8 LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Página 201

Resuelve

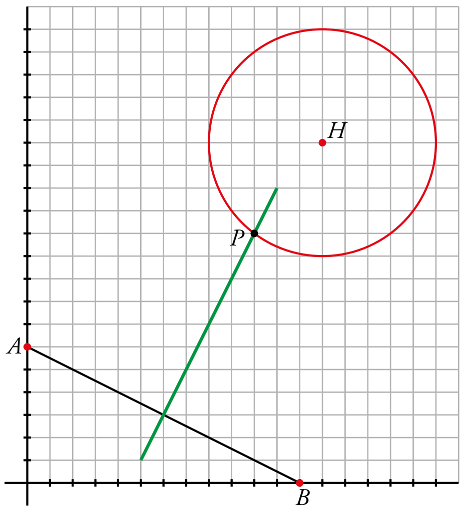
¿Dónde se situará el depósito?

Se quiere instalar un gran depósito de propano para abastecer a una factoría industrial y a dos urbanizaciones.

Han de cumplirse las siguientes condiciones: conviene que el depósito esté lo más cerca de la factoría, pero por razones de seguridad, no puede estar a menos de 500 m de un horno que hay en ella. Por tanto habrá de situarse, exactamente, a 500 m del horno, H. Además, se desea que esté a la misma distancia de A que de B.

Para resolverlo, llevamos los datos a unos ejes cartesianos (1 cuad = 100 m) y suponemos que los puntos H, A y B se sitúan donde se indica en la gráfica de la derecha.

- **La circunferencia es el conjunto de puntos que están a 500 m del horno. Analíticamente, son puntos (x, y) cuya distancia a $H(13, 15)$ es 5. Exprésalo mediante una ecuación.**
- **La recta verde es el conjunto de puntos que equidistan de A y de B. Analíticamente, es una recta que pasa por (6, 3) y tiene pendiente 2. Escribe su ecuación.**
- **El punto P donde hemos de situar el depósito de propano se obtiene hallando la intersección de las dos líneas que acabamos de describir. Resuelve el sistema que forman sus ecuaciones para hallar las coordenadas de P.**



- $\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5$
- $\frac{x-6}{1}=\frac{y-3}{2} \to 2x-y-9=0$
- $\begin{cases}\sqrt{(x-13)^2+(y-15)^2}=5\\ 2x-y-9=0\end{cases} \to x=\frac{72}{5},\ y=\frac{99}{5};\ x=10,\ y=11$

  La solución es $P=(10, 11)$ porque el depósito debe estar cerca de las urbanizaciones.

1 LUGARES GEOMÉTRICOS

Página 202

Hazlo tú

1 Halla la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(0, 0)$ y $B(6, 4)$.

$X = (x, y)$ punto de la mediatriz.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \to x^2 + y^2 = x^2 + 36 - 12x + y^2 + 16 - 8y$$

Mediatriz: $-12x - 8y + 52 = 0 \to -3x - 2y + 13 = 0$

Página 203

Hazlo tú

2 Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por r_1: $5x - 12y = 0$ y r_2: $12x + 5y = 0$.

$X = (x, y)$ punto de la bisectriz.

$$\frac{|5x-12y|}{13} = \frac{|12x+5y|}{13} \to |5x - 12y| = |12x + 5y| \to \begin{cases} 5x - 12y = 12x + 5y \\ 5x - 12y = -(12x + 5y) \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} B_1: -7x - 17y = 0 \\ B_2: 17x - 7y = 0 \end{cases}$$

3 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de cuadrados de distancias a $P(2, 5)$ y a $Q(4, -1)$ es 40, es decir, $\overline{XP}^2 - \overline{XQ}^2 = 40$.

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = 40 \to$$

$$\to (x-2)^2 + (y-5)^2 - ((x-4)^2 + (y+1)^2) = 40 \to 4x - 12y + 12 = 40 \to$$

$$\to 4x - 12y - 28 = 0 \text{ es una recta.}$$

Piensa y practica

1 a) Mediatriz del segmento de extremos $A(-5, -3)$, $B(7, 1)$. Comprueba que es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

b) Circunferencia de centro $O(-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas.

c) Bisectrices de los ángulos formados por las rectas:

r_1: $2x + y - 3 = 0$

r_2: $x - 2y + 16 = 0$

Comprueba que las bisectrices son dos rectas perpendiculares que se cortan en el mismo punto en que se cortan las rectas r_1 y r_2.

a) Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$:

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$10x + 14x + 6y + 2y + 34 - 50 = 0 \to 24x + 8y - 16 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0 \to y = -3x + 2$$

- El punto medio de AB es $M(1, -1)$ que, efectivamente, está en la recta (pues verifica la ecuación).

- La pendiente de la recta es $m_r = -3$, y la del segmento es:

$$m_{AB} = \frac{1-(-3)}{7-(-5)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Cumplen que $m_r \cdot m_{AB} = (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow AB \perp r$

b) Los puntos $X(x, y)$ son tales que:

$$dist\,(X, O) = 5 \rightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2} = 5 \rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

c) Son los puntos $X(x, y)$:

$$dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2) \rightarrow \frac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-2y+16|}{\sqrt{5}}$$

Se dan dos casos:

$$2x + y - 3 = x - 2y + 16 \rightarrow b_1\!: x + 3y - 19 = 0$$
$$2x + y - 3 = -(x - 2y + 16) \rightarrow b_2\!: 3x - y + 13 = 0$$

Sus vectores directores son:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1\!: (3, -1)\\ \vec{v}_2\!: (1, 3)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3, -1)\cdot(1, 3) = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{son perpendiculares}$$

Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} r_1\!: 2x + y - 3 = 0 \rightarrow y = -2x + 3\\ r_2\!: x - 2y + 16 = 0 \rightarrow y = \dfrac{x}{2} + 8\end{array}\right\} -2x + 3 = \frac{x}{2} + 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{5x}{2} = -5 \rightarrow x = -2 \rightarrow y = 7$$

Si el punto pertenece a ambas bisectrices es que se cortan en él:

$$b_1\!: x + 3y - 19 = 0 \rightarrow -2 + 3\cdot 7 - 19 = 0$$
$$b_2\!: 3x - y + 13 = 0 \rightarrow 3\cdot(-2) - 7 + 13 = 0$$

Se cortan en (–2, 7) y son perpendiculares.

2 ▶ ESTUDIO DE LA CIRCUNFERENCIA

Página 204

Hazlo tú

1 **Escribe la ecuación de la circunferencia de centro (–5, 2) y radio 3.**

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 9 \;\rightarrow\; x^2 + 10x + y^2 - 4y + 29 = 9 \;\rightarrow\; x^2 + 10x + y^2 - 4y + 20 = 0$

Página 205

Hazlo tú

2 **¿Qué ecuaciones corresponden a circunferencias? Obtén su centro y su radio utilizando la fórmula y completando cuadrados.**

a) $\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 8x = 0}$ **b)** $\mathbf{x^2 - y^2 + 7x - 2 = 0}$

c) $\mathbf{x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0}$ **d)** $\mathbf{x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0}$

e) $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0}$ **f)** $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0}$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$x^2 + y^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; A = -4$

$$r = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2} = 2 > 0$$

Es una circunferencia de centro (2, 0) y radio 2.

Completando cuadrados:

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \;\rightarrow\; (x-2)^2 + y^2 = 4$

Es una circunferencia de centro (2, 0) y radio 2.

b) No es una circunferencia ya que su término y^2 tiene signo negativo. No podríamos escribirlo en forma $(y-b)^2$.

c) $x^2 + y^2 - 3x + 4xy - 16 = 0$

Hay término en $xy \;\rightarrow$ No es circunferencia.

d) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 40 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$$r^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 40 = -14 < 0 \;\rightarrow\; \text{No es circunferencia.}$$

Completando cuadrados:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = -40 + 25 + 1 = -14 < 0$

No es circunferencia.

e) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r = \sqrt{9 + 16 - 25} = 0$

No es circunferencia.

Completando cuadrados:

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = -25 + 9 + 16 = 0$

No es circunferencia.

f) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$r = \sqrt{1+4-6} = \sqrt{-1}$

No es circunferencia.

Completando cuadrados:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -6 + 5 = -1$

No es circunferencia.

3 **Repite la actividad con $M(0, 6)$, $N(-2, 0)$ y $\overline{PM}/\overline{PN} = 3$.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\frac{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}} = 3 \to \sqrt{x^2+(y-6)^2} = 3\sqrt{(x+2)^2+y^2} \to x^2 + (y-6)^2 = 9[(x+2)^2 + y^2] \to$$

$$\to x^2 + y^2 - 12y + 36 = 9x^2 + 36x + 9y^2 + 36 \to 8x^2 + 8y^2 + 36x + 12y = 0 \to$$

$\to 2x^2 + 2y^2 + 9x + 3y = 0 \to$ Es una circunferencia de centro $(-9/4, -3/4)$ y radio $r = 3\sqrt{10}/4$.

Piensa y practica

1 **Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-5, 12)$ y radio 13.**

Comprueba que pasa por el punto $(0, 0)$.

$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 169 \to x^2 + y^2 + 10x - 24y = 0$

Si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación, esta se verifica. Por tanto, la circunferencia pasa por $(0, 0)$.

2 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancias a los extremos del segmento AB, $A(-3, 0)$ y $B(5, 0)$, es 50.**

$X = (x, y)$ punto del lugar geométrico.

$$\left(\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2 = 50 \to (x+3)^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 = 50 \to$$

$$\to 2x^2 + 2y^2 - 4x - 16 = 0 \to x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

Es una circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio $r = \sqrt{1+8} = 3$.

Página 206

Hazlo tú

1 **Halla la posición relativa de las rectas**

s_1: $y = x - 1$

s_2: $y = x + 1$

s_3: $y = 3$

respecto de la circunferencia anterior.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \to x = 4, y = 3;\ x = 0,\ y = -1$$

Hay dos soluciones, se cortan en dos puntos, luego son secantes.

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \to \text{No hay solución, luego son exteriores.}$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \to x = 4,\ y = 3$$

Hay una solución, se cortan en un punto, luego son tangentes.

Piensa y practica

3 **Estudia la posición relativa de la circunferencia**

$$\boldsymbol{C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0}$$

respecto de las rectas:

$\boldsymbol{s_1: 3x - 4y - 26 = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{s_2: 5x - 8y + 60 = 0}$

$\boldsymbol{s_3: 3x - 4y - 1 = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{s_4: x = 5}$

Halla los puntos de corte y de tangencia, si los hubiera.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_1: 3x - 4y - 26 = 0 \end{array}\right\} \to 3x = 4y + 26 \to x = \frac{4}{3}y + \frac{26}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{26}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \to$$

$$\frac{16}{9}y^2 + \frac{676}{9} + \frac{208}{9}y + y^2 - 8y - 52 - 4y - 12 = 0 \to$$

$$\to 16y^2 + 676 + 208y + 9y^2 - 72y - 468 - 36y - 108 = 0 \to$$

$$\to 25y^2 + 100y + 100 = 0 \to y^2 + 4y + 4 = 0 \to (y + 2)^2 = 0 \to$$

$$\to y = -2 \ \text{(solución única)}$$

$$x = \frac{4}{3}(-2) + \frac{26}{3} \to x = 6$$

C y s_1 son tangentes en el punto $(6, -2)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_2: 5x - 8y + 60 = 0 \end{array}\right\} \to 5x = 8y - 60 \to x = \frac{8}{5}y - 12$

$$\left(\frac{8}{5}y - 12\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{8}{5}y - 12\right) - 4y - 12 = 0 \to \frac{64}{25}y^2 + 144 - \frac{192}{5}y + y^2 - \frac{48}{5} + 72 - 4y - 12 = 0 \to$$

$$\to 64y^2 + 3\,600 - 960y + 25y^2 - 240 + 1\,800 - 100y - 300 = 0 \to$$

$$\to 89y^2 - 1\,060y + 4\,860 = 0 \to \text{No tiene solución.}$$

s_2 es exterior a la circunferencia C.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \\ s_3: 3x - 4y - 1 = 0 \end{array}\right\} \to 3x = 4y + 1 \to x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 - 6\left(\frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right) - 4y - 12 = 0 \to \frac{16}{9}y^2 + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}y + y^2 - 8y - 2 - 4y - 12 = 0 \to$$

$$\to 16y^2 + 1 + 8y + 9y^2 - 72y - 18 - 36y - 108 = 0 \to$$

$$\to 25y^2 - 100y - 125 = 0 \to y^2 - 4y - 5 = 0 \begin{cases} y_1 = 5 \to x_1 = 7 \\ y_2 = -1 \to x_2 = -1 \end{cases}$$

C y s_3 son secantes en los puntos $(7, 5)$ y $(-1, -1)$.

- $\left.\begin{array}{l} C: x^2+y^2-6x-4y-12=0 \\ s_4: x=5 \end{array}\right\} \to 25+y^2-30-4y-12=0 \to y^2-4y-17=0$

  $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4\cdot(-17)}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{84}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = 2 \pm \sqrt{21} \begin{cases} y_1 = 2+\sqrt{21} \\ y_2 = 2-\sqrt{21} \end{cases}$

  C y s_4 se cortan en los puntos $(5, 2+\sqrt{21})$ y $(5, 2-\sqrt{21})$.

