad \text{Mínimo local: } (3,0)}$$

Ejercicio 2. Interpretación económica

Sea la función coste:

$$C(x) = 200 + 40x - 0{,}5x^2.$$

1. Derivada

$$C'(x) = 40 - x.$$

2. Crecimiento/decrecimiento

$$C'(x) > 0 \Rightarrow x < 40 \Rightarrow C(x) \text{ crece.}$$

$$C'(x) < 0 \Rightarrow x > 40 \Rightarrow C(x) \text{ decrece.}$$

3. Interpretación

- Para $x < 40$ unidades, el coste total **aumenta** conforme se produce más. - Para $x > 40$ unidades, el coste total **disminuye** ligeramente, indicando un tramo de eficiencia no realista pero matemáticamente posible.

$$C'(40) = 0 \Rightarrow \text{punto crítico.}$$

Ejercicio 3. Usuarios de una aplicación

$$U(t) = 350 + 50t - 4t^2.$$

1. Derivada

$$U'(t) = 50 - 8t.$$

2. Crecimiento/decrecimiento

$$U'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{50}{8} = 6{,}25.$$

$$U'(t) > 0 \Rightarrow t < 6{,}25 \quad \text{(la app gana usuarios),}$$

$$U'(t) < 0 \Rightarrow t > 6{,}25 \quad \text{(la app pierde usuarios).}$$

3. Interpretación

- La aplicación crece durante los primeros 6.25 meses. - Después comienza a perder usuarios: saturación del mercado, competencia, etc.

Ejercicio 4. Demanda y precio

$$q(p) = 100 - 12p + p^2.$$

1. Derivada

$$q'(p) = -12 + 2p.$$

2. Signo de la derivada

$$q'(p) = 0 \Rightarrow p = 6.$$

$$p < 6 \Rightarrow q'(p) < 0 \Rightarrow \text{la demanda disminuye cuando sube el precio.}$$

$$p > 6 \Rightarrow q'(p) > 0 \Rightarrow \text{comportamiento anómalo (poco realista).}$$

3. Interpretación

El punto $p = 6$ es crítico, pero en economía solo tiene sentido el tramo:

$$p < 6.$$

En esa zona:

$$q'(p) < 0 \Rightarrow \textbf{subir el precio reduce la demanda}.$$

Ejercicio 5. Mini–problema aplicado

Una región tiene evolución poblacional:

$$P(t) = 52 + 6t - 0{,}3t^2.$$

1. Derivada

$$P'(t) = 6 - 0{,}6t.$$

2. Interpretación del signo

$$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 10.$$

$$t < 10 \Rightarrow P'(t) > 0 \Rightarrow \text{la población activa aumenta a lo largo del tiempo.}$$

$$t > 10 \Rightarrow P'(t) < 0 \Rightarrow \text{descenso de la población activa.}$$

3. Conclusión social

- Hasta el año $t = 10$ (2035 si $t = 0$ es 2025), la región vive una etapa de crecimiento laboral. - Después, comienza una fase de decrecimiento, probablemente asociada al envejecimiento poblacional.