Ej 1 viene de Galicia 2023 Ext

a) $\left.\begin{array}{l} 2x = 2 + (-y-z) \\ z = 1+2y \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ $\boxed{\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ -2y+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\}}$ $\rightarrow$ 0'25 ptos

b) llamo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ el sistema de ecuaciones es equivalente al sistema matricial

$\boxed{A \cdot X = B}$ $\rightarrow$ 0'25 ptos

c) $\boxed{\text{si } |A| \neq 0 \text{ (para que exista } A^{-1}) \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}}$ $\Rightarrow$ 0'25

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1+2-2 = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ existe A^{-1} $\rightarrow$ 0'15

Calculo A^{-1}

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = Adj(A^T)$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^T) \underset{|A|=1}{=} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}}$ $\rightarrow$ 0'25

Matricialmente: $X = A^{-1} \cdot B$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}$ $\rightarrow$ 0'35

$\boxed{\text{Ej 2}}$ a) para que no exista A^{-1} tiene que ocurrir que $\boxed{|A|=0}$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix} = xyz + y^2 - (xyz + y^2 z) = y^2 - y^2 z = \boxed{y^2(1-z)}$$

$$y^2(1-z)=0 \quad 0'25\text{ ptos} \quad \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{o} \\ 1-z=0;\ z=1 \end{cases} \rightarrow 0'5\text{ ptos}$$

x puede valer cualquier nº, no afecta al |A|

b) para $x=3$, $y=1 \neq 0$, $z=0 \neq 1$ $\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ y por tanto existe A^{-1} $\rightarrow$ 0'15

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad |A| = 1(1-0) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^T) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} = A^{-1} \rightarrow 0'55$$

c) $BA = C$ para $a=1$ multiplicando queda:

$$\underset{1\times 3}{(1\ 2\ 3)} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}} = (4\ 0\ 2)_{1\times 3}$$

$$\boxed{\begin{cases} x+2y+3=4 \\ y+3z=0 \\ x+2y+3z=2 \end{cases}} \quad 0'25 \quad ; \quad \begin{cases} x+2y=1 \\ y+3z=0 \\ x+2y+3z=2 \end{cases} \text{por Gauss}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \rightarrow 0'15$$

$r(A) = r(A^*) = 3$; SCD, una sol.

$-3z = -1 \Rightarrow z = \frac{1}{3} \rightarrow 0'2$

$y+3z=0;\ y+1=0;\ y=-1 \rightarrow 0'2$

$x+2y+3z=2;\ x-2+1=2;\ x=3 \rightarrow 0'2$

Ej 3 $x = n^{o}$ motos $\rightarrow 60x$ trabajo manual $+ 20x$ trabajo mecánico   pág (3)

$y = n^{o}$ coches $\rightarrow 45y$ trabajo manual $+ 40y$ trabajo mecánico (minutos de trabajo)

1 mes → se dispone   120h t. manual = 7200 minutos t. manual

90h t. mecánico = 5400 minutos t. máquina

Beneficio $1500x + 200y = f(x,y)$ función a optimizar

1ª condición $60x + 45y \leq 7200 \rightarrow \boxed{y \leq 160 - \frac{4}{3}x}$

2ª condición $20x + 40y \leq 5400 \rightarrow \boxed{y \leq 135 - \frac{x}{2}}$

3ª y 4ª condición $\boxed{x \geq 0,\ y \geq 0}$, $\boxed{x \text{ e } y \text{ n}^{os} \text{ enteros}}$

→ queda restringido al 1er cuadrante

(1 pto)

Representamos $y = 160 - \frac{4}{3}x$ ①

$y = 135 - \frac{x}{2}$ ②

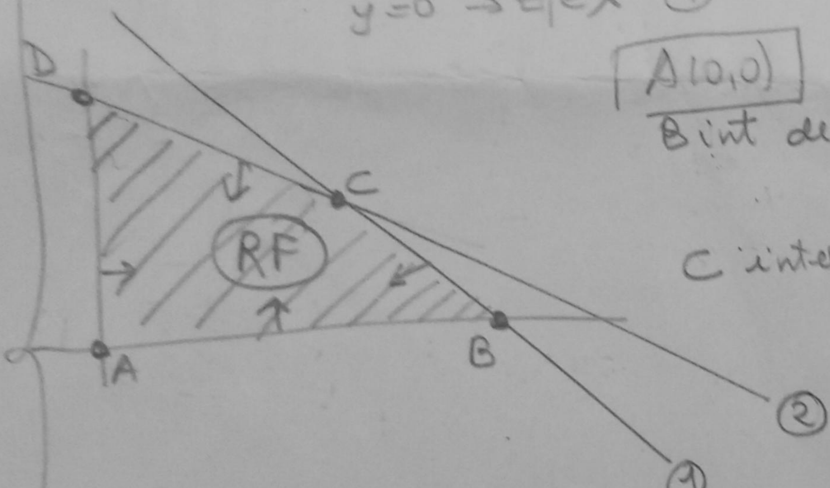
$x = 0 \rightarrow$ Eje Y ③

$y = 0 \rightarrow$ Eje X ④

x	$160 - \frac{4}{3}x$	$135 - \frac{x}{2}$
80	120	120
60	80	105

$\boxed{A(0,0)}$ (obvio)

B int de ① con eje X $\left.\begin{array}{l} y = 160 - \frac{4}{3}x \\ y = 0 \end{array}\right\} \boxed{(120,0) B}$



C intersección de ① y ② $\left.\begin{array}{l} y = 160 - \frac{4}{3}x \\ y = 135 - \frac{x}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{C(80,120)}$

D intersección de ② y Eje Y $\left\{\begin{array}{l} 135 - \frac{x}{2} = y \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{D(0,135)}$

Además todos son nºs enteros ⇒ no hay problema

(1 pto)

c) $f(x,y) = 1500x + 2000y$

$f(A) = 0$

$f(B) = 1500 \cdot 120 = 180\,000$ €

$f(C) = 1500 \cdot 80 + 2000 \cdot 120 = \boxed{285\,000 \text{ €}}$

$f(D) = 2000 \cdot 135 = 270\,000$ €

⇒ El máximo beneficio son 285000 € se obtiene ensamblando 80 motos y 120 coches → 0'5

$\boxed{\text{Ej 4}}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$

a) k? para que No exista A^{-1} $\Rightarrow |A|=0$

$|A| = k-6-24+3+12-4k=0$

$-3k-15=0$; $-3k=15$; $\boxed{k=-5}$ → 0'5 pto

b) si $k=-5 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow r(A)\leq 2$ (No puede ser 3)

Como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r(A)=2}$ → 0'5