Modelo 1 exame.2aval

1.-

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1} & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+3 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$, se pide:

(a) Su dominio,

(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$,

(c) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$,

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$,

(e) $\lim_{x\to 5} f(x)$.

(f) ¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

Estudia su continuidad

2.-Calcula los limites

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-2}{x-3} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-6x+8}{x^2-2} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^3-7x^2+16x-12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{8x^2-5x+3}{4x^2+4x+5} \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2-3x+7}-2x\right)$$

3.-

. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$,

Calcula los limites en 0,3,-3,2 y en ±∞

Con los resultados obtenidos ,haz la gráfica

Indica donde es discontinua y el tipo de discontinuidad

4.-

Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad del producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad, y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & \text{si} \quad x > 10 \end{cases}.$$

Se pide (supuesto que se amplía la función $c(x)$ para todo número real positivo):

(a) Halla a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

(b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran "muchísimas" unidades?

5.-

Una empresa dedicada a montajes en cadena ha determinado que el número de montajes realizados por un trabajador sin experiencia depende de los días de entrenamiento, de acuerdo con la función

$$M(t) = \frac{30t}{t+4},$$

donde t es el tiempo en días.

(a) ¿Cuántos montajes realizará el primer día? ¿Y el décimo?

(b) Justifica que el número de montajes crece al mismo tiempo que los días de entrenamiento.

(c) ¿Qué ocurriría, con el número de montajes, si nunca acabara el entrenamiento? Justifícalo.

6.-Estudia la continuidad y la derivabilidad de

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{x+2} & \text{si} \quad x\leqslant 0 \\[2ex] \dfrac{2}{x-2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases} \qquad\qquad f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad 2\leqslant x<4 \\ x^2-4x+1 & \text{si} \quad x\geqslant 4 \end{cases}$$

7.-

. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & \text{si} \quad x\leqslant 0 \\[2ex] x^2+bx+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Halla a y b para que la función f sea continua y derivable.

8.-

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x=3$.

9.-

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x\leqslant 1 \\ x^2+mx+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases} .$$

(a) Calcule m para que la función sea continua en $x=1$.

(b) Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x=1$?

(c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=0$.

10.-

Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+x$.

(a) Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en $x=1$ y que $f(1)=2$.

(b) Para $a=b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

11.-

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} -5x^2+40x-60 & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 6 \\ \dfrac{5x}{2}-15 & \text{si} \quad 6<x\leqslant 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

(a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función

(b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

(c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

(d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

e) Con toda la información anterior realiza la gráfica

12.-

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675, \ x \geqslant 0,$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

(a) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

(b) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

(c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.

(d) Represente gráficamente la función B.

13.-

Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$$C(t) = -0,2t^2 + 4t + 25, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 25 \ \ (t = \text{años desde el año } 2000).$$

(a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

(b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

(c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

14.-

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función $B(t)$ expresada a continuación:

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 6 \\ \dfrac{t+1}{2} & \text{si} \quad 6 < t \leqslant 12 \end{cases},$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses.

(a) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.

(b) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?

(c) Represente gráficamente la función $B(t)$. ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

15.-

Sea la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$.

(a) Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 3)$ y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x = -2$.

(b) Tomando $a = 8$ y $b = -10$, deduzca la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula.

16.- En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km2, viene dada por la función $f(t) = \frac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.

(a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla?

(b) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo.

(c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?

17.-) Sea P(t) el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo t, medido en meses:

$$P(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si} \quad 0\leqslant t\leqslant 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & \text{si} \quad t>5 \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de la función P.

(b) Estudie la derivabilidad de P en $t=5$.

(c) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.

(d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

18.-

2) A ganancia producida por unha máquina que durou 6 anos estímase pola función $f(x)=ax^3+bx^2,\ 0\le x\le 6$.
($f(x)$ representa a ganancia (en miles de euros) aos x anos de funcionamento, a e b son constantes)

(a) Determina o valor de a e b , se se sabe que a función $f(x)$ ten un punto de inflexión no punto (2, 32).

(b) Se $a=-2$ e $b=12$, calcula o ano no que a máquina produciu a maior ganancia, ¿cal foi o valor da devandita ganancia? Para estes valores, representa a gráfica da función $f(x)$ en [0, 6].

19.-

Nun ámbito controlado, o tamaño dunha poboación de aves, $P(t)$ (en centos), axústase á función

$$P(t)=\begin{cases} t^2-8t+50, & 0\le t\le 10 \\ 95-\dfrac{250}{t}, & t>10 \end{cases}$$, onde t é o tempo transcorrido en anos.

(a) ¿A partir de que ano crecerá a poboación $P(t)$? ¿Nalgún ano a poboación é mínima?

(b) Determina o valor ao que tende a poboación de aves co paso do tempo.

(c) Calcula o intervalo de tempo no que a poboación se mantén entre 5000 e 7500 aves.

20.-

2) A cantidade de auga (en centos de litros) que chega a unha depuradora para o seu procesado ao longo de certo día, vén estimada pola función $C(t)=-2t^3+75t^2-600t+2000,\ \ 0\le t\le 24$, onde t é o tempo en horas transcorrido a partir das 0:00 horas.

(a) Determina en que períodos se produce un aumento e unha diminución da cantidade de auga.

(b) Calcula a cantidade máxima e mínima de auga.

(c) Calcula o punto de inflexión e representa a gráfica da función $C(t)$, $0\le t\le 24$.

21.-

2) Nunha empresa a relación entre a produción x (expresada en miles de toneladas) e o custo medio de fabricación $C(x)$ (expresado en miles de euros) é do tipo $C(x)=2+x+\dfrac{9}{x},\ 1\le x\le 10$.

(a) Calcula a cantidade de produción que minimiza o custo medio de fabricación e o custo medio mínimo.

(b) Calcula a cantidade de produción que maximiza o custo medio de fabricación e o custo medio máximo.

(c) Se non desexan superar os 12 mil euros de custo medio de fabricación ¿entre que valores deberá estar comprendida a produción?

22.-

2) O prezo, en euros, que a acción dunha empresa acada no transcurso dunha sesión de Bolsa, vén dado pola función $p(t)=4t^3-42t^2+120t+200,\ \ 0\le t\le 7$, t é o tempo en horas a contar dende o inicio da sesión. Supoñamos que a sesión comeza ás 10 da mañá (t =0) e finaliza 7 horas despois (ás 5 da tarde).

(a) ¿Entre que horas o prezo da acción sobe e entre que horas baixa? ¿A que hora o prezo da acción acada un valor máximo relativo?, ¿e un valor mínimo relativo? Calcula ditos valores.

(b) ¿Acádase nalgún momento un valor máximo absoluto?, ¿e un valor mínimo absoluto? En caso afirmativo, calcula ditos valores.

(c) Utilizando os resultados anteriores e calculando o punto de inflexión, traza a gráfica da función $p(t)$.

23.-

Exercicio 1. A función f definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ verifica que a súa gráfica pasa polo punto $(-1, 0)$ e ten un máximo relativo no punto $(0, 4)$.

(a) Determinar a función f (calculando a, b e c).

(b) Representar graficamente a función $f(x)=x^3-3x^2+4$ estudando: intervalos de crecemento e decrecemento, mínimo relativo, intervalos de concavidade e convexidade e punto de inflexión.