

Sesión 2 – Recta Tangente

Soluciones detalladas

Ejercicio 1. Coste marginal

Dada la función de coste total:

$$C(x) = 500 + 20x - 0,2x^2 + 0,005x^3,$$

vamos a calcular su recta tangente en $x = 10$.

1. Cálculo de $C(10)$

$$C(10) = 500 + 20(10) - 0,2(10)^2 + 0,005(10)^3.$$

$$C(10) = 500 + 200 - 20 + 5 = 685.$$

2. Cálculo de la derivada

$$C'(x) = 20 - 0,4x + 0,015x^2.$$

$$C'(10) = 20 - 0,4(10) + 0,015(100).$$

$$C'(10) = 20 - 4 + 1,5 = 17,5.$$

3. Recta tangente

$$y = C(10) + C'(10)(x - 10)$$

$$\boxed{y = 685 + 17,5(x - 10)}$$

4. Interpretación

$C'(10) = 17,5$ significa:

- El **coste marginal** en 10 unidades es 17.5 € por unidad. - Producir una unidad adicional cuesta aproximadamente 17.5 €.

5. Estimación del coste de 11 unidades

$$C(11) \approx 685 + 17,5(11 - 10) = 685 + 17,5 = 702,5.$$

Ejercicio 2. Usuarios de una plataforma

$$U(t) = 40 + 12t - t^2.$$

1. Cálculo de $U(3)$

$$U(3) = 40 + 12(3) - 9 = 40 + 36 - 9 = 67.$$

2. Derivada

$$U'(t) = 12 - 2t.$$

$$U'(3) = 12 - 6 = 6.$$

3. Recta tangente

$$y = U(3) + U'(3)(t - 3)$$

$$\boxed{y = 67 + 6(t - 3)}$$

4. Interpretación

$U'(3) = 6$ significa:

- La plataforma gana **6 mil usuarios por mes** en el mes 3. - El crecimiento es positivo.

5. Estimación de $U(3,2)$

$$U(3,2) \approx 67 + 6(3,2 - 3) = 67 + 1,2 = 68,2.$$

Ejercicio 3. Demanda y precio

$$q(p) = 120 - 15 \ln(p + 1).$$

1. Cálculo de $q(4)$

$$q(4) = 120 - 15 \ln(5).$$

2. Derivada

$$q'(p) = -15 \cdot \frac{1}{p+1}.$$

$$q'(4) = -15 \cdot \frac{1}{5} = -3.$$

3. Recta tangente

$$y = q(4) + q'(4)(p - 4)$$

$$y = (120 - 15 \ln(5)) - 3(p - 4)$$

4. Interpretación

Como $q'(4) = -3$:

- Al aumentar ligeramente el precio, la demanda **disminuye** en aproximadamente 3 unidades por cada euro. - La sensibilidad es negativa, como es habitual en demanda.

Ejercicio 4. Población activa

$$P(t) = 55 + 8\sqrt{t}.$$

1. Cálculo de $P(4)$

$$P(4) = 55 + 8\sqrt{4} = 55 + 16 = 71 \text{ \%}.$$

2. Derivada

$$P'(t) = 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{4}{\sqrt{t}}.$$

$$P'(4) = \frac{4}{2} = 2.$$

3. Recta tangente

$$y = 71 + 2(t - 4).$$

$$y = 71 + 2(t - 4)$$

4. Interpretación

$P'(4) = 2$ significa:

- La población activa crece 2 puntos porcentuales por año en 2024. - Hay un **crecimiento sostenido**.

5. Estimación de $P(4,3)$

$$P(4,3) \approx 71 + 2(0,3) = 71,6 \, \%.$$

Ejercicio 5. Mini-problema aplicado: PIB

$$G(t) = 22 + 3t - 0,1t^2.$$

1. Cálculo de $G(2)$

$$G(2) = 22 + 6 - 0,4 = 27,6.$$

2. Derivada

$$G'(t) = 3 - 0,2t.$$

$$G'(2) = 3 - 0,4 = 2,6.$$

3. Recta tangente

$$y = 27,6 + 2,6(t - 2).$$

$$\boxed{y = 27,6 + 2,6(t - 2)}$$

4. Interpretación

$G'(2) = 2,6$ significa:

- El PIB per cápita aumenta 2.6 mil euros por año en 2027. - Hay crecimiento económico.

5. Predicción de $G(2,4)$

$$G(2,4) \approx 27,6 + 2,6(0,4) = 27,6 + 1,04 = 28,64.$$