4 **¿Para qué valores de b la recta $y = x + b$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$?**

La recta será tangente a la circunferencia si la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual al radio de la circunferencia.

C: $x^2 + y^2 = 9 \to O = (0, 0)$, $R = 3$

$r: y = x + b \to x - y + b = 0$

$dist\,(O, r) = \dfrac{|0-0+b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}} = 3 \to b = \pm 3\sqrt{2}$

5 **Halla la posición relativa de $C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ respecto de las rectas:**

$s_1: x + y = 10$ **$s_2: 4x + 3y + 20 = 0$**

$s_3: 3x - 4y = 0$ **$s_4: y = -2$**

$C: x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \to O = (3, -4)$, $r = 5$

- $dist\,(O, s_1) = \dfrac{|3-4-10|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{11}{\sqrt{2}} \approx 7{,}78 > 5 \to s_1$ es exterior a C.
- $dist\,(O, s_2) = \dfrac{|4\cdot 3+3(-4)+20|}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{20}{5} = 4 < 5 \to s_2$ y C se cortan en dos puntos.
- $dist\,(O, s_3) = \dfrac{|3\cdot 3-4(-4)|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{25}{5} = 5 \to s_3$ y C son tangentes.
- $dist\,(O, s_4) = \dfrac{|-4+2|}{\sqrt{0+1}} = \dfrac{2}{1} = 2 < 5 \to s_4$ y C se cortan en dos puntos.

Página 207

6 **Halla la potencia de $P(-3, 8)$ a estas circunferencias:**

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0$

$C_2: O(4, -3)$, $r = 20$

Di si P es interior o exterior a C_1 y a C_2.

$C_1: x^2 + y^2 - 14x + 20 = 0 \to O_1 = (7, 0)$, $r_1 = \sqrt{49-20} = \sqrt{29}$

C_2: $O(4, -3)$, $r = 20$

$P(-3, 8)$

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = (7 + 3)^2 + (0 - 8)^2 - (\sqrt{29})^2 = 100 + 64 - 29 = 135 > 0 \to P$ es exterior a C_1.

$\mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = (4 + 3)^2 + (-3 - 8)^2 - (20)^2 = 49 + 121 - 400 = -230 < 0 \to P$ es interior a C_2.

7 **Halla el eje radical de estas circunferencias:**

$$\boldsymbol{C_1: x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0}$$

$$\boldsymbol{C_2: x^2 + y^2 - 6y = 0}$$

Comprueba que es perpendicular a la línea de sus centros.

Calculamos las potencias de un punto genérico $P(x, y)$ a C_1 y a C_2:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}(P \text{ a } C_1) = x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = 0 \\ \mathcal{P}(P \text{ a } C_2) = x^2 + y^2 - 6y = 0 \end{array}\right\} \text{ Igualamos ambas expresiones:}$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 11 = x^2 + y^2 - 6y \rightarrow -4x + 18y - 11 = 0$$

Ecuación del eje radical: $4x - 18y + 11 = 0 \rightarrow m = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Centro de } C_1 \rightarrow O_1 = (2, -6) \\ \text{Centro de } C_2 \rightarrow O_2 = (0, 3) \end{array}\right\} \overrightarrow{O_1 O_2} = (-2, 9) \rightarrow$$

$\rightarrow$ La pendiente de la recta que une O_1 y O_2 es $m' = -\dfrac{9}{2}$.

Como $m \cdot m' = \left(\dfrac{2}{9}\right) \cdot \left(-\dfrac{9}{2}\right) = -1$, el eje radical y la recta que une O_1 y O_2 son perpendiculares.

3 ▸ LAS CÓNICAS COMO LUGARES GEOMÉTRICOS

Página 209

Hazlo tú

1 **Dados los puntos $F_1(-3, 0)$ y $F_2(1, -2)$ y la recta $r: x + 2y - 5 = 0$, obtén las ecuaciones de:**

a) La elipse de focos F_1 y F_2 y constante 20.

b) La hipérbola de focos F_1 y F_2 y constante 2.

c) La parábola cuyo foco es F_1 y cuya directriz es r.

a) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 20$

b) $\left|\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}\right| = 2$

c) $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{1+4}}$

Piensa y practica

1 **Halla la ecuación de la elipse de focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$ y cuya constante es 10.**

Una vez puesta la ecuación inicial, pasa una raíz al segundo miembro, eleva al cuadrado (¡atención con el doble producto!), simplifica, aísla la raíz, vuelve a elevar al cuadrado y simplifica hasta llegar a la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F_1) + dist\,(P, F_2) = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10$

$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado: $(x-4)^2 + y^2 = 100 + (x+4)^2 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

Operamos: $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 100 + x^2 + 8x + 16 + y^2 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

$20\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 16x + 100$

$5\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 4x + 25$

Elevamos al cuadrado: $25(x^2 + 8x + 16 + y^2) = 16x^2 + 200x + 625$

Simplificamos:

$25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 = 16x^2 + 200x + 625 \rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$

2 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos $F_1(5, 0)$ y $F_2(-5, 0)$ y cuya constante es 6. Simplifica como en el ejercicio anterior hasta llegar a la expresión $16x^2 - 9y^2 = 144$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, entonces:

$|dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2)| = 6$

$dist\,(P, F_1) - dist\,(P, F_2) = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = \pm 6$

$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \pm 6 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

Elevamos al cuadrado:

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + x^2 + 10x + 25 + y^2 \pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$

$\pm 12\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 20x + 36$

$\pm 3\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 9$

Elevamos al cuadrado: $9(x^2 + 10x + 25 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81$

$9x^2 + 90x + 225 + 9y^2 = 25x^2 + 90x + 81$

$16x^2 - 9y^2 = 144$

3 **Halla la ecuación de la parábola de foco $F(-1, 0)$ y directriz r: $x = 1$. Simplifica hasta llegar a la expresión $y^2 = -4x$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$dist\ (P, F) = dist\ (P, r)$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x - 1|$

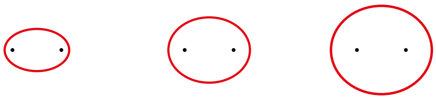
Elevamos al cuadrado: $x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 2x + 1$

Simplificamos: $y^2 = -4x$

4 ESTUDIO DE LA ELIPSE

Página 210

1 ¿Verdadero o falso? Si varias elipses tienen la misma distancia focal, cuanto más grande sea la constante $k = 2a$, mayor es la excentricidad.



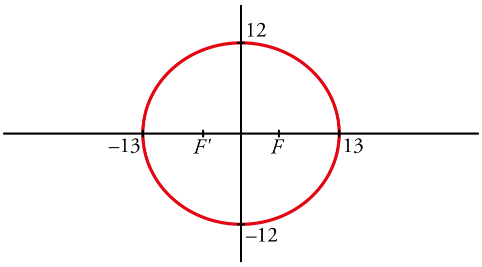
Falso. Al contrario; como $e = \frac{c}{a}$, si el numerador c es constante, cuanto mayor sea el denominador a, menor será el cociente, que es la excentricidad.

Página 211

2 Una elipse tiene sus focos en los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y su constante es $k = 26$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida. Represéntala.

- Semieje mayor: $k = 26 \to 2a = 26 \to a = 13$
- Semidistancia focal: $\overline{FF'} = 10 \to 2c = 10 \to c = 5$
- Semieje menor: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$
- Excentricidad: $\frac{c}{a} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \to exc \approx 0,38$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$



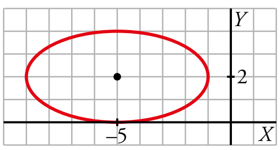
Página 212

3 Representa y halla la excentricidad y los focos.

a) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ **b)** $9x^2 + 16y^2 = 144$

c) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$ **d)** $x^2 + 4(y-3)^2 = 4$

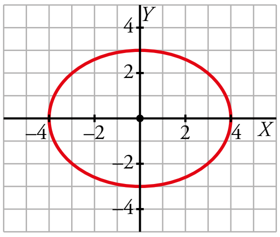
a)



$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

$exc = \frac{\sqrt{12}}{4} \approx 0,87$

$\alpha = -5;\ \beta = 2;\ F_1 = \left(-5 + 2\sqrt{3}, 2\right);\ F_2 = \left(-5 - 2\sqrt{3}, 2\right)$

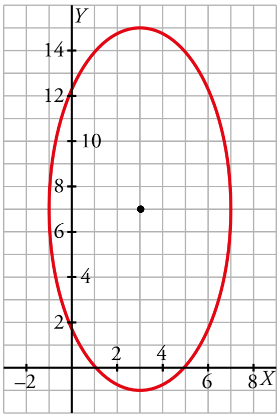
b) 

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} + \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 = a^2,\ 9 = b^2 \rightarrow c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$$

$$exc = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

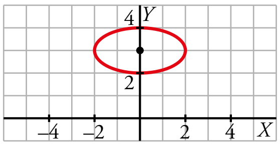
$F_1 = \left(\sqrt{7}, 0\right);\ F_2 = \left(-\sqrt{7}, 0\right)$

c) 

$$c = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$$

$$exc = \frac{\sqrt{48}}{8} \approx 0,87$$

$\alpha = 3;\ \beta = 7;\ F_1 = \left(3, 7 + 4\sqrt{3}\right);\ F_2 = \left(3, 7 - 4\sqrt{3}\right)$

d) 

$$x^2 + 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + (y-3)^2 = 1 \rightarrow 4 = a^2,\ 1 = b^2$$

$$a = 2,\ b = 1;\ c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$$

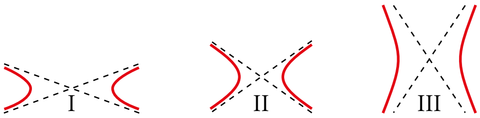
$$exc = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = 0;\ \beta = 3;\ F_1 = \left(\sqrt{3}, 3\right);\ F_2 = \left(-\sqrt{3}, 3\right)$

5 ▸ ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA

Página 214

1 **¿Verdadero o falso?**



a) La hipérbola III es la más excéntrica.

b) La hipérbola I es la menos excéntrica.

a) Verdadero, porque el valor absoluto de la pendiente de las asíntotas, $m = \left|\frac{b}{a}\right|$, es muy grande, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, será más grande, puesto que $c > b$.

b) Verdadero, porque las asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ tienen poca pendiente en valor absoluto, luego la excentricidad, $e = \frac{c}{a} < \left|\frac{b}{a}\right|$, será más pequeña.

2 **Una hipérbola tiene sus focos en los puntos:**

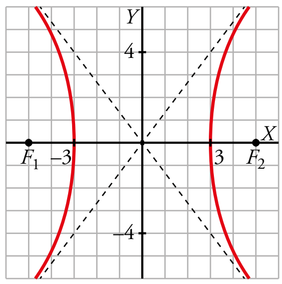
$$F_1(5, 0) \quad \text{y} \quad F_2(-5, 0)$$

y su constante es $k = 6$.

Halla sus elementos característicos y su ecuación reducida.

Represéntala.

- Semieje: $k = 2a = 6 \rightarrow a = 3$
- Semidistancia focal: $\overline{F_1F_2} = 10 \rightarrow c = 5$
- Cálculo de b: $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \rightarrow b = 4$
- Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
- Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$; $y = -\frac{4}{3}x$
- Ecuación reducida: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



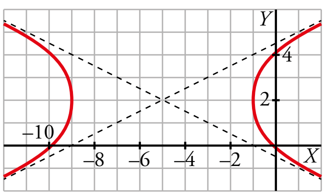
Página 215

3 **Representa.**

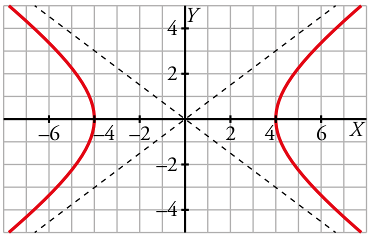
a) $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ **b)** $9x^2 - 16y^2 = 144$

c) $\frac{(y-7)^2}{64} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ **d)** $x^2 - 4(y-3)^2 = 4$

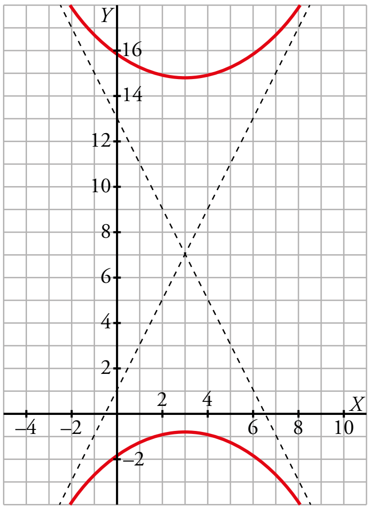
a)



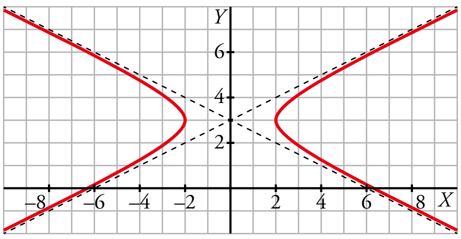
b) $9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$



c)



d) $x^2 - 4(y-3)^2 = 4 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-3)^2}{1} = 1$



Página 216

4 **Calcula la distancia focal y las coordenadas de los focos de las siguientes hipérbolas equiláteras:**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = -\dfrac{2}{x}$ **c)** $y = \dfrac{18}{x}$ **d)** $xy = \dfrac{1}{4}$

a) $k = 1$; $F_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $F_2 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

distancia focal $= 2\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 4$

b) $k = -2$ tiene los focos en el segundo y cuarto cuadrantes.

