Recta Tangente

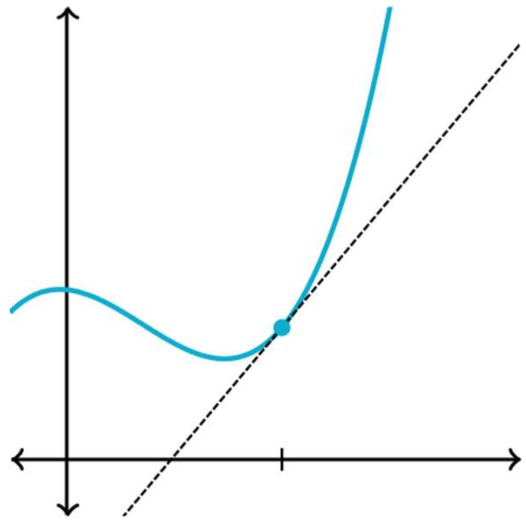
Conceptos y Aplicaciones

Matemáticas Aplicadas II

Idea intuitiva

Recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto

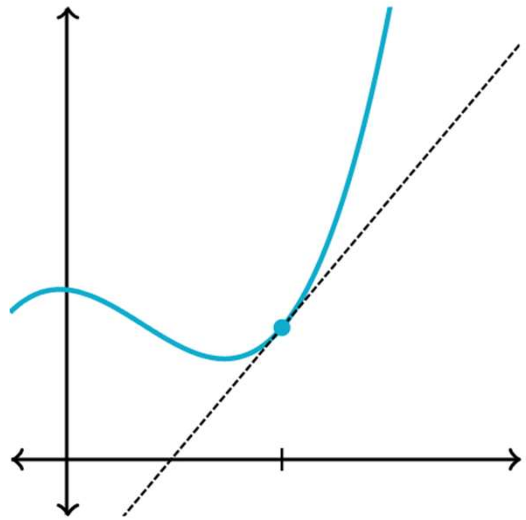
Es una línea recta que *"roza"* la curva suavemente en ese punto, teniendo la misma dirección o "inclinación" que la curva, justo en ese instante.



Conceptos básicos

- **Punto en común:** Toca la curva en un solo punto (el punto de tangencia).
- **Misma pendiente**: Su pendiente (inclinación) es la misma que la pendiente de la curva en ese punto.
- Esta pendiente se calcula con la **derivada de la función en ese punto $m = f'(a)$**
- **Su ecuación es:**

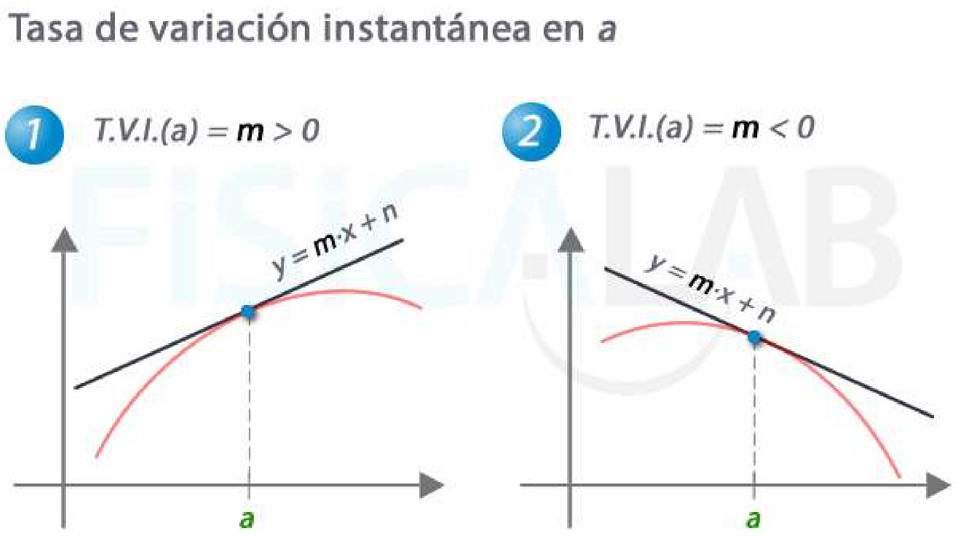
$$\boxed{y = f'(a) + f(a)(x - a)}$$



Interpretación geométrica

Misma pendiente que la función.

