Sesión 3 – Crecimiento y Decrecimiento

Apuntes para el alumnado

1. Idea fundamental

La derivada informa sobre cómo cambia una función en cada punto:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \Rightarrow \text{la función crece} \\ f'(x) < 0 & \Rightarrow \text{la función decrece} \\ f'(x) = 0 & \Rightarrow \text{posible máximo o mínimo} \end{cases}$$

Esta idea permite analizar el comportamiento de una función sin necesidad de dibujarla.

2. Puntos críticos

Un punto $x = a$ es crítico si:

$$f'(a) = 0 \quad \text{o bien} \quad f'(a) \text{ no existe.}$$

En estos puntos puede haber:

- máximo local,
- mínimo local,
- punto de inflexión,
- o simplemente un cambio de comportamiento.

3. Tabla de signos de la derivada

Para estudiar el crecimiento:

1. Se calcula $f'(x)$.
2. Se iguala a cero para hallar los puntos críticos.
3. Se analiza el signo de $f'(x)$ en cada intervalo.

Ejemplo ilustrativo:

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

$$\Rightarrow \ f \text{ crece, decrece y vuelve a crecer.}$$

4. Visualización: Crecimiento y decrecimiento

A continuación se muestra una función que ilustra los distintos tramos.

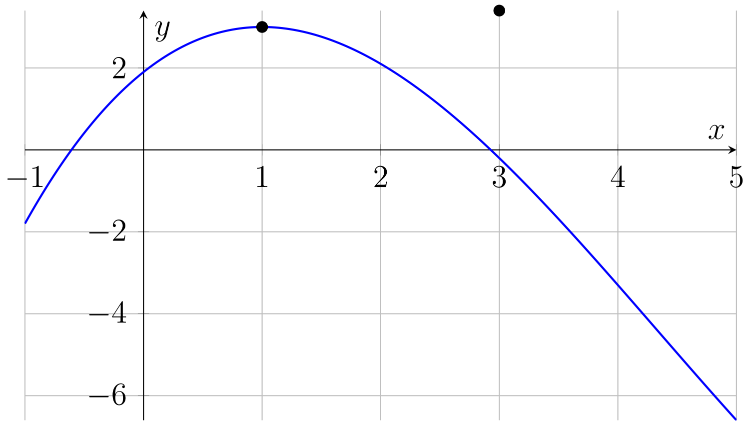

Figura 1: Ejemplo de tramos crecientes y decrecientes

El primer punto marcando (1,3) podría ser un máximo, el segundo (3,3.4) un mínimo (ejemplo ilustrativo).

5. Interpretación económica y social

Si f representa:

- coste total $\rightarrow$ $f'(x)$ indica si el coste aumenta o disminuye al producir más;
- número de usuarios $\rightarrow$ $f'(t)$ indica si la plataforma gana o pierde usuarios en ese instante;
- demanda $\rightarrow$ $f'(p)$ muestra cómo cambia la cantidad demandada cuando cambia el precio.

La interpretación siempre se asocia al signo de $f'(x)$.

$$\boxed{f'(x) > 0 \Rightarrow \text{la magnitud crece.} \quad f'(x) < 0 \Rightarrow \text{la magnitud decrece.}}$$

6. Resumen operativo

Para estudiar crecimiento/decrecimiento:

$$\boxed{\text{1. Calcular } f'(x).}$$

$$\boxed{\text{2. Hallar los puntos críticos: } f'(x) = 0.}$$

$$\boxed{\text{3. Analizar el signo de } f'(x) \text{ en cada intervalo.}}$$

$$\boxed{\text{4. Conclusión final: tramos crecientes y decrecientes.}}$$