$F_1 = (-2, 2)$; $F_2 = (2, -2)$

distancia focal $= 2\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

c) $k = 18$

$F_1 = (6, 6)$; $F_2 = (-6, -6)$

distancia focal $= 2\sqrt{72} = 12\sqrt{2}$

d) $k = \dfrac{1}{4}$

$F_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $F_2 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

distancia focal $= 2\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 2$

5 **Dadas las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior, escribe la ecuación que describe cada una de las gráficas giradas 45° con respecto al origen de coordenadas.**

a) $-\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

c) $-\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

d) $-\dfrac{x^2}{1/2} + \dfrac{y^2}{1/2} = 1$

6 ESTUDIO DE LA PARÁBOLA

Página 217

1 **Halla la ecuación reducida de la parábola de foco $F(1,5; 0)$ y directriz $x = -1,5$.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola: $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, donde d es la directriz y F el foco.

$$\sqrt{(x-1,5)^2 + y^2} = |x + 1,5|$$

$$x^2 - 3x + 2,25 + y^2 = x^2 + 3x + 2,25 \rightarrow y^2 = 6x$$

- De otra forma:

  Distancia del foco a la directriz: $p = 3$

  Ecuación reducida: $y^2 = 6x$

2 **Halla la ecuación reducida de una parábola como la del ejercicio 1 pero con el vértice en $(-2, 3)$.**

Del ejercicio anterior sabemos que $p = 3$ y si el vértice es $V(0, 0) \rightarrow y^2 = 6x$

Con vértice $V(-2, 3) : (y - 3)^2 = 6(x + 2)$

Página 218

3 **Halla las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas:**

a) $y = 4x^2$ **b)** $y = \frac{1}{2}x^2$ **c)** $y = -\frac{1}{8}x^2$ **d)** $y = -0,1x^2$

a) $k = 4$

$F\left(0, \frac{1}{16}\right)$

$d\colon y = -\frac{1}{16}$

b) $k = \frac{1}{2}$

$F\left(0, \dfrac{\frac{1}{4}}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$d\colon y = -\frac{1}{2}$

c) $k = \frac{-1}{8}$

$F(0, -2)$

$d\colon y = 2$

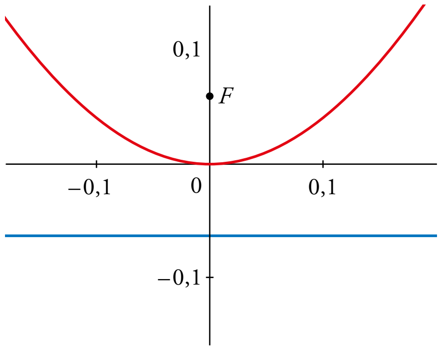
d) $k = -0,1$

$F\left(0, \frac{1}{-0,4}\right) = \left(0, \frac{-5}{2}\right)$

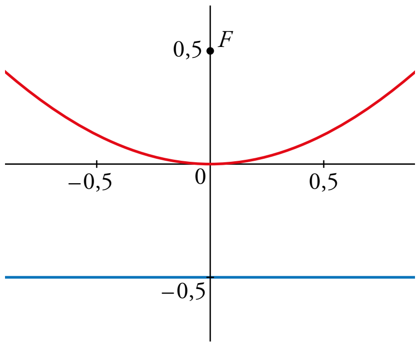
$d\colon y = \frac{1}{0,4} = 2,5$

4 **Dibuja las parábolas del ejercicio anterior y sus elementos.**

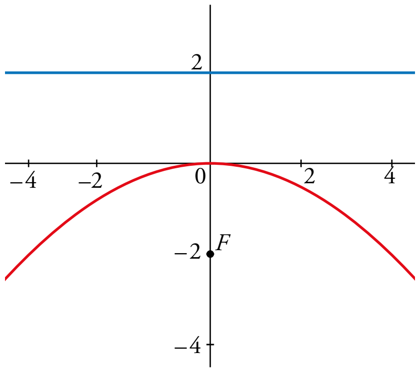
a)



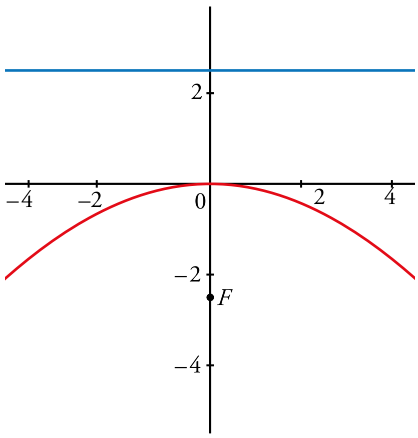
b)



c)



d)



5 Calcula el foco y la directriz de esta parábola:

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{10}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{10}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{x^2}{10} - \frac{2x}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] = -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 2\right] \rightarrow (y-2)(-1) = \left(\frac{x}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{10}}\left(x - \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{10}(x-5)^2 \rightarrow -10(y-2) = (x-5)^2$$

$p = -5;\ b = 2;\ a = 5$

$V(5, 2);\ F = (5, 2) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(5, 2 - \frac{5}{2}\right) = \left(5, -\frac{1}{2}\right);\ d\colon y = V_y - \frac{p}{2} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 220

Hazlo tú

1. Determinación de una circunferencia conocidos tres puntos por los que pasa

- **Obtén el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(-1, 3)$, $Q(2, -2)$ y $R(3, 0)$.**

– r: mediatriz de PQ

$\overrightarrow{PQ} = (2, -2) - (-1, 3) = (3, -5)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d}_r = (5, 3)$ y pasa por $M_{PQ} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \dfrac{x - \frac{1}{2}}{5} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{3} \to$

$\to 3x - \frac{3}{2} = 5y - \frac{5}{2} \to r: 3x - 5y = -1$

– s: mediatriz de QR

$\overrightarrow{QR} = (3, 0) - (2, -2) = (1, 2)$

s: tiene vector de dirección $\vec{d}_s = (2, -1)$ y pasa por $M_{QR} = \left(\frac{5}{2}, -1\right) \to \dfrac{x - \frac{5}{2}}{2} = \dfrac{y+1}{-1} \to$

$\to -x + \frac{5}{2} = 2y + 2 \to s: 2x + 4y - 1 = 0$

Centro: $\begin{cases} r: 3x - 5y = -1 \\ s: 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases} \to C = \left(\frac{1}{22}, \frac{5}{22}\right)$

Radio $= |\overrightarrow{RC}| = \sqrt{\left(\frac{1}{22} - 3\right)^2 + \left(\frac{5}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\,250}{484}} = \frac{5\sqrt{85}}{11\sqrt{2}} \cong 2,96$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x - \frac{1}{22}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{22}\right)^2 = \frac{2125}{242}$

2. Circunferencia que pasa por un punto y cuyo centro está sobre una determinada recta

- **Obtén la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{40}$ que pasa por $P(2, 11)$ y cuyo centro pertenece a la recta de ecuación $x - 3y + 11 = 0$.**

El centro será $C(3b - 11, b)$ por pertenecer a la recta indicada.

Como P pertenece a la circunferencia: $dist(P, C) = r$.

Desarrollamos:

$|(3b - 11 - 2, b - 11)| = \sqrt{9b^2 - 78b + 169 + b^2 - 22b + 121} = \sqrt{40} \to 10 - 100b + 290 = 40 \to b = 5$

$C(4, 5)$ y la circunferencia es $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 40$.

En este caso existe una única solución porque la distancia del punto P a la recta dada es exactamente $\sqrt{40}$.

Página 221

Hazlo tú

3. Descripción de una cónica a partir de su ecuación

- **Describe las siguientes cónicas, obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $x^2 - 2y + 2 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^2 + 9y^2 - 2x - 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

a) $x^2 - 2y + 2 = 0 \to$ Parábola con eje vertical.

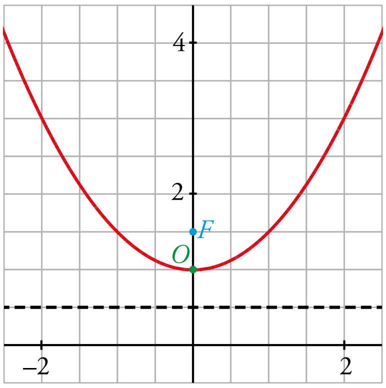
$(x - x_0)^2 = 2p\,(y - y_0)$

$x^2 = 2y - 2 = 2(y - 1) \to p = 1$

Vértice: $V = (0, 1)$

Foco: $F = \left(0, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = 1 - \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2}$



b) $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$

Es una hipérbola porque los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Completamos cuadrados:

$$(x^2 - 2x + 1) - 4y^2 - 3 - 1 = 0 \to (x - 1)^2 - 4y^2 = 4 \to \frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1$$

Centro: $O = (1, 0)$. Focos en el eje X.

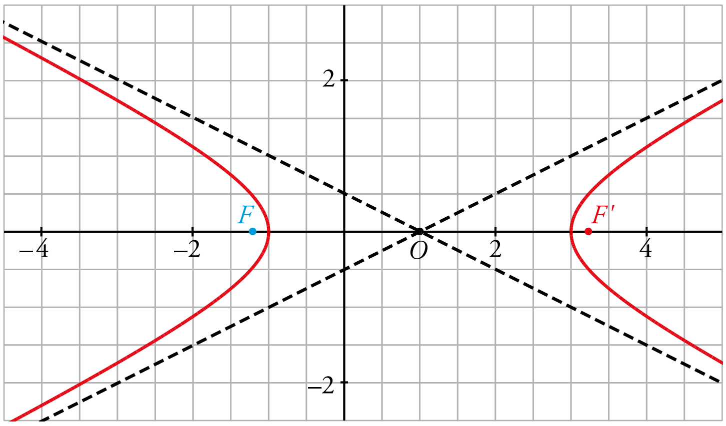
Semiejes: $a = 2$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{5}$

Excentricidad: $exc = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1)$

Focos: $\left(1 - \sqrt{5}, 0\right)$ y $\left(1 + \sqrt{5}, 0\right)$



c) $x^2 + 9y^2 = 2x + 8 = 0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos, pero del mismo signo; es una elipse.

Completamos cuadrados:

$(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 - 8 - 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + 9y^2 = 9 \rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + y^2 = 1$

Es una elipse de centro $O(1, 0)$ y eje mayor paralelo al eje X.

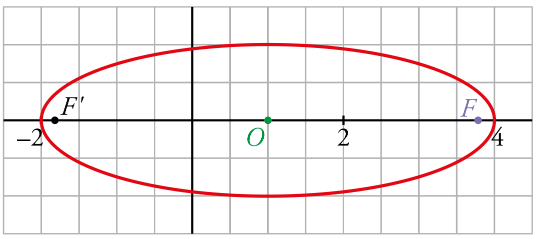
Semiejes: $a = 3$, $b = 1$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{8}$

Excentricidad: $exc = \dfrac{\sqrt{8}}{3}$

Constante de la elipse: $k = 2a = 6$

Focos: $\left(1 + 2\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(1 - 2\sqrt{2}, 0\right)$



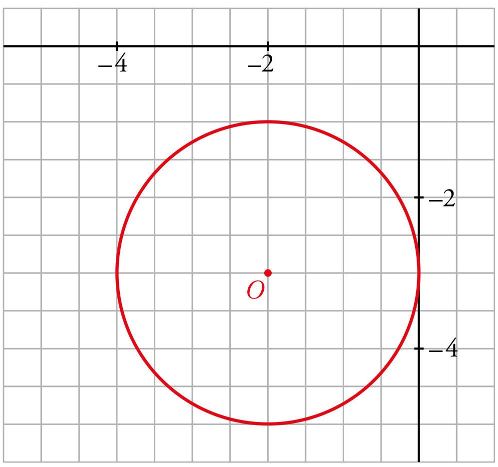
d) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$

Se trata de una circunferencia porque los coeficientes de x^2 e y^2 son 1 y no hay término en xy.

Completamos cuadrados:

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 9 - 4 - 9 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

Circunferencia de centro $O(-2, -3)$ y radio $r = 2$.



