

Ej 1 $x = \text{kg sandía RAYADA}$
 $y = \text{" " SIN pepitas}$
 $z = \text{" " CON " "}$

1ª ecuación: $x + y + z = 2700$

2ª ecuación: $z = \frac{1}{3}(x + y)$; $3z = x + y$; $0 = x + y - 3z$;

$x + y - 3z = 0$

(o alg. otra equivalente a ésta)

a) 3ª ecuación:

x se vende a 1'25

$y \rightarrow 2'75$

$z \rightarrow 2'25$

total ganancias 5400

$1'25x + 2'75y + 2'25z = 5400$

(o alg. otra equivalente a ésta)

Planteo sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ x + y - 3z = 0 \\ 1'25x + 2'75y + 2'25z = 5400 \end{cases}$$

0'25

Por Gauss, voy a triangularizar la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1'25 & 2'75 & 2'25 & 5400 \end{array} \right)$$

$F_2' = F_2 - F_1$

$F_3' = F_3 - 1'25F_1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & 0 & -4 & -2700 \\ 0 & 1'5 & -1 & 2025 \end{array} \right)$$

$F_2 \leftrightarrow F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & 1'5 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & -4 & -2700 \end{array} \right)$$

$\rightarrow$ 0'75 pta

ej 1 $\rightarrow$ hay que indicar bien los pasos

por Gauss tengo garantizado

que

$r(A)$	$r(A^*)$	nº incóg.	Tipo	Sol
3	3	3	SCD	UNA solución

0'25

paso la matriz triangular a sistema y lo resolvemos en cascada

$x + y + z = 2700$

$1'5y + z = 2025$

$-4z = -2700$

$z = \frac{-2700}{-4} = 675 \text{ kg sandía CON pepitas}$

0'25

sustituyo en la 2ª ec $1'5y + 675 = 2025$; $1'5y = 2025 - 675$

$1'5y = 1350$; $y = \frac{1350}{1'5} = 900 \text{ kg sandía SIN pepitas}$

0'25

por último sustituyo en la 1ª cc y despejo x pág (2)
 $x + 900 + 675 = 2700$; $x = 2700 - 900 - 675$; $x = 1125 \text{ kg}$ (0'25)

b) cambiando precios y sigue obteniendo 5400€
 todas al mismo precio $\frac{5400 \text{ €}}{2700 \text{ kg}} = 2 \text{ €/kg}$

sólo cambia la 3ª ecuación que queda $2x + 2y + 2z = 5400$

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 5400 \end{cases}$$

al resolverlo por Gauss A^*

me queda $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5400 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2700 \\ 0 & 0 & -4 & -2700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ (0'15)

$r(A)$	$r(A^*)$	nº inc.	Tipo	Sol
2	2	3	SC Ind	∞

→ (0'1)

queda una fila NULA
 tanto para A como
 para A^*

las soluciones son:

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ -4z = -2700 \end{cases}$$

$$z = \frac{-2700}{-4} = 675 \text{ kg sandía CON pepitas}$$

$$x + y = 2025$$

$$x = \alpha$$

$$y = 2025 - \alpha$$

entre las rayadas
 y sin pepitas
 tienen que sumar
 2025

(0'15 pts)

donde α es un
 nº positivo cualquiera
 entre 0 y 2025

Este tipo de ejercicios no suele caer a menudo en PAU
 en Galicia, cayó en Ext 2020 y en un modelo que
 Ord 2017 ahora no localizo

OTRA forma de resolverlo

MATRICIALMENTE

$$AX = C$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2700 \\ 0 \\ 5400 \end{pmatrix}$$

como $|A| = 6 \neq 0 \Rightarrow$ existe $A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}C$

calculamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 10/5 & 0/5 & -4 \\ -6 & 1 & 1 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}$

y $X = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1125 \\ 900 \\ 675 \end{pmatrix}$

(Si especifican resolverlo MATRICIALMENTE, entonces
 habría que hacerlo de esta manera) no es habitual
 pero podía ocurrir

