BOLETÍN: MATRICES, ECUACIONES MATRICIALES Y APLICACIONES

Operaciones básicas con matrices

1. Calcula los coeficientes de una matriz de orden 3×3 a partir de su definición:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i + j & \text{si } i < j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2. Calcula los coeficientes de una matriz de orden 3×3 a partir de su definición:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{2} - 1 & \text{si } i > j \\ \sqrt{i \cdot j} & \text{si } i = j \\ (-3 \cdot j)^{i} & \text{si } i < j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

3. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula: a) $2A + 3B$, $A - 2B - 3C$, $2A - B + 4C$

b) $A \cdot B \cdot C$ c) $B \cdot A \cdot B$ d) $A^2 \cdot B^3$

4. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Calcula: a) $A \cdot B \cdot C$ b) $C \cdot B \cdot A$ c) $A \cdot B^2 \cdot C$ d) $C \cdot B^3 \cdot A$

5. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $\left(A \cdot B^t\right)^t = B \cdot A^t$

b) Calcula $\left(A \cdot B^t\right)^t + B \cdot A^t$

6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

7. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} x+y & 3y+x \\ 2x+y & 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3x+6 & -4y-1 \\ -14 & -x^2+3y \end{pmatrix}$.

Calcula x e y para que las matrices A y B sean opuestas.

✏️ Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

10. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

✏️ Ecuaciones matriciales

12. Resuelve simbólicamente las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A + X = B$
b) $A \cdot X = B$
c) $X \cdot A + B = C$
d) $A \cdot X \cdot B = C$
e) $A \cdot X + B \cdot X = C$
f) $A \cdot X + X = C$

13. Sean la matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $A \cdot X + B = C$

14. Sean la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $X \cdot A - B = 2 \cdot C$

15. Sean la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $A^2 \cdot X + B \cdot X = C$

16. Sean la matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $3 \cdot X + B \cdot A = A \cdot B$

17. Despeja X en la expresión:

$$2 \cdot X - 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

✏️ Sistemas de ecuaciones matriciales

18. Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \\ 3A - 4B = \begin{pmatrix} -15 & 14 \\ -4 & -22 \end{pmatrix} \end{cases}$

19. Resuelve el sistema matricial: $\left. \begin{array}{l} 3X + 2Y = A \\ -X + 3Y = B \end{array} \right\}$

siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

20. Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases} 2X - 4Y = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ -2 & -4 \\ -14 & 4 \end{pmatrix} \\ -3X + 2Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$

21. Resuelve los sistemas matriciales:

a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

✏️ Aplicaciones de las matrices a las ciencias sociales

22. Una empresa monta ordenadores de dos tipos, de sobremesa y portátiles, y de tres calidades: alta, media y baja.

En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los cuales 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja (para los de sobremesa), y 30 de calidad alta, 30 de media y 40 de baja (para los portátiles).
Para los ordenadores de sobremesa se invierten cuatro horas de montaje, siete de instalación del software y para los portátiles seis y ocho horas respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).
b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de software (filas) para cada tipo de ordenador (columnas).
c) Calcula e interpreta la matriz $A \cdot B^t$.

23. Una empresa empaqueta cinco tipos de lotes de herramientas para bricolaje y las reparte a cuatro provincias A, B, C y D. La siguiente tabla muestra el número de lotes de cada tipo que debe repartir en cada provincia.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
A	12	10	10	30	10
B	15	9	15	25	12
C	23	8	12	25	15
D	12	12	20	15	12

Cada tipo de lote está formado por un número de piezas P, Q y R según la siguiente distribución.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
P	2	1	2	0	1
Q	2	1	2	2	0
R	0	2	2	3	3

Escribe la matriz que determina el número de piezas de cada clase que se van a repartir a cada provincia.

24. Una tienda de música ha vendido dos tipos de productos: música en *CD* (formato físico) y música en *DG* (formato digital). La matriz A muestra el total de canciones, tanto grabadas en *CD* como en *DG*, vendidas durante los años 2014, 2015 y 2016. La matriz B muestra los precios a los que se ha vendido una canción según el tipo de grabación y según los años indicados anteriormente.

a) Calcula el producto de matrices $C = A \cdot B$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.
b) Calcula el producto de matrices $D = B \cdot A$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.
c) Indica un significado para los términos c_{12} y d_{23}

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2014 & 2015 & 2016 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{CD's} \\ \text{Digital} \end{array} & \begin{pmatrix} 1150 & 1360 & 1400 \\ 780 & 950 & 1350 \end{pmatrix} = A \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{CD's} & \text{Digital} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2014 \\ 2015 \\ 2016 \end{array} & \begin{pmatrix} 1,25 & 0,75 \\ 1,30 & 0,65 \\ 1,40 & 0,50 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

Resolución de ecuaciones matriciales por igualación

25. Resuelve X en la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$

26. [Modelo de examen 2023]

EJERCICIO 1. **Álgebra**. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.
b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

27. [ABAU 2023 Ordinaria]

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.
b) Calcule la matriz X= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde C= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

28. [ABAU 2021 Extraordinaria]

EXERCICIO 1. Álxebra. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, B= $(a \quad 2 \quad 3)$ e $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine os valores x, y, z para os que a matriz A **non** ten inversa.
b) Calcule A^{-1} para x=3, y=1, z=0.
c) Resolva o sistema B·A=C para a=1.

29. [ABAU 2020 Extraordinaria]

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.
b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

✏️ Potencia de una matriz cuadrada (Extra)

30. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula la expresión general de la potencia enésima A^n.

31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la potencia A^{23}.

32. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

33. Calcula A^{2000}, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

✏️ BOLETÍN: MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES (refuerzo)

34. Halla el valor de x en esta igualdad de matrices:

$$(1 \quad -1)\cdot\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \quad x \quad 9)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

35. Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica: $\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$

36. Halla, si es posible, la inversa de esta matriz: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

37. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

38. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

39. Sean A, I y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Contesta razonadamente a la siguiente pregunta:
¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la igualdad $(A - \lambda I)^2 = B$ sea cierta?
En caso afirmativo, halla dicho valor de λ.

40. Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo:

$A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$, determinando α y β , siendo I la matriz identidad.