DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL DE UNA POBLACIÓN NORMAL

Si consideramos todas las muestras aleatorias de tamaño n que se pueden extraer de una población, la variable aleatoria que a cada muestra le hace corresponder su media, se llama **media muestral** y se escribe $\overline{X}$.
$$\overline{X} : \{x_1, \ldots, x_n\} \to \bar{x}$$

Distribución: La distribución de la media muestral, $\overline{X}$, de las muestras aleatorias de tamaño n que se pueden extraer de una población de media μ y desviación típica σ, sigue una distribución normal:

$$\overline{X} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Ejemplos:

1. El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de $67\ kg$ y una desviación típica de $5\ kg$. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los $68{,}5\ kg$? ¿Y de que sea menor que $68\ kg$?

$$\overline{X} \equiv N\left(67;\ \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(67;\ 0{,}5)$$

$$P(\overline{X} > 68{,}5) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} > \frac{68{,}5-67}{0{,}5}\right) = P(Z > 3) =$$
$$= 1 - P(Z \le 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$

$$P(\overline{X} < 68) = P\left(\frac{\overline{X}-67}{0{,}5} < \frac{68-67}{0{,}5}\right) = P(Z < 2) = 0{,}9772$$


Andrey Markov
Андрей Марков

2. El gasto mensual de los jóvenes de una región durante los fines de semana sigue una distribución normal de media 25 € y desviación típica de 3 €? ¿Cuál es la probabilidad de que una una muestra de 64 jóvenes tenga un gasto medio comprendido entre $23{,}85$ € y $26{,}15$ €?

$$\overline{X} \equiv N\left(25;\ \frac{3}{\sqrt{64}}\right) = N(25;\ 0{,}375)$$

$$P(23{,}85 < \overline{X} < 26{,}15) = P\left(\frac{23{,}85-25}{0{,}375} < \frac{\overline{X}-25}{0{,}375} < \frac{26{,}15-25}{0{,}375}\right) =$$
$$= P(-3{,}07 < Z < 3{,}07) = 2P(Z < 3{,}07) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}9989 - 1 = 0{,}9978$$


George Pólya
Pólya György

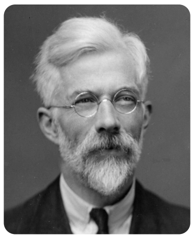
3. El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:

a) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
b) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre $7{,}8$ y $9{,}5$ horas.

a) $\overline{X} \equiv N\left(9;\ \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(9;\ 0{,}5)$

b) $P(7{,}8 < \overline{X} < 9{,}5) = P\left(\frac{7{,}8-9}{0{,}5} < \frac{\overline{X}-9}{0{,}5} < \frac{9{,}5-9}{0{,}5}\right) = P(-2{,}4 < Z < 1) =$
$$= P(Z<1) - P(Z \le -2{,}4) = P(Z<1) - [1 - P(Z < 2{,}4)] =$$
$$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}9918 = 0{,}8331$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA POBLACIONAL (con desviación típica conocida). Confianza, error y tamaño de la muestra


Ronald Fisher

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Por tanto , μ está en $\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ con un nivel de confianza $1-\alpha$

Error máximo admisible

El error máximo admisible en la estimación de la media poblacional, utilizando el $I.C.$ es su radio

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De aquí podemos despejar el tamaño mínimo (n) y el nivel de confianza $(1-\alpha)$.

4. En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido de $37{,}1°C$, y la desviación típica de la población de $1{,}04°C$. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del $99\,\%$.


Florence Nightingale

$1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}58$

$\left(37{,}1 - 2{,}58 \cdot \frac{1{,}04}{\sqrt{64}}; 37{,}1 + 2{,}58 \cdot \frac{1{,}04}{\sqrt{64}}\right) = (36{,}76; 37{,}44)$

Con la muestra elegida, la probabilidad de que la temperatura media de los 64 pacientes esté en el intervalo de confianza (36,76; 37,44) es 0,99.

5. La desviación típica del peso de las bolsas de frutos secos de una marca es de $15\ g$. De una muestra de 250 bolsas, el peso medio ha sido $246\ g$. Al hallar el intervalo de confianza del $90\,\%$ para el peso medio, ¿cuál es el error máximo admisible?

$$1-\alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}05} = 1{,}645$$

$$E = 1{,}645 \cdot \frac{15}{\sqrt{250}} = 1{,}56$$

Este resultado indica que, al considerar $246\ g$ como peso medio de las bolsas, el mayor error que podemos cometer en la estimación es $1{,}56\ g$ con una probabilidad de $0{,}90$.

EJERCICIOS ABAU DISTRIBUCIÓN, IC, TAMAÑO Y NIVEL CONFIANZA PARA LA MEDIA μ

6. En una empresa se quiere racionalizar el gasto en teléfono móvil de sus agentes comerciales. Para eso se hace un estudio sobre una muestra y se obtiene “con una confianza del $95\,\%$, la media del gasto mensual en teléfono móvil está entre $199{,}71$ y $220{,}29$ €”. Suponiendo que el gasto en teléfono móvil es una variable normal:
   a) Calcula el gasto medio muestral y el error cometido en la estimación.
   b) Si la desviación típica es de 42 euros, ¿qué tamaño tiene la muestra?