Ej 2

Programación Lineal

pdg ③

(Muy importante casi SIEMPRE)

- llamo $x = n^{\circ}$ lechugas ICEBERG $\rightarrow$ necesitan 15x litros agua
 $y = n^{\circ}$ lechugas ROMANAS $\rightarrow$ necesitan 18y litros agua

1ª condición $\rightarrow x \geq \frac{1}{2}y \Rightarrow 2x \geq y \Rightarrow y \leq 2x$

2ª condición $\rightarrow x \leq 1500$

3ª condición y 4ª condición: $900 \leq x+y \leq 2400$

de donde $900 \leq x+y \rightarrow 900-x \leq y; y \geq 900-x$

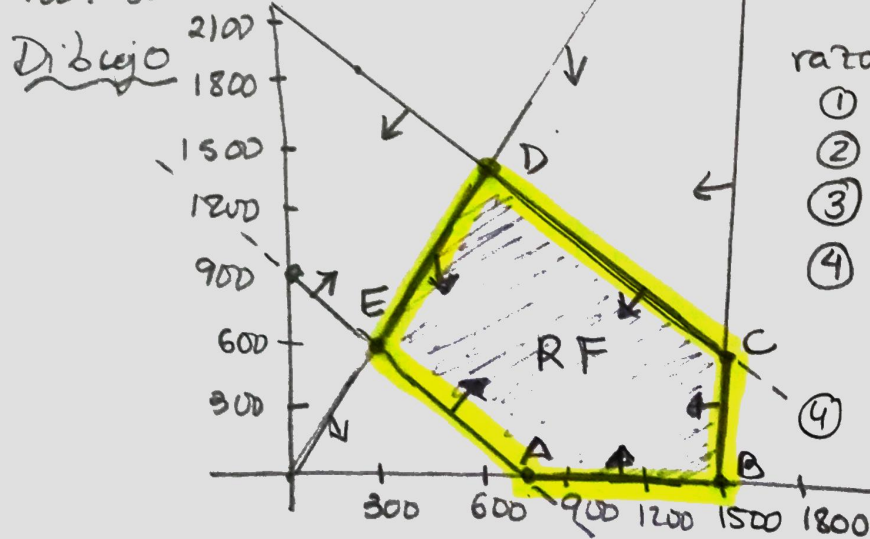
$x+y \leq 2400 \rightarrow y \leq 2400-x$

Además debemos darnos cuenta que $x \geq 0; y \geq 0$
y tanto x como y deben ser n° enteros

$\rightarrow$ hasta aquí **0.5 pto**

- Dibuyo las rectas
① $y = 2x$
② $x = 1500 \rightarrow$ recta vertical que pasa por 1500
③ $y = 900 - x$
④ $y = 2400 - x$

x	① $2x$	③ $900-x$	④ $2400-x$
0	0	900	2400
300	600	600	2100
900	1800	0	1500



(así ya tengo calculados
varios vértices)

por $x \geq 0; y \geq 0$
sólo me interesa
el 1º cuadrante

razono las desigualdades:

① $y \leq 2x \rightarrow$ por DEBAJO

② $x \leq 1500 \rightarrow$ ANTES de 1500

③ $y \geq 900-x \rightarrow$ ARRIBA

④ $y \leq 2400-x \rightarrow$ ABAJO

El lugar factible
o válido para
las cuatro
es el del
dibujó

por **Todo esto 1 pto**

Calcular los VERTICES

pág (4)

A intersección de (3) y (1) $x \rightarrow A(900, 0) \rightarrow y = 900 - x$
B intersección de (2) y (1) $x \rightarrow B(1500, 0) \rightarrow y = 0$
C intersección de (2) y (4) $x = 1500$
 $y = 2400 - x \rightarrow y = 2400 - 1500 = 900$
 $C(1500, 900)$

D intersección de (4) y (3); $y = 2x$
 $y = 2400 - x$
 $2x = 2400 - x$
 $3x = 2400$
 $x = 800$
 $y = 1600$
 $D(800, 1600)$

