Crecimiento y Decrecimiento

Conceptos y Aplicaciones

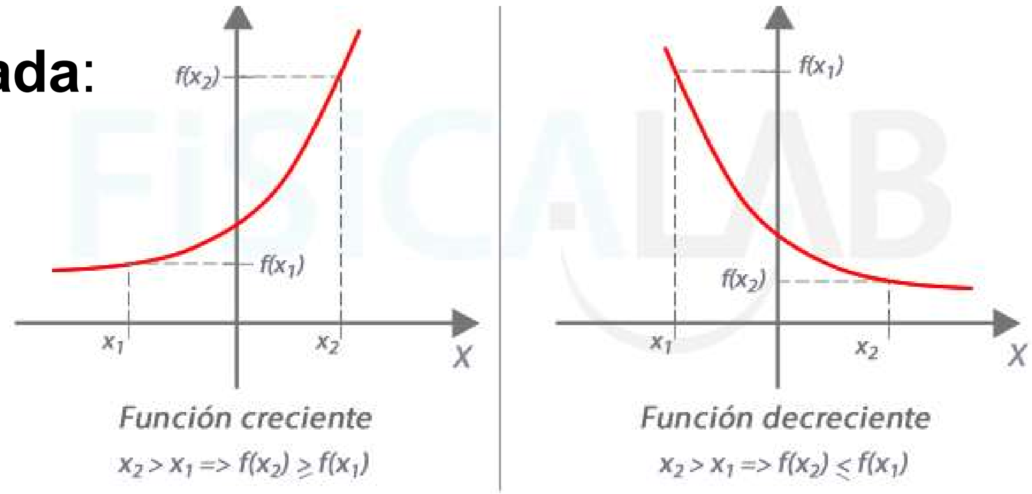
Matemáticas Aplicadas II

Idea intuitiva

Intuitivamente,

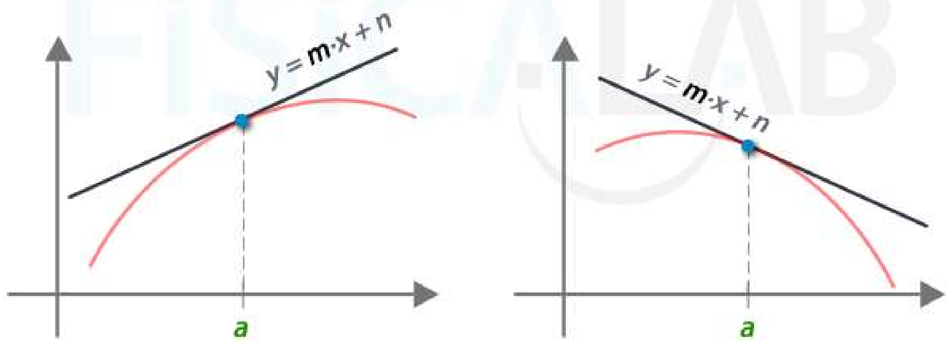
- una función crece si su gráfica *"sube"*, como una cuesta arriba
- Una función decrece si *"baja"*, como una cuesta abajo
- Según el **signo de la derivada**:

  - positiva → crece
  - negativa→ decrece



Interpretación geométrica

representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado



Idea fundamental 🎯

- **La derivada informa sobre cómo cambia una función en cada punto:**

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \Rightarrow \text{la función crece} \\ f'(x) < 0 & \Rightarrow \text{la función decrece} \\ f'(x) = 0 & \Rightarrow \text{posible máximo o mínimo} \end{cases}$$

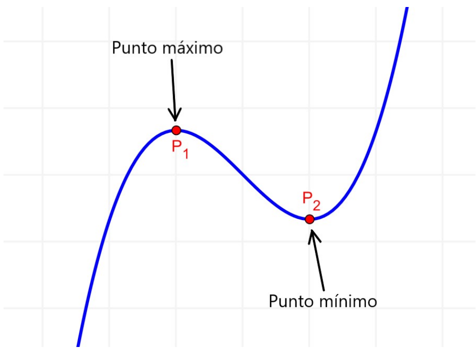
- Esta idea permite analizar el comportamiento de una función sin necesidad de dibujarla