- Se pega a la curva localmente.
- Aproxima la función cerca del punto
- Representa la tasa instantánea de cambio en ese punto
- Nos dice en cada momento el crecimiento de la función



Interpretación Económica y social

- Si f representa el coste total → f'(a) es el **coste marginal**

- Si f representa el número de usuarios → f'(a) es el **ritmo instantáneo de crecimiento**

- Si f representa la demanda → f'(a) es la **sensibilidad de la demanda.**

Interpretación Económica y social

La recta tangente permite:

- ✓ hacer predicciones cercanas a un punto
- ✓ estimar variaciones pequeñas de forma lineal.

Cómo calcularla

Usamos la fórmula:

$$\boxed{y = f'(a) + f(a)(x - a)}$$

Para ello se necesitan:

1. El punto $(a, f(a))$
2. La pendiente $m = f'(a)$

Si $f'(a)$ no existe, no hay recta tangente.

Ejemplo

Considera la función: $f(x) = x^2$, calcula su recta tangente en el punto de abscisa 1

$$f(1) = 1$$
$$f'(x) = 2x$$
$$f'(1) = 2$$

Aplicando la fórmula:

$$y = 1 + 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 1$$

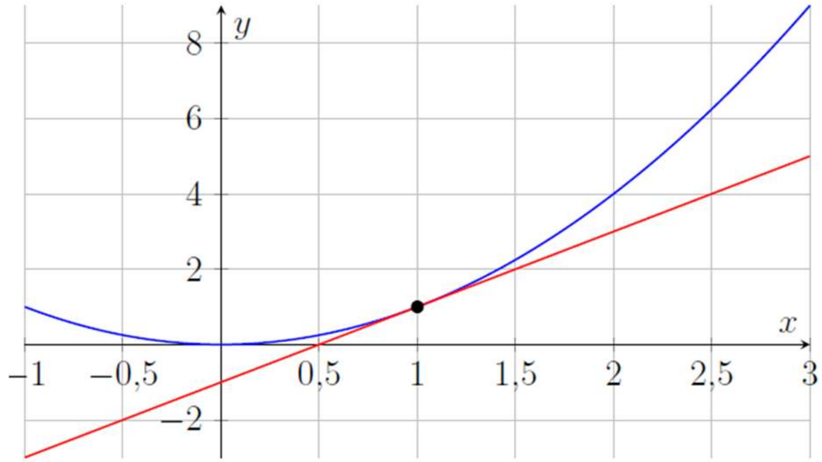


Figura 2: Recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 1$

Ejercicio 1

Ejercicio 1. Coste marginal

El coste total de producir x unidades es:

$$C(x) = 500 + 20x - 0{,}2x^2 + 0{,}005x^3.$$

1. Halla la recta tangente en $x = 10$.
2. Interpreta económicamente $C'(10)$.
3. Usa la recta tangente para estimar el coste de producir 11 unidades.

Ejercicio 2

Ejercicio 2. Usuarios de una plataforma

$$U(t) = 40 + 12t - t^2, \quad t \text{ en meses.}$$

1. Calcula la recta tangente en $t = 3$.
2. Interpreta $U'(3)$.
3. Estima con la recta tangente el valor de $U(3{,}2)$.

Ejercicio 3

Ejercicio 3. Demanda y precio

$$q(p) = 120 - 15\ln(p+1).$$

1. Obtén la recta tangente en $p = 4$.
2. Explica qué significa la pendiente: ¿aumenta o disminuye la demanda si sube el precio?

Ejercicio 4

Ejercicio 4. Población activa

$$P(t) = 55 + 8\sqrt{t},$$

donde t son años desde 2020.

1. Halla la recta tangente en $t = 4$.
2. Interpreta $P'(4)$.
3. Estima $P(4{,}3)$ usando la recta tangente.

Ejercicio 5

Ejercicio 5. Mini–problema aplicado

$$G(t) = 22 + 3t - 0{,}1t^2,$$

PIB per cápita (en miles) desde 2025.

1. Obtén la recta tangente en $t = 2$.
2. Interpreta el signo de $G'(2)$.
3. Predice $G(2{,}4)$ usando el modelo lineal local.