E intersección de (4) y (3); $y = 2x$
 $y = 900 - x$
 $2x = 900 - x$
 $3x = 900$
 $x = 300$
 $y = 600$
 $E(300, 600)$

Por todos bien (0,5 pto)

• Queremos minimizar el consumo de agua $f(x, y)$
función objetivo $f(x, y) = 15x + 18y$
función a optimizar

Sustituimos en los vértices

como todos cumplen las condiciones de ser n° positivos y enteros la solución es fácil, sólo tengo que buscar el vértice donde f alcance su valor más bajo

$$f(A) = f(900, 0) = 15 \cdot 900 = 13500 \text{ €}$$

$$f(B) = f(1500, 0) = 15 \cdot 1500 = 22500 \text{ €}$$

$$f(C) = f(1500, 900) = 15 \cdot 1500 + 18 \cdot 900 = 38700 \text{ €}$$

$$f(D) = f(800, 1600) = 15 \cdot 800 + 18 \cdot 1600 = 40800 \text{ €}$$

$$f(E) = f(300, 600) = 15 \cdot 300 + 18 \cdot 600 = 15300 \text{ €}$$

El mínimo se alcanza en $A(900, 0) \rightarrow 0,25 \text{ pto}$

interpretación: El gasto mínimo de agua será de 13500 € lo que ocurrirá si plantamos 900 lechugas iceberg y 0 lechugas Romanas $\rightarrow 0,25$

[E, 3] en total 2'5 pto, ejercicio técnico de álgebra página 10

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcular a para que exista B^{-1}
para que $\exists B^{-1}$ se $|B| \neq 0$ (debe estar escrito)

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a - 2a + 2 = -3a + 2; -3a + 2 = 0 \Rightarrow -3a = -2$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ para que sea $\neq 0$ tiene que ocurrir
que $a \neq \frac{2}{3}$

todo eso (0'55 pto)

ii) Ahora (ejercicio)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(cambian los datos, es otro ejercicio distinto)

$$a) C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0'25 \text{ pto}$$

$$b) A + B + C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0'25$$

$$c) (A - B)^{-1} = ?$$

• primero comprobamos que si hay inversa

$$|A - B| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (-2) = 1 \neq 0$$

por tanto si hay $(A - B)^{-1}$

• calculo la inversa

$$(A - B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A - B)^t = \begin{pmatrix} +(-1) & -(-1) \\ -(2) & +(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0'55 \text{ pto}$$

d) despejo X en la ecuación matricial $AX - BX = A + B + C^2$
 $(A - B)X = A + B + C^2$; como $\exists (A - B)^{-1} \Rightarrow$

$$X = (A - B)^{-1} (A + B + C^2) \rightarrow 0'5 \text{ pto}$$

$$\text{usando b) y c) calculo } X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow 0'25 \text{ pto}$$

Ej 4 hay que usar razonadamente las propiedades de los determinantes pág 6

- ⊗ Si sustituyo una fila por una combinación lineal de esa misma fila con otras, el determinante no varía
- ⊗⊗ Si multiplico una fila (sólo una) por un n° , todo el determinante queda multiplicado por ese n°
- ⊗⊗⊗ Si en un determinante una fila tenemos una suma podemos separarlo en la suma de dos determinantes (NO hace falta ser tan exhaustivo)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 8y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -7 & -12 & -19 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$F'_2 = F_2 - 3F_1$ (busco deshacerme de las x, y, z de la 2ª fila)

$$= \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

⊗ $F'_2 = F_2 + 3F_3$
(busco conseguir un cero en el centro de F_2)

solo factor común 2 en F_2

busco que la F_3 se parezca a la F_2 del dato

$$= 2 \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2(-1) = -2$$

⊗ $F_3 - F_2$

⊗ $F'_1 = F_1 - F_3$

este sabemos que vale -1

1 pto

por los razonamientos (rodeados en círculo) con subrayador) para justificar cada paso → 0.25 pto (son 5)