Página 222

Hazlo tú

4. Ecuación de una elipse no centrada en el origen

- **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(3, -2)$ y $F'(3, 6)$ y cuya excentricidad es $exc = \frac{4}{5}$.**

$O = M_{FF'} = (3, 2)$

$dist\,(F', F) = 8 = 2c \to c = 4$

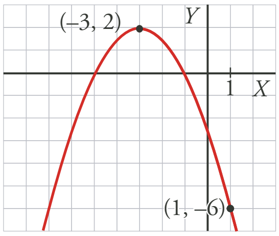
$e = \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \to a = 5$

$b = \sqrt{25 - 16} = 3$

Se trata de una elipse con eje vertical, por lo que la ecuación requerida es: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

6. Elementos de una parábola de eje vertical a partir de su representación gráfica

- **Calcula el foco y la directriz de esta parábola:**



$V(-3, 2)$

$P(1, -6)$

Buscamos una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La abscisa del vértice de la parábola es: } Vx = -3 = -\dfrac{b}{2a} \to 6a - b = 0 \ \ (1) \\ P \in \text{parábola} \to -6 = a + b + c \ \ (2) \\ V \in \text{parábola} \to 2 = 9a - 3b + c \ \ (3)\end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3):

$$a = -\frac{1}{2};\ b = -3;\ c = -\frac{5}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$$

Sabemos que $a = \frac{1}{2p} \to p = -1$

Si tuviera $V(0, 0)$:

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \text{ y } d\text{: } y = -\frac{p}{2} \to F\left(0, \frac{-1}{2}\right) \text{ y } d\text{: } y = \frac{1}{2}$$

Pero $V(-3, 2)$:

$$F(-3, 2) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$$

$$d\text{: } y = V_y - \frac{p}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Página 223

Hazlo tú

7. Centro radical de tres circunferencias

- **Halla el centro radical de estas tres circunferencias:**

  C_1: $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 14 = 0$

  C_2: $x^2 + y^2 - 10y - 8y + 37 = 0$

  C_3: $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$

  Buscamos el eje radical entre C_1 y C_2:

  $$x^2 + y^2 - 6x + 6y - 14 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 \rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{17}{8}$$

  Buscamos el eje radical entre C_3 y C_2:

  $$x^2 + y^2 - 8x + 7 = x^2 + y^2 - 10y - 8y + 37 \rightarrow y = \frac{4x}{9} + \frac{5}{3}$$

  Buscamos ahora el punto de corte entre los dos ejes radicales:

  $$\begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{17}{8} \\ y = \dfrac{4x}{9} + \dfrac{5}{3} \end{cases} \rightarrow x = \frac{33}{14} \rightarrow y = \frac{19}{7} \rightarrow R\left(\frac{33}{14}, \frac{19}{7}\right)$$

8. Ecuación de una parábola con vértice distinto de (0, 0) dados el foco y la directriz

- **Halla la ecuación de la parábola de eje horizontal cuyo foco es $F(4, -3)$ y cuya directriz es $x = 2$.**

  Calculamos la distancia del foco a la directriz, $p = 4 - 2 = 2$.

  $$V\left(\frac{4+2}{2}, -3\right) = (3, -3)$$

  $$(y+3)^2 = 4(x-3)$$

9. Cálculo de la recta tangente a una parábola en un punto

- **Resuelve este ejercicio para la parábola $y^2 = -4x$ y el punto $A(-4, 4)$.**

  Haz de rectas que pasan por $A = (-4, 4)$:

  $y = m(x + 4) + 4$, $m \in \mathbb{R}$, más la recta vertical $x = -4$

  $y^2 = -4x$

  $$\begin{cases} y = m(x+4) + 4 \\ y^2 = -4x \end{cases} \rightarrow y = m\left(\frac{y^2}{-4} + 4\right) + 4 \rightarrow 4y = -my^2 + 16m + 16$$

  $my^2 + 4y - 16m - 16 = 0$

  Si las rectas son tangentes a la parábola, el discriminante de esta ecuación tiene que ser 0.

  $$\Delta = 16 - 4 \cdot m \cdot (-16m - 16) = 0 \rightarrow (2m-1)^2 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

  La recta tangente es:

  $$y = -\frac{1}{2}(x + 4) + 4$$

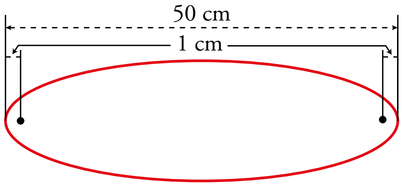
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 224

Hazlo tú

1. Cálculo de los elementos de una elipse

- **Calcular la distancia focal, el semieje menor y la excentricidad de esta elipse:**



distancia focal = 50 – 2 = 48 $\to$ $c = 24$

a = semieje mayor = $\frac{52}{2} = 26$

semieje menor = b: $a^2 = b^2 + c^2 \to b = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{100} = 10$

excentricidad $= \frac{c}{a} = \frac{24}{26} = 0,92$

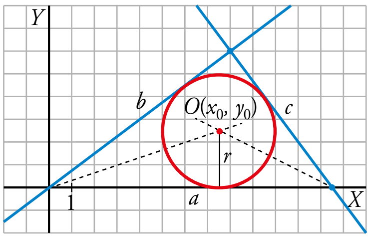
2. Circunferencia inscrita en un triángulo

- **Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados *a*, *b* y *c*, siendo:**

a: $y = 0$

b: $3x - 4y = 0$

c: $4x + 3y - 50 = 0$



- $dist\,(P, a) = dist\,(P, b) \to \left|\frac{y}{1}\right| = \left|\frac{3x - 4y}{5}\right|$

$5y = 3x - 4y$

$-5y = 3x - 4y \to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente positiva.

- $dist\,(P, a) = dist\,(P, c) \to \left|\frac{y}{1}\right| = \left|\frac{4x + 3y - 50}{5}\right|$

$5y = 4x + 3y - 50 \to$ No vale porque la bisectriz del ángulo tiene pendiente negativa.

$-5y = 4x + 3y - 50$

- Incentro:

$$\begin{cases} 5y = 3x - 4y \\ -5y = 4x + 3y - 50 \end{cases} \to x = \frac{15}{2},\ y = \frac{5}{2} \to O = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- $r = dist\,(O, a) = \left|\frac{\frac{5}{2}}{1}\right| = \frac{5}{2}$

- Ecuación de la circunferencia inscrita:

$$\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2-15x+y^2-5y+\frac{125}{2}=\frac{25}{4} \to 4x^2+4y^2-60x-20y+225=0$$

3. Rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto

- **Sean r y s, respectivamente, las rectas tangente y normal a una circunferencia en un punto P.**

$$\boldsymbol{r: x+y-7=0 \qquad s: x-y-9=0}$$

Calcular la ecuación de la circunferencia sabiendo que su radio es $r=2\sqrt{2}$.

Punto de tangencia:

$$\begin{cases} x+y-7=0 \\ x-y-9=0 \end{cases} \to x=8,\ y=-1 \to P=(8,-1)$$

Centro de la circunferencia:

$$\begin{cases} x-y-9=0 \\ \sqrt{(8-x)^2+(-1-y)^2}=2\sqrt{2} \end{cases} \to \begin{cases} x-y-9=0 \\ (8-x)^2+(-1-y)^2=8 \end{cases} \to \left.\begin{cases} x-y-9=0 \\ x^2-16x+y^2+2y+65=8 \end{cases}\right\} \begin{matrix}\to \\ \to\end{matrix}$$

$$\to x=9+y$$
$$\to (9+y)^2-16(9+y)+y^2+2y+65=8 \to y=1,\ y=-3$$

$$\begin{cases} y=1 \to x=10 \\ y=-3 \to x=6 \end{cases} \to \begin{cases} O=(10,1) \\ O=(6,-3) \end{cases}$$

Hay dos circunferencias:

$$(x-10)^2+(y-1)^2=8$$
$$(x-6)^2+(y+3)^2=8$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 225

Para practicar

Lugares geométricos

1 Halla, en cada caso, la mediatriz del segmento AB.

a) $A(5, -1)$ $B(-3, 1)$ b) $A(3, 6)$ $B(-1, 6)$

Comprueba que es una recta perpendicular a AB.

$X = (x, y)$ punto genérico de la mediatriz.

a) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(5-x)^2+(-1-y)^2} = \sqrt{(-3-x)^2+(1-y)^2} \rightarrow x^2 - 10x + y^2 + 2y + 26 = x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10$$

Mediatriz: $-16x + 4y + 16 = 0 \rightarrow \vec{d} = (-4, -16)$

$\overrightarrow{AB} = (-8, 2)$

$(-8, 2) \bullet (-4, -16) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

b) $dist\,(X, A) = dist\,(X, B)$

$$\sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2} = \sqrt{(-1-x)^2+(6-y)^2} \rightarrow x^2 - 6x + y^2 - 12y + 45 = x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37$$

Mediatriz: $-8x + 8 = 0 \rightarrow \vec{d} = (0, 8)$

$\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

$(0, 8) \bullet (-4, 0) = 0$, luego las rectas son perpendiculares.

2 Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya diferencia de cuadrados de distancias a los puntos $A(0, 0)$ y $B(6, 3)$ es 15. ¿Qué figura obtienes?

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$|x^2 + y^2 - ((6-x)^2 + (3-y)^2)| = 15$

$|12x + 6y - 45| = 15$

$$\begin{cases} 12x + 6y - 45 = 15 \\ 12x + 6y - 45 = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12x + 6y - 60 = 0 \\ 12x + 6y - 30 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas.

3 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $4x - 3y + 11 = 0$ es 6.

$$P(x, y) \text{ cumple que } dist\,(P, r) = 6 \rightarrow \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16+9}} = 6 \rightarrow |4x - 3y + 11| = 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 11 = 30 \\ 4x - 3y + 11 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1\!: 4x - 3y - 19 = 0 \\ r_2\!: 4x - 3y + 41 = 0 \end{cases}$$

Son dos rectas paralelas entre sí y paralelas, a su vez, a la recta dada.

4 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas *r* y *s*. Interpreta el resultado.**

$$\boldsymbol{r: 3x - 5y + 11 = 0 \qquad s: 3x - 5y + 3 = 0}$$

$P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s) \to \dfrac{|3x - 5y + 11|}{\sqrt{34}} = \dfrac{|3x - 5y + 3|}{\sqrt{34}} \to$

$$\to \begin{cases} 3x - 5y + 11 = 3x - 5y + 3 \to 11 = 3 \text{ ¡¡Imposible!!} \\ 3x - 5y + 11 = -3x + 5y - 3 \to 6x - 10y + 14 = 0 \to r: 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Es una recta paralela a las dos rectas dadas que, a su vez, son paralelas entre sí, como puede verse por sus coeficientes, pues:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = 1 \neq \frac{C}{C'} = \frac{11}{3}$$

5 **Halla las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas *r* y *s*:**

$$\boldsymbol{r: 4x - 3y + 8 = 0 \qquad s: 12x + 5y - 7 = 0}$$

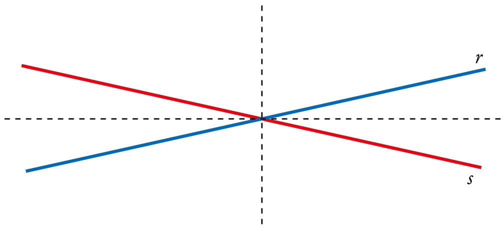
Son todos los puntos $P(x, y)$ tales que $d(P, r) = d(P, s)$:

$$\frac{|4x - 3y + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|12x + 5y - 7|}{\sqrt{169}} = \frac{|4x - 3y + 8|}{5} = \frac{|12x + 5y - 7|}{13} \to \begin{cases} 13(4x - 3y + 8) = 5(12x + 5y - 7) \\ 13(4x - 3y + 8) = -5(12x + 5y - 7) \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} 52x - 39y + 104 = 60x + 25y - 35 \\ 52x - 39y + 104 = -60x - 25y + 35 \end{cases} \to \begin{cases} 8x + 64y - 139 = 0 \\ 112x - 14y + 69 = 0 \end{cases}$$

Luego hay dos soluciones, bisectrices de los ángulos cóncavo y convexo que forman las rectas *r* y *s*.

Ambas bisectrices se cortan en el punto de corte de las rectas *r* y *s*, y son perpendiculares.



6 **Calcula el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a $P(1, 0)$ sea la mitad de la distancia a la recta $x = 4$. ¿Qué figura obtienes?**

Buscamos los puntos $P'(x, y)$ tales que:

$$2dist(P, P') = dist(P', x = 4) \quad (*)$$

$$dist(P, P') = |\overrightarrow{PP'}| = |(x - 1, y)| = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$$

$$dist(P', x = 4) = \frac{|x + 0 - 4|}{\sqrt{1 + 0}} = |x - 4|$$

Volviendo a (*):

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = |x - 4|$$

Elevamos al cuadrado:

$$4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = (x - 4)^2 \to 3x^2 + 4y^2 = 12$$

La solución es una elipse con eje horizontal.

Circunferencias

7 **Halla, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto A es d.**

a) $A(0, 5)$ **y** $d = 2$

b) $A(0, 0)$ **y** $d = 1$

c) $A(-2, 0)$ **y** $d = \frac{1}{2}$

d) $A(-1, -5)$ **y** $d = \frac{3}{5}$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

a) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 2 \to x^2 + (y-5)^2 = 4 \to$ Circunferencia de centro $A = (0, 5)$ y radio $d = 2$.

b) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1 \to$ Circunferencia de centro $A = (0, 0)$ y radio $d = 1$.

c) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \frac{1}{2} \to (x+2)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \to$ Circunferencia de centro $A = (-2, 0)$ y radio $d = \frac{1}{2}$.

d) $dist\,(X, A) = d$

$\sqrt{(x+1) + (y+5)^2} = \frac{3}{5} \to (x+1)^2 + (y+5)^2 = \frac{9}{25} \to$ Circunferencia de centro $A = (-1, -5)$ y radio $d = \frac{3}{5}$.

