

Sesión 2 – Recta Tangente

Apuntes y ejercicios aplicados

1. Concepto básico

La recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es la recta que:

- toca a la curva en ese punto,
- y tiene la misma **pendiente** que la función en dicho punto.

Su ecuación es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Es decir:

- $f(a)$: valor de la función en el punto,
- $f'(a)$: pendiente instantánea de la curva,
- $(x - a)$: desplazamiento horizontal.

1.1. Visualización geométrica

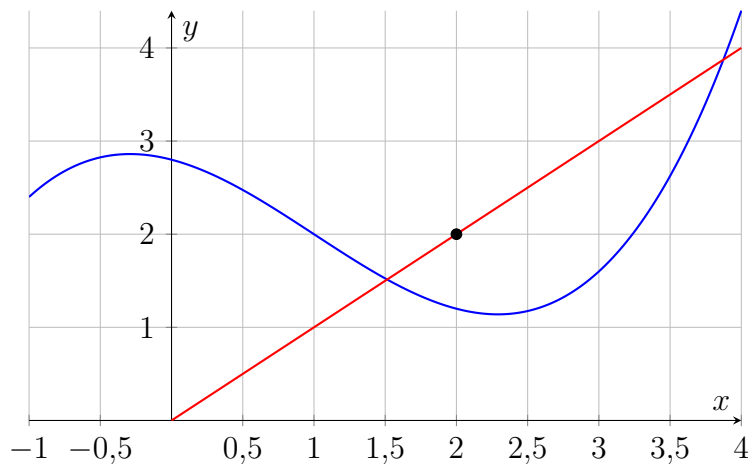


Figura 1: Recta tangente en $x = 2$

2. Interpretación

2.1. Interpretación geométrica

En $x = a$, la recta tangente:

- tiene la misma pendiente que la función,
- se pega a la curva localmente,
- permite aproximar la función cerca del punto.

2.2. Interpretación económica/social

Si f representa:

- coste total $\rightarrow f'(a)$ es el *coste marginal*,
- número de usuarios $\rightarrow f'(a)$ es el *ritmo instantáneo de crecimiento*,
- demanda $\rightarrow f'(a)$ es la *sensibilidad de la demanda*.

La recta tangente permite:

- hacer predicciones cercanas a a ,
- estimar variaciones pequeñas de forma lineal.

3. Cómo calcular la recta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Para ello se necesitan:

1. El punto $(a, f(a))$,
2. La pendiente $f'(a)$.

Si $f'(a)$ no existe, no hay recta tangente.

4. Ejemplo visual adicional

Considera la función:

$$f(x) = x^2.$$

La pendiente en $x = 1$ es:

$$f'(1) = 2.$$

$$\text{Recta tangente: } y = 1 + 2(x - 1).$$

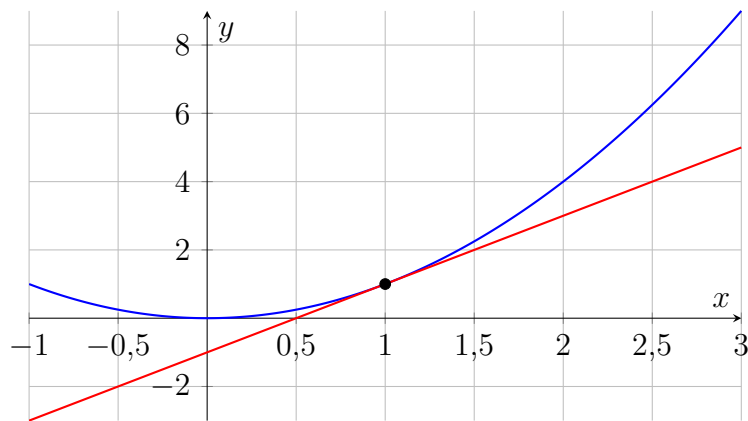


Figura 2: Recta tangente a $f(x) = x^2$ en $x = 1$

5. Ejercicios aplicados (contexto social y económico)

Ejercicio 1. Coste marginal

El coste total de producir x unidades es:

$$C(x) = 500 + 20x - 0,2x^2 + 0,005x^3.$$

1. Halla la recta tangente en $x = 10$.
2. Interpreta económicamente $C'(10)$.
3. Usa la recta tangente para estimar el coste de producir 11 unidades.

Ejercicio 2. Usuarios de una plataforma

$$U(t) = 40 + 12t - t^2, \quad t \text{ en meses.}$$

1. Calcula la recta tangente en $t = 3$.
2. Interpreta $U'(3)$.
3. Estima con la recta tangente el valor de $U(3,2)$.

Ejercicio 3. Demanda y precio

$$q(p) = 120 - 15 \ln(p + 1).$$

1. Obtén la recta tangente en $p = 4$.
2. Explica qué significa la pendiente: ¿aumenta o disminuye la demanda si sube el precio?

Ejercicio 4. Población activa

$$P(t) = 55 + 8\sqrt{t},$$

donde t son años desde 2020.

1. Halla la recta tangente en $t = 4$.
2. Interpreta $P'(4)$.
3. Estima $P(4,3)$ usando la recta tangente.

Ejercicio 5. Mini–problema aplicado

$$G(t) = 22 + 3t - 0,1t^2,$$

PIB per cápita (en miles) desde 2025.

1. Obtén la recta tangente en $t = 2$.
2. Interpreta el signo de $G'(2)$.
3. Predice $G(2,4)$ usando el modelo lineal local.