Sesión 1 – Derivabilidad

Soluciones detalladas

Ejercicio 1: Derivabilidad en $x = 0$

(a) $f(x) = |x|$

Usamos la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Estudiamos ambos límites laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Como

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h},$$

la derivada **no existe en** 0. Es un **punto anguloso**.

(b) $f(x) = x^{1/3}$

Aplicamos la definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}}.$$

Observamos:

$$h^{2/3} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h^{2/3}} \to +\infty.$$

No existe un valor finito. La pendiente es **infinita** en 0.

(c) Función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Comprobación de continuidad

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x = 0, \qquad f(0) = 0.$$

La función es **continua** en 0.

2. Derivadas laterales

Derivada por la izquierda:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0.$$

Derivada por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

Como

$$f'(0^-) \neq f'(0^+),$$

la función **no es derivable** en 0 (pendientes diferentes a izquierda y derecha).

Ejercicio 2

Se da: $f'(4) = -30$.
Interpretación:

- La magnitud que estudia la función **disminuye** en el mes 4.
- Lo hace a un ritmo de **30 unidades por mes**.
- Es un descenso instantáneo, no un promedio.

Problema aplicado: $U(t) = 1200 + 300t - 40t^2 + t^3$

(a) Valor inicial

$$U(0) = 1200.$$

Había **1200 usuarios activos diarios** en el lanzamiento.

(b) Derivada e interpretación

$$U'(t) = 300 - 80t + 3t^2.$$

Representa el **ritmo de variación mensual** del número de usuarios.

(c) Cálculo de $U'(2)$ y $U'(5)$

$$U'(2) = 300 - 160 + 12 = 152 \quad \Rightarrow \quad \text{gana 152 usuarios/mes.}$$

$$U'(5) = 300 - 400 + 75 = -25 \quad \Rightarrow \quad \text{pierde 25 usuarios/mes.}$$

(d) Momento en que deja de crecer

Resolvemos:

$$U'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 300 - 80t + 3t^2 = 0.$$

Aplicamos fórmula general:

$$t = \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 4 \cdot 3 \cdot 300}}{6} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 3600}}{6} = \frac{80 \pm \sqrt{2800}}{6}.$$

$$\sqrt{2800} \approx 52{,}92.$$

$$t_1 = \frac{80 - 52{,}92}{6} \approx 4{,}52, \qquad t_2 = \frac{80 + 52{,}92}{6} \approx 22{,}15.$$

El único valor razonable es:

$$t \approx 4{,}5.$$

La app deja de crecer alrededor del **mes 4.5**.

(e) Derivabilidad en $t = 0$

La función $U(t)$ es un **polinomio**. Los polinomios son derivables en todo $\mathbb{R}$.

Aunque en la realidad hubiera una campaña que cause un salto, el modelo matemático es suave.

Por lo tanto, $U(t)$ es **derivable** en $t = 0$.