8 **Halla el lugar geométrico de los puntos cuyo cociente de distancias a los puntos $A(0, 6)$ y $B(0, 3)$ es 2, es decir:**

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, B)} = 2$$

$X = (x, y)$ punto genérico del lugar geométrico.

$$\frac{dist\,(P, A)}{dist\,(P, B)} = \frac{\sqrt{x^2 + (y-6)^2}}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}} = 2$$

$x^2 + (y-6)^2 = 4[x^2 + (y-3)^2]$

$x^2 + y^2 - 12y + 36 = 4x^2 + 4y^2 - 24y + 36$

$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$

$x^2 + y^2 - 4y = 0$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$

$x^2 + (y-2)^2 = 4$

Es una circunferencia con centro en $(0, 2)$ y radio 2.

9 **Da, en cada caso, la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r.**

a) $C(0, 0)$ **y** $r = 1$

b) $C(2, -3)$ **y** $r = 2$

c) $C(-1, 0)$ **y** $r = \frac{2}{3}$

d) $C(0, 3)$ **y** $r = \frac{5}{4}$

$X = (x, y)$ punto genérico.

a) $dist\,(X, C) = 1$

$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1$

b) $dist\,(X, C) = 2$

$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = 2 \to (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$

c) $dist\ (X, C) = \frac{2}{3}$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \frac{2}{3} \rightarrow (x+1)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

d) $dist\ (X, C) = \frac{5}{4}$

$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \frac{5}{4} \rightarrow x^2 + (y-3)^2 = \frac{25}{16}$

10 **Averigua cuáles de las siguientes expresiones corresponden a circunferencias y, en ellas, halla su centro y su radio:**

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 10 = 0$ **b)** $x^2 - y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 + xy - x + 4y - 8 = 0$ **d)** $2x^2 + 2y^2 - 16x + 24 = 0$

a) Los coeficientes de x^2 e y^2 son 1. No hay término en xy.

$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 1 - 10 = 7 > 0$

Es una circunferencia de centro (4, –1) y radio $\sqrt{7}$.

b) El coeficiente de y^2 es negativo. No es una circunferencia.

c) Hay un término xy. No es una circunferencia.

d) Los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y no tienen término en xy. Dividimos entre 2 la igualdad: $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.

$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C = 16 + 0 - 12 = 4 > 0$

Es una circunferencia de centro (4, 0) y radio $\sqrt{4} = 2$.

11 **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene centro en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$.**

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, C) = r$

$r = dist\ (P, Q)$

$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{13}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow 36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y + 4 = 0 \rightarrow 9x^2 - 9x + 9y^2 + 6y + 1 = 0$

12 **Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $C(0, -5)$ y cuyo diámetro es igual a 10.**

$X = (x, y)$ punto genérico.

$dist\ (X, C) = r$

$r = 5$

$\sqrt{(x)^2 + (y+5)^2} = 5 \rightarrow x^2 + (y + 5)^2 = 25$

13 **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1, -2)$ y por $B(2, -1)$ y tiene radio 1.**

El centro de la circunferencia está en la mediatriz de AB y *dist* $(O, A) = 1$.

Mediatriz:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1)$; $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

m: $\frac{x-\frac{3}{2}}{-1} = \frac{y+\frac{3}{2}}{1} \rightarrow 2x - 3 = -2y - 3 \rightarrow x = -y$

dist $(O, A) = 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} = 1$

O es solución de:

$$\begin{cases} x = -y \\ (x-1)^2+(y+2)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1,\ y = -1;\ x = 2,\ y = -2$$

Hay dos circunferencias que verifican las condiciones:

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ y $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$

14 **Uno de los diámetros de una circunferencia tiene por extremos $A(3, -2)$ y $B(7, 0)$. Halla la ecuación de la circunferencia.**

El centro es: $M_{AB} = (5, -1)$

$r = dist\ (O, A) = \sqrt{(5-3)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{5}$

Ecuación: $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$

15 **Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(2, -4)$, $B(8, -10)$ y $C(4, -8)$.**

* ***Mira el ejercicio resuelto 1.***

r: mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (8, -10) - (2, -4) = (6, -6) = 6(1, -1)$

r: tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (5, -7)$

r: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{1} \rightarrow x - y - 12 = 0$

s: mediatriz de AC

$\overrightarrow{AC} = (4, -8) - (2, -4) = (2, -4) = -2(-1, 2)$

s: tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, 1)$ y pasa por $M_{AC} = (3, -6)$

s: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{1} \rightarrow x - 2y - 15 = 0$

Centro $\rightarrow \begin{cases} x - y - 12 = 0 \\ x - 2y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 9,\ y = -3 \rightarrow C = (9, -3)$

Radio $= |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(2-9)^2+(-4+3)^2} = 5\sqrt{2}$

La ecuación de la circunferencia es $(x-9)^2 + (y+3)^2 = 50$

16 **Da la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $(2, -5)$ y es tangente al eje de abscisas.**

$r = dist\ (O, \text{eje } OX) = 5$

La ecuación de la circunferencia es $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25$.

17 **Obtén la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto (3, –4) y que es tangente al eje de ordenadas.**

$r = dist\,(O, \text{eje } OY) = 3$

La ecuación de la circunferencia es $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$.

18 **Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la recta $x + y - 3 = 0$.**

$r = dist\,(O, s) = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = \dfrac{9}{2}$.

19 **Determina las rectas tangente y normal a la circunferencia $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 13$ en el punto $A(-2, 1)$.**

$A \in$ circunferencia.

La normal es la recta que une A con el centro de la circunferencia C.

$C = (-4, -2)$

$\overrightarrow{CA} = (-2, 1) - (-4, -2) = (2, 3)$

$n: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{3} \to 3x - 2y + 8 = 0$

La tangente es perpendicular a la normal y pasa por A.

$t: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} \to 2x + 3y + 1 = 0$

Posiciones relativas de rectas y circunferencias

20 **Calcula la distancia del centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ a la recta $r: 2x - y + 3 = 0$. ¿Cuál es la posición de r respecto a la circunferencia?**

El centro de la circunferencia es $C(0, 1)$ y su radio es $R = \sqrt{2}$ La distancia de C a r es:

$$dist\,(C, r) = \frac{|-1+3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89 < \sqrt{2} \approx 1,41$$

Luego la circunferencia y la recta son secantes.

21 **Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ respecto de cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1: x + y - 1 = 0 \qquad r_2: 3x - 4y + 9 = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y cada una de las rectas.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

No hay solución $\to$ Son exteriores.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \to x = \frac{9}{5},\ y = \frac{18}{5} \to$$

$\to$ la recta es tangente a la circunferencia en el punto $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{18}{5}\right)$

22 **Estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ respecto a cada una de las siguientes rectas:**

$$r_1\colon x-2=0 \qquad r_2\colon y=0 \qquad r_3\colon y=2x+1$$

Utiliza, en cada caso, los dos métodos siguientes:

a) Resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por la circunferencia y cada recta.

b) Comparando la medida del radio con la distancia de cada recta al centro de la circunferencia.

- $r_1\colon x-2=0$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=4\\ x-2=0\end{cases}$$ No hay solución, luego son exteriores.

b) $C=(-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C,r_1)=\left|\dfrac{-1-2}{1}\right|=3\\ r=2\end{array}\right\}\ dist\,(C,r_1)>r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que el radio, son exteriores.

- $r_2\colon y=0$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=4\\ y=0\end{cases} \to x=-1,\ y=0$$

Hay una única solución, luego son tangentes.

b) $C=(-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C,r_2)=\left|\dfrac{-2}{1}\right|=2\\ r=2\end{array}\right\}\ dist\,(C,r_2)=r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual que el radio, son tangentes.

- $r_3\colon y=2x+1$

a) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y la recta.

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=4\\ y=2x+1\end{cases} \to x_1=\frac{1}{5}\sqrt{11}+\frac{1}{5},\ y_1=\frac{2}{5}\sqrt{11}+\frac{7}{5};\ x_2=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{11},\ y_2=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}\sqrt{11}$$

Hay dos soluciones, luego son secantes.

b) $C=(-1,2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C,r_3)=\left|\dfrac{-2-2+1}{\sqrt{5}}\right|=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}=1,3416\\ r=2\end{array}\right\}\ dist\,(C,r_3)<r$$

Como la distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que el radio, son secantes.

23 **Estudia la posición relativa de la recta $y=x+b$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$ en función del parámetro b.**

El centro de la circunferencia es $C(0,0)$ y su radio es $r=1$.

Hallamos la distancia de C a la recta $s\colon x-y+b=0$: $d=dist\,(C,s)=\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

Para que la recta sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = r$, es decir:

$$\frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \rightarrow |b| = \sqrt{2} \begin{cases} b = \sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \end{cases}$$

- Si $|b| < \sqrt{2} \rightarrow b \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y la recta es secante a la circunferencia; se cortan en dos puntos.
- Si $|b| > \sqrt{2} \rightarrow b \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ son exteriores; no se cortan.

24 **Determina la posición relativa de la recta $y = 2x - 3$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = a$ en función del valor del parámetro a.**

$C = (0, 0)$ es el centro de la circunferencia y $R = \sqrt{a}$, su radio.

Llamamos r: $y = 2x - 3$

$$\left.\begin{array}{l} dist(C, r) = \left|\dfrac{-3}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{3}{5}\sqrt{5} \\ R = \sqrt{a} \end{array}\right\} \frac{3}{5}\sqrt{5} = \sqrt{a} \rightarrow a = \frac{9}{5}$$

- Si $a < \frac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son exteriores.
- Si $a = \frac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son tangentes.
- Si $a > \frac{9}{5}$, la recta y la circunferencia son secantes.

Página 226

Potencia de un punto a una circunferencia

25 **Determina la potencia de los puntos $P(5, 2)$, $Q(2, 1)$ y $R(-1, 0)$ a la circunferencia:**

$$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

Utilízalo para estudiar la posición relativa de P, Q y R respecto de C.

$C: x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \rightarrow O(3, 2),\ r = 2$

$P(5, 2) \rightarrow \mathcal{P} = (5 - 3)^2 + (2 - 2)^2 - 4 = 0 = 0$; por tanto, P pertenece a C.

$Q(2, 1) \rightarrow \mathcal{P} = (2 - 3)^2 + (1 - 2)^2 - 4 = -2 < 0$; por tanto, Q es un punto interior a C.

$R(-1, 0) \rightarrow \mathcal{P} = (-1 - 3)^2 + (0 - 2)^2 - 4 = 16 > 0$; por tanto, R es un punto exterior a C.

26 **Halla y representa el eje radical de los siguientes pares de circunferencias:**

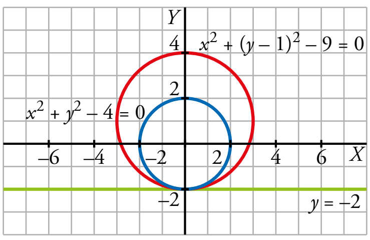
a) $x^2 + y^2 = 4$ **y** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 5$ **y** $(x - 7)^2 + y^2 = 9$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$ **y** $(x - 5)^2 + y^2 = 1$

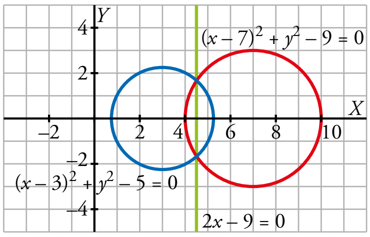
a) $x^2 + y^2 - 4 = x^2 + (y - 1)^2 - 9$

$x^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 - 2y - 8 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$



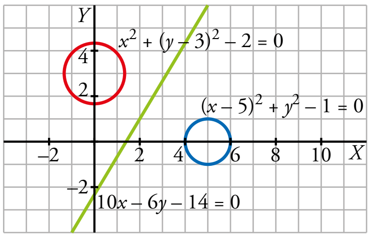
b) $(x-3)^2 + y^2 - 5 = (x-7)^2 + y^2 - 9$

$x^2 - 6x + y^2 + 4 = x^2 - 14x + y^2 + 40 \rightarrow 8y - 36 = 0 \rightarrow 2x - 9 = 0$



c) $x^2 + (y-3)^2 - 2 = (x-5)^2 + y^2 - 1$

$x^2 + y^2 - 6y + 7 = x^2 - 10x + y^2 + 24 \rightarrow 10x - 6y - 14 = 0$



27 Calcula el centro radical de estas tres circunferencias:

$\boldsymbol{C_1: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0}$

$\boldsymbol{C_2: x^2 + y^2 - 1 = 0}$

$\boldsymbol{C_3: x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0}$

* ***Mira el ejercicio resuelto 7.***

Hallamos el eje radical de C_1 y C_2:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow -4x + 6y + 1 = 0$$

Buscamos el eje radical entre C_3 y C_2:

$$x^2 + y^2 + 6x + 5 = x^2 + y^2 - 1 \rightarrow -1 = 6x + 5 \rightarrow x = -1$$

Buscamos ahora el punto de corte entre los dos ejes radicales:

$$\begin{cases} -4x + 6y + 1 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow x = -1 \rightarrow y = \frac{-5}{6} \rightarrow R\left(-1, -\frac{5}{6}\right)$$

Elipses

28 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$ es 10.