(Septiembre 2018) Sol: a) $\bar{x} = 210$ €, $E = 10{,}29$ b) $n = 64$

7. Un consumidor cree que el peso medio de un producto es distinto del que indica el envase. Para estudiar este hecho, el consumidor toma una muestra aleatoria simple de 100 productos en los que se observó un peso medio de $245\ g$. Se supone además que el peso del producto por envase sigue una distribución normal con desviación típica $9\ g$.

   a) Construye un $I.C.$ para el peso medio de ese producto al $95\,\%$ de confianza.
   b) ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de $2\ g$ y un nivel de confianza del $90\,\%$?

(Junio 2018 Opc B) Sol: a) $(243{,}236\ ,\ 246{,}764)$ b) Se necesitarían al menos 55 productos.

8. El peso (en gramos) de las empanadas que salen de un horno sigue una distribución normal con una desviación típica de $120\ g$. Si se estableció el $I.C.\ (1499{,}9\ ,\ 1539{,}1)$ como $I.C.$ para la media a partir de una muestra de 144 empanadas,

   a) ¿Cuál es el valor de la media muestral? ¿Con qué nivel de confianza se construye el intervalo?
   b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del $99\,\%$?

(Junio 2018 Opc A) Sol: a) $1519{,}5\ g$ es la media muestral y el n.c. es del $95\,\%$ b) 249 empanadas

9. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu\ ,\ \sigma = 15)$.

a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el $I.C.\ (321{,}1\ ,\ 330{,}9)$ para la media μ. Calcula el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal $N(\mu = 326\ ,\ \sigma = 15)$. Calcula la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supere las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

(Septiembre 2017 Opc B) Solución:

a) La media muestral 326 horas. El nivel de confianza (n.c.) es del $95\,\%$
b) $P\left(\overline{X} \leq 330\right) = 0{,}9452$

10. Una empresa informática lanza al mercado un producto del que se sabe que su vida útil, en años, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 1{,}6$ años.

   a) Para una muestra aleatoria de 100 productos, la vida media útil fue de $4{,}6$ años. Calcula un intervalo del $95\,\%$, de confianza para estimar la vida útil del producto. Interpreta el intervalo obtenido.

   b) Supongamos que la vida útil del producto sigue una distribución $N(4{,}6\ ,\ 1{,}6)$ y se toma una muestra aleatoria de 64 productos. Calcula la probabilidad de que la vida media útil de la muestra esté entre $4{,}25$ y $4{,}95$ años.

(Junio 2017 Opc A) Solución:

Unha empresa informática lanzou ao mercado un produto do que sabe que a súa vida útil, en anos, segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ = 1´6 anos.

(a) **0´75 puntos.** *Para unha mostra aleatoria de 100 produtos, a vida media útil foi de 4´6 anos. Calcula un intervalo do 95% de confianza para estimar a vida media útil do produto. Interpreta o intervalo obtido.*

– Sexa X : *vida útil, en anos, dun produto informático.*
  Sabemos que
  $X \sim N(\mu, \sigma = 1'6)$
  $\downarrow n=100$
  $\bar{X}$ *media muestral* : *vida media útil, en mostras de* 100 *produtos* $\xrightarrow[\text{valor particular do estatístico para a mostra dada}]{} \bar{x} = 4'6$ *anos*

– Os estatísticos L_1 e L_2, extremo esquerdo e dereito, respectivamente, do intervalo de confianza pedido, avaliados para a mostra dada son.

$$L_1 : \bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 4'6 - 1'96 \cdot \frac{1'6}{\sqrt{100}} = 4'6 - 0'3136 = 4'2864 \quad \textbf{0´25 puntos}$$

$$L_2 : \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to 4'6 + 1'96 \cdot \frac{1'6}{\sqrt{100}} = 4'6 + 0'3136 = 4'9136 \quad \textbf{0´25 puntos}$$

"*Estímase a vida media útil do produto informático entre, aproximadamente, 4´29 anos e 4´91 anos, cun 95% de confianza" (máximo erro cometido nesta estimación 0´31 anos)* **0´25 puntos**.

(b) **1´25 puntos**. *Supoñamos que a vida útil do produto segue unha distribución N(4´6, 1´6) e tómase unha mostra aleatoria de 64 produtos. Calcula a probabilidade de que a vida media útil da mostra estea entre 4´25 e 4´95 anos.*

– Determinamos a distribución da media muestral:

$$\bar{X} : \textit{media muestral} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \equiv N\left(4'6, \frac{1'6}{\sqrt{64}}\right) \equiv N(4'6, 0'2) \quad \textbf{0´25 puntos}.$$

– Formular a probabilidade pedida: $P\left(4'25 < \bar{X} < 4'95\right)$ **0´25 puntos**.

– Tipificación: $P\left(4'25 < \bar{X} < 4'95\right) = P\left(\frac{4'25 - 4'6}{0'2} < Z < \frac{4'95 - 4'6}{0'2}\right) = P\left(-1'75 < Z < 1'75\right)$ **0´25 puntos**.

– Paso a táboas: $P\left(-1'75 < Z < 1'75\right) = 2P\left(Z < 1'75\right) - 1$ **0´25 puntos**.

– Resultado: $P\left(4'25 < \bar{X} < 4'95\right) = P\left(-1'75 < Z < 1'75\right) = 2P\left(Z < 1'75\right) - 1 = 2 \cdot 0'9599 - 1 = 0'9198 \cong 0'92$ **0´25 puntos**.

Propuesta: Junio 2014 Opción A, Ej 4