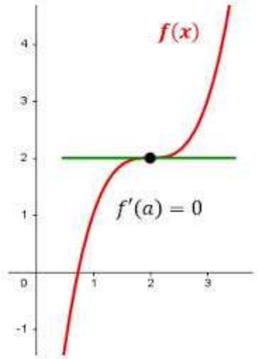
Puntos críticos

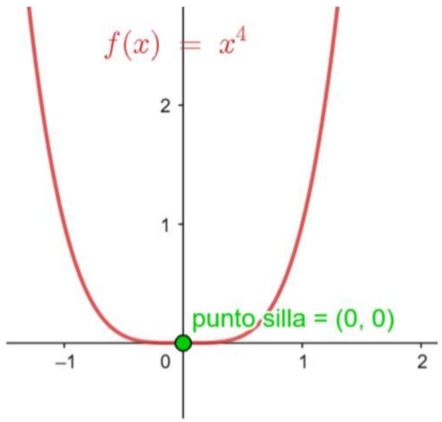
Un punto x = a es crítico si: $\boxed{f'(a) = 0 \quad \text{o bien} \quad f'(a) \text{ no existe.}}$

En estos puntos puede haber:

- máximo local
- mínimo local
- punto de inflexión
- Punto singular, punto "silla", casos particulares







Cómo se calcula

Criterio de la primera derivada

Para estudiar el crecimiento:

1. Se calcula f’(x).
2. Se iguala a cero para hallar los puntos críticos.
3. Se analiza el signo de f’(x) para averiguar los intervalos de crecimiento y decrecimiento
4. Se indican, si existen, los máximos y mínimos relativos o locales

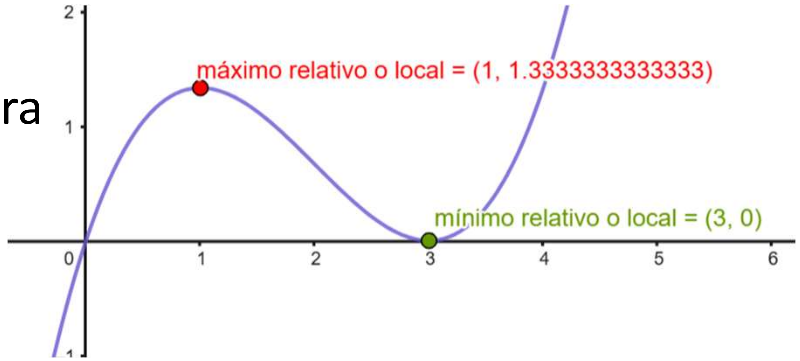
Ejemplo

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$$
$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Igualando a cero obtenemos los puntos críticos $x = 1$ y $x = 3$

Estudiamos los cambios de signo de la primera derivada:

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$



La función crece $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$

La función f tiene en $(1\,, 1.4)$ un máximo relativo y en $(3{,}0)$ un mínimo relativo

Aplicaciones

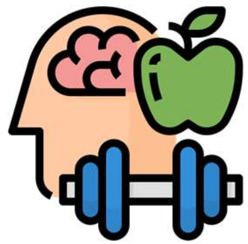
Si f representa:

- coste total $\rightarrow f'(x)$ indica si el coste aumenta o disminuye al producir más;
- número de usuarios $\rightarrow f'(t)$ indica si la plataforma gana o pierde usuarios en ese instante;
- demanda $\rightarrow f'(p)$ muestra cómo cambia la cantidad demandada cuando cambia el precio.

La interpretación siempre se asocia al signo de $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) > 0 \Rightarrow \text{la magnitud crece.} \quad f'(x) < 0 \Rightarrow \text{la magnitud decrece.}}$$

Ejercicio



EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitida a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función

$$C(t) = \begin{cases} 5 - \frac{t}{3} & , \quad 0 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4}t^2 - 4t + 18 & , \quad 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

Ejercicio

EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función

B (t) $= t^3 - 18t^2 + 81t - 3$ si $0 \leq t \leq 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios

c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?

Ejercicio

EJERCICIO 4. Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de " x " paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día $(0 \leq x \leq 70)$

a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos " x".

b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

Ejercicio 4

EJERCICIO 3. Análisis. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$$N(t)=\begin{cases} 28-(t-4)^2 & 0\le t<6 \\ (t-10)^2+8 & 6\le t\le 12 \end{cases}$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

Ejercicio

EJERCICIO 4. Análisis. Considérese la siguiente función:

$$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$$

donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a, b, c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2,8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0,16)$.