Es una elipse de focos $P(-4, 0)$ y $Q(4, 0)$, y constante $k = 10$, es decir, $2a = 10$ y $c = 4$.

Así: $a = 5$; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$

La ecuación será: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

29 **De una elipse conocemos sus focos $F(0, 1)$ y $F'(0, -1)$ y su constante $k = 4$. Determina su ecuación.**

Si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, entonces:

$dist\,(P, F) + dist\,(P, F') = 2a$, es decir:

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 16 + x^2 + y^2 + 2y + 1 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \rightarrow -4y - 16 = -8\sqrt{x^2+(y+1)^2} \rightarrow$

$\rightarrow (4y + 16)^2 = 64[x^2 + (y+1)^2] \rightarrow 16y^2 + 256 + 128y = 64x^2 + 64y^2 + 64 + 128y \rightarrow$

$\rightarrow 192 = 64x^2 + 48y^2 \rightarrow \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

- De otra forma:

  El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une F con F', es decir: $(0, 0)$.

  Por otra parte:

  $2c = dist\,(F, F') = |\overrightarrow{F'F}| = |(0, 2)| = 2 \rightarrow c = 1$

  $2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow a^2 = 4$

  $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

Por tanto, la ecuación es: $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

30 **Halla la ecuación de la elipse de focos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ sabiendo que la longitud de su eje mayor es 10.**

$c = 2;\ 2a = 10 \rightarrow a = 5;\ b = \sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$

31 **Escribe la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y cuya excentricidad es igual a $0{,}5$.**

$c = 3;\ exc=\dfrac{c}{a}=0{,}5 \rightarrow a=\dfrac{c}{0{,}5}=\dfrac{3}{0{,}5}=6$

$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 9 = 27$

Ecuación: $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$

32 **Da la ecuación de la elipse que pasa por $(3, 1)$ y tiene por focos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.**

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

- Como pasa por $(3, 1) \rightarrow \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$
- Como $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + 16$

Teniendo en cuenta las dos condiciones anteriores:

$$\frac{9}{b^2+16}+\frac{1}{b^2}=1 \rightarrow 9b^2 + b^2 + 16 = b^4 + 16b^2 \rightarrow b^4 + 6b^2 - 16 = 0$$

$$b^2 = \frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-6\pm 10}{2} \begin{cases} b^2 = 2 \\ b^2 = -8 \ \text{(No vale)} \end{cases}$$

Así: $a^2 = 2 + 16 = 18$

Por tanto, la ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

33 **De una elipse, centrada en (0, 0), se sabe que su eje mayor, que es igual a 10, está sobre el eje *X*. Además, pasa por el punto (3, 3). Obtén su ecuación.**

$A = (3, 3)$

Eje mayor = 10 $\rightarrow$ $a = 5$

Eje mayor = OX $\rightarrow$ El centro es $O = (0, 0)$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(3, 3) \in$ elipse $\rightarrow \frac{3^2}{25} + \frac{3^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \frac{9}{b^2} = 1 \rightarrow b = -\frac{15}{4},\ b = \frac{15}{4}$

Como b es positivo $\rightarrow b = \frac{15}{4}$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{225}{16}} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{16y^2}{225} = 1$$

34 **Determina, en cada caso, la ecuación de la elipse, centrada en (0, 0), que tiene estas características:**

a) Su excentricidad es 1/2 y su eje mayor está sobre el eje *Y* y es igual a 2.

b) Sus vértices son (–2, 0), (2, 0), (0, –4) y (0, 4).

a) Eje mayor = 2 $\rightarrow b = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1;\ e = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{c}{1} = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 - c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La ecuación queda:

$$\frac{x^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1 \rightarrow \frac{4x^2}{3} + y^2 = 1$$

b) Eje mayor = OY

Eje mayor = 8 $\rightarrow b = 4$

Eje menor = 4 $\rightarrow a = 2$

La ecuación queda: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

35 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de las siguientes elipses dadas por sus ecuaciones. Represéntalas:**

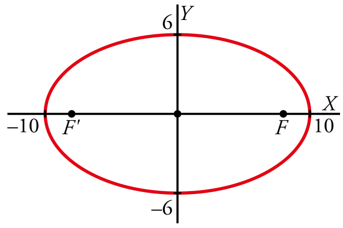
a) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$ **b)** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1$ **c)** $9x^2+25y^2=25$ **d)** $9x^2+4y^2=3$

a) Vértices: (10, 0); (–10, 0); (0, 6) y (0, –6)

Focos: $c=\sqrt{100-36}=8$

$F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{8}{10}=0,8$

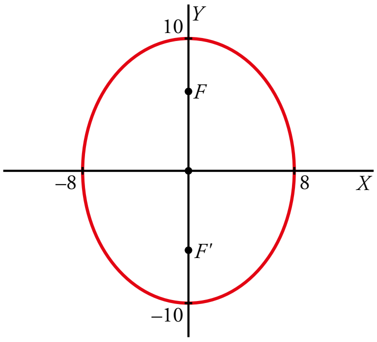


b) Vértices: (8, 0); (–8, 0); (0, 10) y (0, –10)

Focos: $c=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

$F(0, 6)$ y $F'(0, -6)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{6}{10}=0,6$



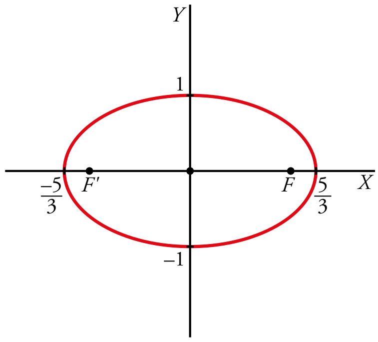
c) $9x^2+25y^2=25 \to \dfrac{x^2}{25/9}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Vértices: $\left(\dfrac{5}{3},0\right)$; $\left(-\dfrac{5}{3},0\right)$; (0, 1) y (0, –1)

Focos: $c=\sqrt{\dfrac{25}{9}-1}=\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{4}{3}$

$F=\left(\dfrac{4}{3},0\right)$ y $F'\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{4/3}{5/3}=\dfrac{4}{5}=0,8$



d) $9x^2+4y^2=3 \to \dfrac{x^2}{3/9}+\dfrac{y^2}{3/4}=1$

La elipse tiene eje mayor = OY y centro $O=(0, 0)$.

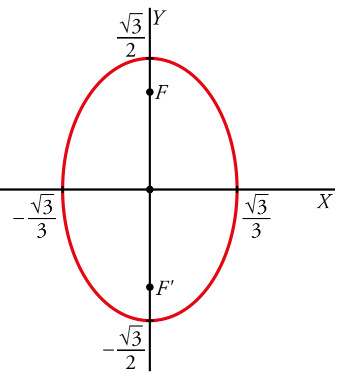
$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$c^2=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{9}=\dfrac{5}{12} \to c=\sqrt{\dfrac{5}{12}}$

Vértices: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$; $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Focos: $F=\left(0,\sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$ y $F'\left(0,-\sqrt{\dfrac{5}{12}}\right)$

Excentricidad: $exc=\dfrac{\sqrt{\dfrac{5}{12}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$



36 **Halla los vértices, los focos y la excentricidad de estas elipses no centradas en el origen de coordenadas. Represéntalas:**

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ **b)** $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$

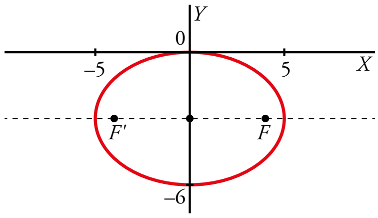
a) Centro: $O=(0,-3)$

$c=\sqrt{25-9}=4$

$e=\dfrac{4}{5}$

Vértices: (5, –3); (–5, –3); (0, 0), (0, –6)

Focos: $F=(4,-3)$, $F'=(-4,-3)$



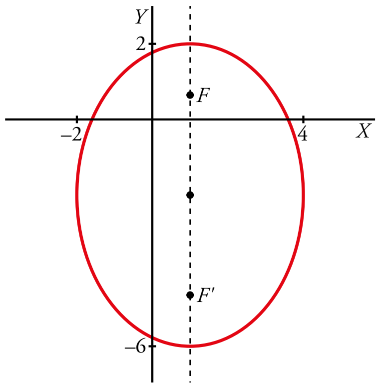
b) Centro: $O=(1,-2)$

$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

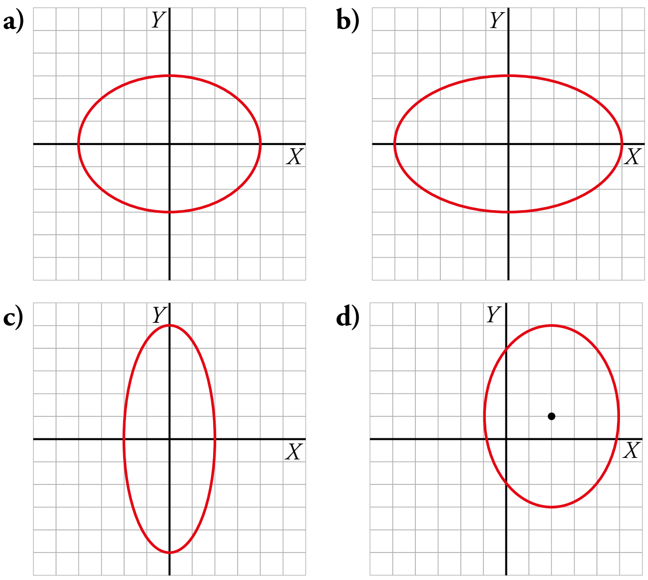
$e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Vértices: (–2, –2); (4, –2); (1, 2); (1, –6)

Focos: $F=(1,-2+\sqrt{7})$, $F'=(1,-2-\sqrt{7})$



37 **Indica la ecuación de estas elipses y calcula su excentricidad:**



Tomaremos medidas sobre el dibujo en cada caso.

a) $a=4;\ b=3 \rightarrow 4^2=3^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{7}$

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1;\ exc=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0,66$

b) $a=5;\ b=3 \rightarrow 5^2=3^2+c^2 \rightarrow c=4$

$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1;\ exc=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}=0,8$

c) $a=2;\ b=5$ como $a<b \rightarrow 5^2=2^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{21}$

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{25}=1;\ exc=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}=0,92$

d) $a = 3;\ b = 4$ como $a < b \rightarrow 4^2 = 3^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7}$

Su vértice es $V(2, 1)$.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1;\ exc = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0,66$$

Hipérbolas

38 Halla el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 6.

Es una hipérbola de focos F y F' y constante $2a = 6$.

Por tanto, $a = 3,\ c = 4,\ b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

La ecuación es: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

39 Halla la ecuación de la hipérbola de focos $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ y distancia entre vértices, 4.

$c = 4;\ 2a = 4 \rightarrow a = 2;\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

La ecuación es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

40 Obtén la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm\frac{1}{5}x$ y uno de sus vértices es $(2, 0)$.

$a = 2;\ \frac{b}{a} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{5} \rightarrow b = \frac{2}{5}$

Ecuación: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4/25} = 1$, o bien, $\frac{x^2}{4} - \frac{25y^2}{4} = 1$

41 De una hipérbola sabemos que pasa por el punto $\left(8, 5\sqrt{3}\right)$ y sus focos son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$. Calcula su ecuación.

- Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist\,(P, F) - dist\,(P, F')| = 2a$

  $\left|\,|\overrightarrow{FP}| - |\overrightarrow{F'P}|\,\right| = 2a \rightarrow \left|\,|(11, 5\sqrt{3})| - |(5, 5\sqrt{3})|\,\right| = 2a$

  $\sqrt{121+75} - \sqrt{25+75} = 2a \rightarrow 14 - 10 = 2a \rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$

- Como $a = 2$ y $c = 3$, entonces $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$
- La ecuación es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

42 Halla la ecuación de la hipérbola de focos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y asíntotas $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

$c = 3$

$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow b = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2 = \frac{9}{5}a^2 \rightarrow 9 = \frac{9}{5}a^2 \rightarrow a = \sqrt{5} \rightarrow b = \frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{5} = 2$$

La ecuación pedida es: $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

43 **Halla los vértices, los focos, las excentricidades y las asíntotas de las hipérbolas dadas por estas ecuaciones. Dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

c) $x^2 - 4y^2 = 1$

d) $x^2 - 4y^2 = 4$

e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

f) $y^2 - 16x^2 = 16$

g) $9x^2 - 4y^2 = 36$

h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0$

i) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{64} = 1$

j) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x-1)^2}{9} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

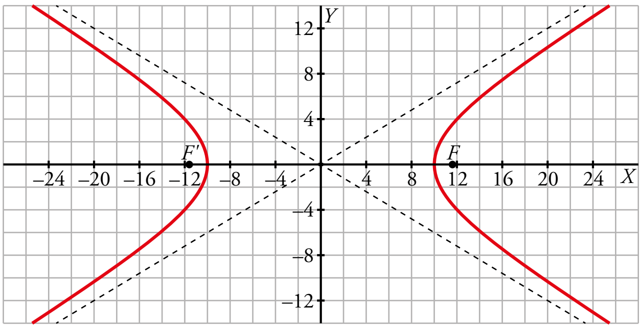
$a = 10, \ b = 6, \ c = \sqrt{100+36} = \sqrt{136}$

Vértices: $(10, 0)$; $(-10, 0)$

Focos: $F = (\sqrt{136}, 0), \ F' = (-\sqrt{136}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{136}}{10}$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{3}{5}x$



b) $\dfrac{9x^2}{16} - y^2 = 1$

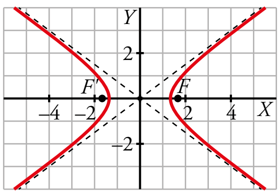
$a = \dfrac{4}{3}, \ b = 1, \ c = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1} = \dfrac{5}{3}$

Vértices: $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$; $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$

Focos: $F = \left(\dfrac{5}{3}, 0\right), \ F' = \left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$

$e = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{3}{4}x$



c) $x^2 - 4y^2 = 1$

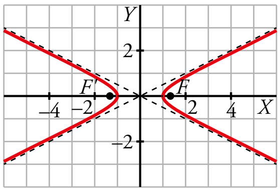
$a = 1,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Vértices: (1, 0); (–1, 0)

Focos: $F = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$; $F' = \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}, 0\right)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\,\dfrac{1}{2}\,x$



d) $x^2 - 4y^2 = 4 \ \rightarrow\ \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$a = 2,\ b = 1,\ c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

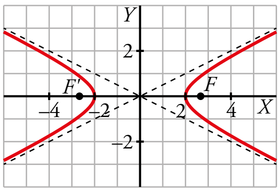
Vértices: (2, 0); (–2, 0)

Focos: $F = (\sqrt{5}, 0)$

$F' = (-\sqrt{5}, 0)$

$e = \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

Asíntotas: $y = \pm\,\dfrac{1}{2}\,x$



e) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

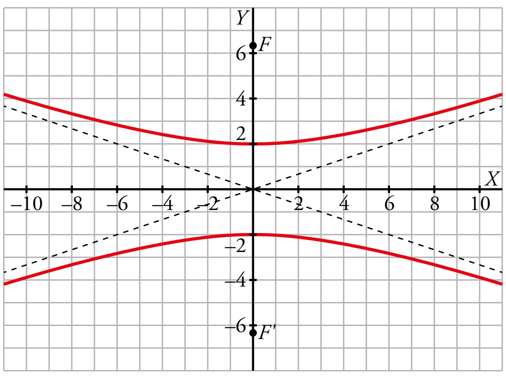
$a = 2,\ b = 6,\ c = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$

Vértices: (0, 2); (0, –2)

Focos: $F = (0, \sqrt{40})$; $F' = (0, -\sqrt{40})$

$e = \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$

Asíntotas: $y = \pm\,\dfrac{1}{3}\,x$



f) $y^2 - 16x^2 = 16 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - x^2 = 1$

$a = 4, \;\; b = 1, \;\; c = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

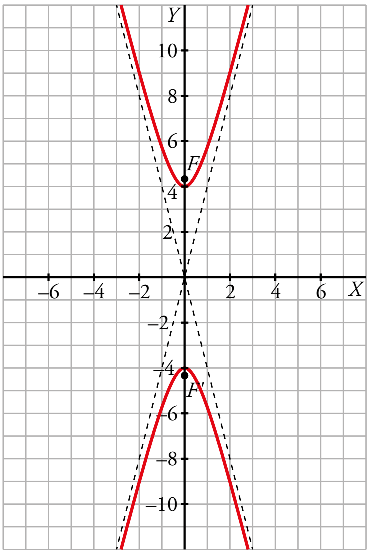
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{17})$

$F' = (0, -\sqrt{17})$

$e = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$

Asíntotas: $y = \pm 4x$



g) $9x^2 - 4y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

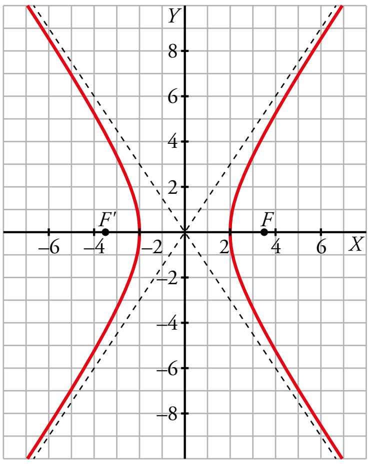
$a = 2, \;\; b = 3, \;\; c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Vértices: $(2, 0); (-2, 0)$

Focos: $F = (\sqrt{13}, 0); \;\; F' = (-\sqrt{13}, 0)$

$e = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm \dfrac{3}{2}x$



h) $4x^2 - y^2 + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 4x^2 = 16 \rightarrow \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

$a = 4, \;\; b = 2, \;\; c = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

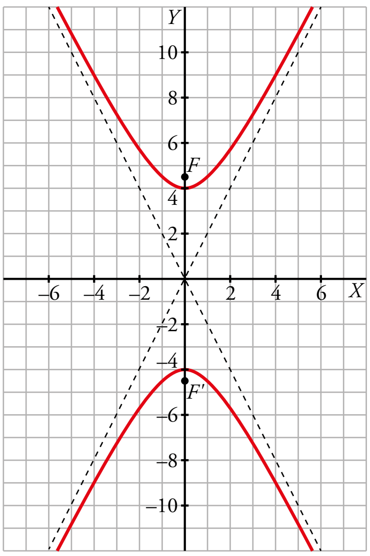
Vértices: $(0, 4); (0, -4)$

Focos: $F = (0, \sqrt{20})$

$F' = (0, -\sqrt{20})$

$e = \dfrac{\sqrt{20}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Asíntotas: $y = \pm 2x$



i) Centro: $O = (0, 1)$

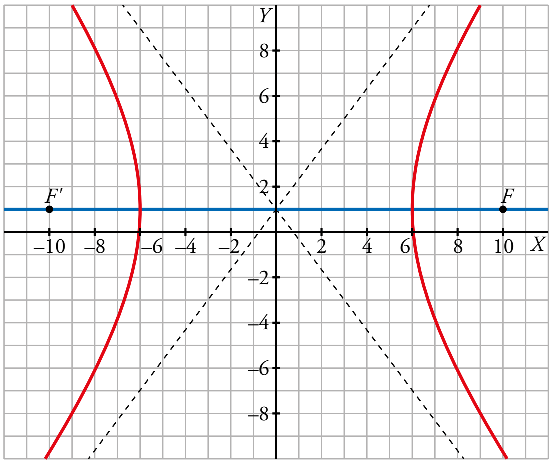
$a = 6,\ \ b = 8,\ \ c = \sqrt{36+64} = 10$

Vértices: $(6, 1)$; $(-6, 1)$

Focos: $F = (10, 1)$; $F' = (-10, 1)$

$e = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

Asíntotas: $y - 1 = \pm\,\dfrac{8}{6}\,x$



j) Centro: $O = (1, 1)$

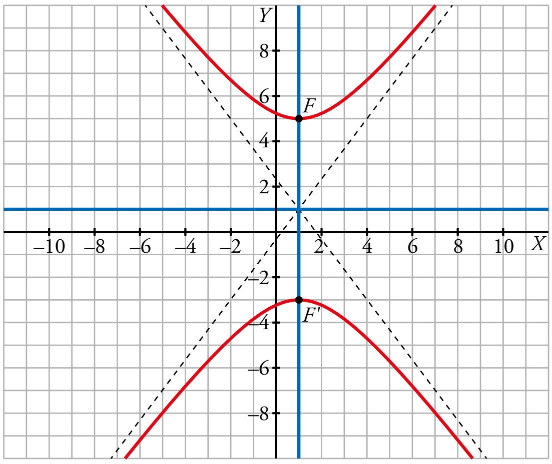
$a = 4,\ \ b = 3,\ \ c = \sqrt{16+9} = 5$

Vértices: $(1, 3)$; $(1, -1)$

Focos: $F = (1, 5)$; $F' = (1, -3)$

$e = \dfrac{5}{4}$

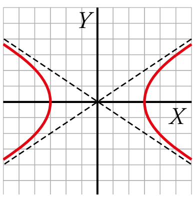
Asíntotas: $y - 1 = \pm\,\dfrac{4}{3}(x-1)$



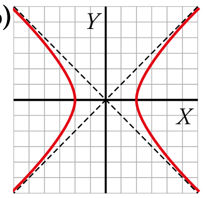
Página 227

44 **Indica la ecuación de cada una de las siguientes hipérbolas y calcula su excentricidad:**

a)



b)



a) $a = 3;\ b = 2 \;\rightarrow\; c^2 = 3^2 + 2^2 \;\rightarrow\; c = \sqrt{13}$

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1;\ exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{3} = 1,2$

b) $a = 2;\ b = 2 \;\rightarrow\; c^2 = 2^2 + 2^2 \;\rightarrow\; c = 2\sqrt{2}$

$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1 \;\rightarrow\; x^2 - y^2 = 4;\ exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = 1,41$

45 **Halla las coordenadas de los focos y la distancia focal de estas hipérbolas equiláteras:**

a) $y = \frac{1}{4x}$ **b)** $y = -\frac{3}{x}$ **c)** $y = \frac{12}{x}$

a) $k = \frac{1}{4}$; $c = 2\sqrt{k} = 1 \rightarrow$ distancia focal $= 2c = 2$

Sus focos serán:

$$F_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$F_2 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) $k = -3$; al ser $k < 0$ está en el segundo y cuarto cuadrante $c = 2\sqrt{-k} = 2\sqrt{3} \rightarrow$
$\rightarrow$ distancia focal $= 2c = 4\sqrt{3}$

Sus focos serán:

$$F_1 = \left(-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right)$$

$$F_2 = \left(\sqrt{6}, -\sqrt{6}\right)$$

c) $k = 12$; $c = 2\sqrt{k} = 4\sqrt{3} \rightarrow$ distancia focal $= 2c = 8\sqrt{3}$

Sus focos serán:

$$F_1 = \left(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\right)$$

$$F_2 = \left(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\right)$$

Parábolas

46 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (3, 0) y de la recta $y = -3$.**

Es una parábola cuyo foco es $F(3, 0)$ y cuya directriz es $d: y + 3 = 0$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |y + 3| \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = y^2 + 6y + 9 \rightarrow y = \frac{x^2}{6} - x$$

O bien: $(x-3)^2 = 6\left(y + \frac{3}{2}\right)$

47 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola de foco F y directriz d.**

a) $F(5, 0)$; $d: x = -5$ **b)** $F(-3, 0)$; $d: x = 3$

c) $F(0; 2{,}5)$; $d: y = -2{,}5$ **d)** $F(0, -4)$; $d: y = 4$

a) $\frac{p}{2} = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow 2p = 20$. Ecuación: $y^2 = 20x$

b) $dist\,(F, d) = 6 = p$

$F \in OX$

$y^2 = -12x$

c) $dist\,(F, d) = 5 = p$

$F \in OY$

$x^2 = 10y$

d) $dist\,(F, d) = 8 = p$

$F \in OY$

$x^2 = -16y$

48 **Determina la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen de coordenadas y cuya directriz es $y = 3$.**

El foco será $F(0, -3)$. Si $P(x, y)$ es un punto de la parábola y $d: y - 3 = 0$ es la directriz, entonces:

$$dist\,(P, F) = dist\,(P, d) \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = |\,y - 3\,| \;\rightarrow\; x^2 + y^2 + 6y + 9 = y^2 - 6y + 9 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 = -12y$$

49 **Calcula la ecuación de la parábola de foco F y directriz d.**

a) $\boldsymbol{F(3, 5);\ d: x = 1}$

b) $\boldsymbol{F(-2, 1);\ d: x = -6}$

c) $\boldsymbol{F(1, -2);\ d: y = -4}$

d) $\boldsymbol{F(0, 3);\ d: y = -5}$

* ***Mira el ejercicio resuelto 8.***

a) $d: x = 1 \;\rightarrow\; -\dfrac{p}{2} = 1 \;\rightarrow\; p = -2$

El vértice no es (0,0). Busquemos $V(a, b)$:

$(a + 1, b) = (3, 5) \;\rightarrow\; b = 5;\ a = 2$

Por tanto:

$(y - 5)^2 = 4\,(x - 2)$

b) $d: x = -6 \;\rightarrow\; -\dfrac{p}{2} + V_x = -6 \;\rightarrow\; p = 4$

$V(-4, 1)$

Por tanto:

$(y - 1)^2 = 8\,(x + 4)$

c) $V(1, -3);\ p = 2$

$(x - 1)^2 = 4\,(y + 3)$

d) $V(0, -1);\ p = 8$

$x^2 = 16\,(y + 1)$

50 **Halla la ecuación de la parábola con foco $F(1, 1)$ y vértice $V(1, 1/2)$.**

Tenemos el vértice y el foco sobre $x = 1 \;\rightarrow$ Es una parábola vertical.

Además su vértice no es (0,0).

$d: y = 0$

$$\left(0, \frac{p}{2}\right) + \left(1, \frac{1}{2}\right) = (1, 1) \;\rightarrow\; p = 1 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)$$

51 **Halla los vértices, los focos y las directrices de las siguientes parábolas. Represéntalas:**

a) $y^2 = 6x$ **b)** $y^2 = -6x$ **c)** $y = x^2$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{4}$

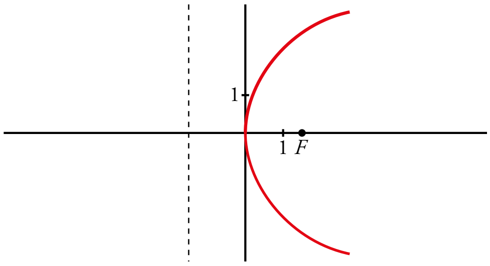
e) $y^2 = 4(x-1)$ **f)** $(y-2)^2 = 8x$ **g)** $(x-1)^2 = -8(y+1)$ **h)** $(y+2)^2 = -4(x-1)$

a) $\left.\begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y^2 = 6x \end{array}\right\} 2p = 6 \to p = 3 \to \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2}$

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

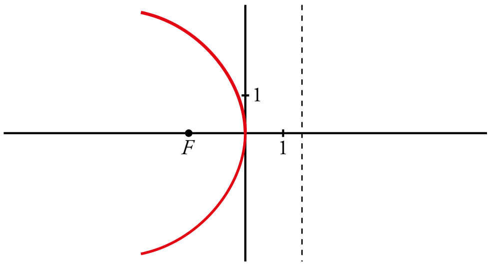
Directriz: $x = -\dfrac{3}{2}$



b) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$

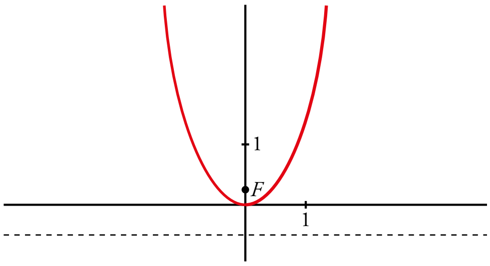
Directriz: $x = \dfrac{3}{2}$



c) Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

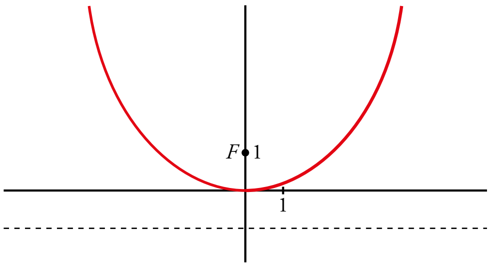
Directriz: $y = -\dfrac{1}{4}$



d) Vértice: (0, 0)

Foco: (0, 1)

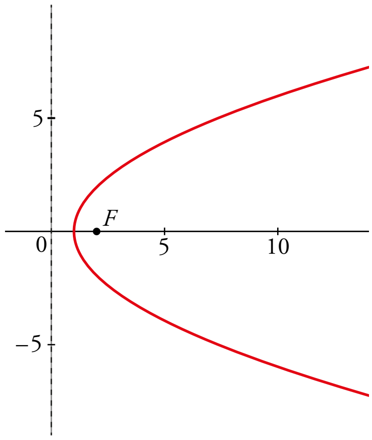
Directriz: $y = -1$



e) $V(1, 0)$; $p = 2$

$$F\left(\frac{p}{2}+1, 0\right) \to F(2, 0)$$

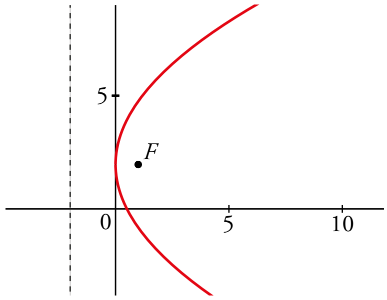
$$d\text{: } x=-\frac{p}{2}+V_x=-1+1=0 \to d\text{: } x=0$$



f) $V(0, 2)$; $p = 4$

$$F\left(\frac{p}{2}, 2\right) \to F(2, 2)$$

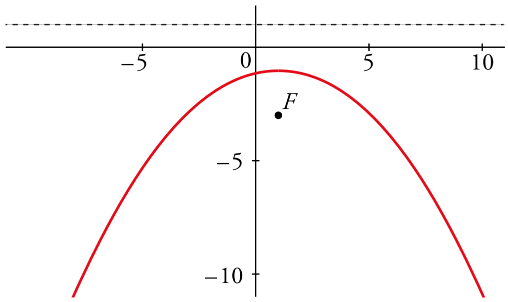
$$d\text{: } x=-\frac{p}{2} \to d\text{: } x=-2$$



g) $V(1, -1)$; $p = -4$

$$F\left(1, \frac{p}{2}-1\right) \to F(1, -3)$$

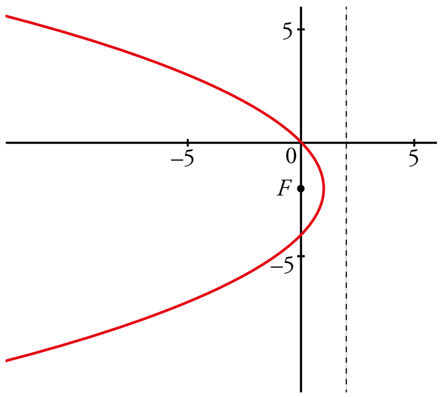
$$d\text{: } y=-\frac{p}{2}+V_y \to d\text{: } y=1$$



h) $V(1, -2)$; $p = -2$

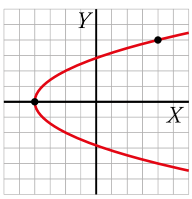
$$F\left(1+\frac{p}{2}, -2\right) \to F(0, -2)$$

$$d\text{: } x=-\frac{p}{2}+V_x \to d\text{: } x=2$$

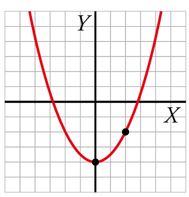


52 Calcula las ecuaciones de estas parábolas:

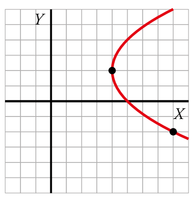
a)



b)



c)



* ***Mira el ejercicio resuelto 6.***

a) $V(-4, 0)$

A partir de su vértice y de la orientación mostrada en el dibujo, sabemos que la parábola será de la forma: $y^2 = 2p(x+4)$.

Además, el punto (4,4) pertenece a la parábola, por lo que tendrá que cumplir su ecuación:

$4^2 = 2p(4+4) \rightarrow p = 1$

Ya podemos escribir la ecuación: $y^2 = 2(x+4)$.

b) $V(0, -4) \rightarrow x^2 = 2p(y+4)$

$P(2, -2)$ pertenece a la parábola $\rightarrow 4 = 2p \cdot 2 \rightarrow p = 1$

$x^2 = 2(y+4)$

c) $V(4, 2) \rightarrow (y-2)^2 = 2p(x-4)$

$P(8, -2)$ pertenece a la parábola $\rightarrow 16 = 2p \cdot 4 \rightarrow p = 2$

$(y-2)^2 = 4(x-4)$

53 Halla la ecuación de la parábola de vértice en el punto (2, 3) y que pasa por el punto (4, 5).

$X = (x, y)$ punto genérico.

$(y-3)^2 - 2p(x-2) = 0$

$(4, 5) \in$ Parábola $\rightarrow (5-3)^2 - 2p(4-2) = 0 \rightarrow 4 - 4p = 0 \rightarrow p = 1$

Parábola: $(y-3)^2 - 2(x-2) = 0$

De forma análoga se llega a la parábola: $(x-2)^2 = 2(y-3)$

Para resolver

54 Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $\mathbf{4x^2 + 9y^2 = 36}$

b) $\mathbf{16x^2 - 9y^2 = 144}$

c) $\mathbf{9x^2 + 9y^2 = 25}$

d) $\mathbf{x^2 - 4y^2 = 16}$

e) $\mathbf{y^2 = 14x}$

f) $\mathbf{25x^2 + 144y^2 = 900}$

g) $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{25} = 1}$

h) $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1}$

i) $\mathbf{(x+2)^2 = 4(y+5)}$

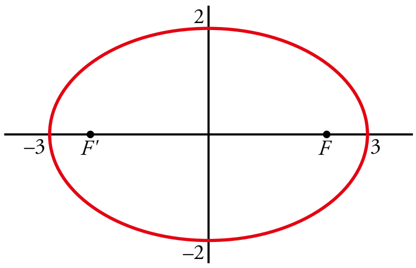
j) $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4}$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{5}$

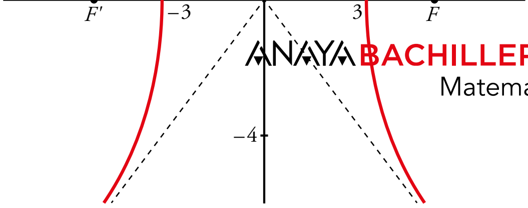
$exc = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,75$

Vértices: (–3, 0) y (3, 0)



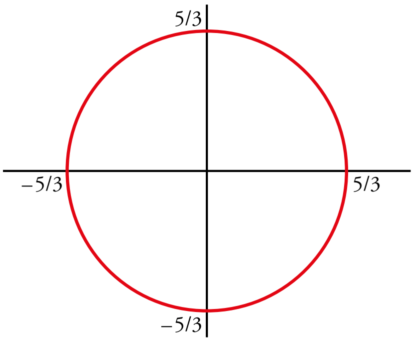
b) $16x^2 - 9y^2 = 144 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 3,\ b = 4,\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{3} \approx 1,67 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{4}{3}x;\ y = -\dfrac{4}{3}x \end{cases}$



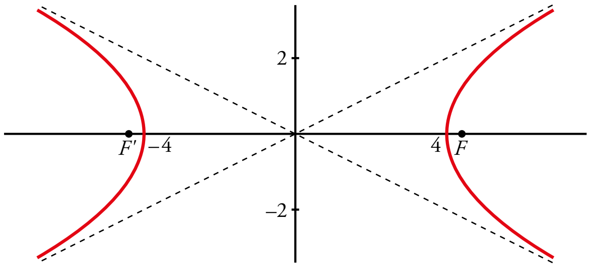
c) $9x^2 + 9y^2 = 25 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = \dfrac{25}{9}$

Es una circunferencia de centro (0, 0) y radio $\dfrac{5}{3}$.



d) $x^2 - 4y^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Es una hipérbola $\rightarrow \begin{cases} a = 4,\; b = 2,\; c = 2\sqrt{5};\; exc = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12 \\ \text{Asíntotas: } y = \dfrac{1}{2}x;\; y = -\dfrac{1}{2}x \end{cases}$

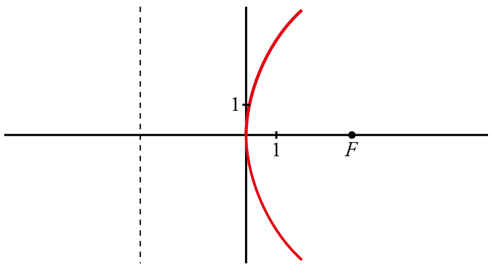


e) Es una parábola.

Vértice: (0, 0)

Foco: $\left(\dfrac{7}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\dfrac{7}{2}$

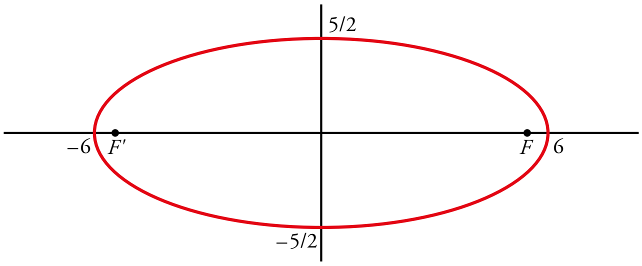


f) $25x^2 + 144y^2 = 900 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{25/4} = 1$

Es una elipse $\rightarrow\; a = 6,\; b = \dfrac{5}{2},\; c = \dfrac{\sqrt{119}}{2}$

$exc = \dfrac{\sqrt{119}}{12} \approx 0,91$

Vértices: (–6, 0) y (6, 0)

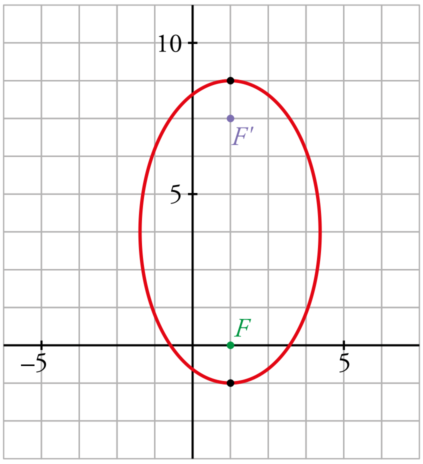


g) Es una elipse

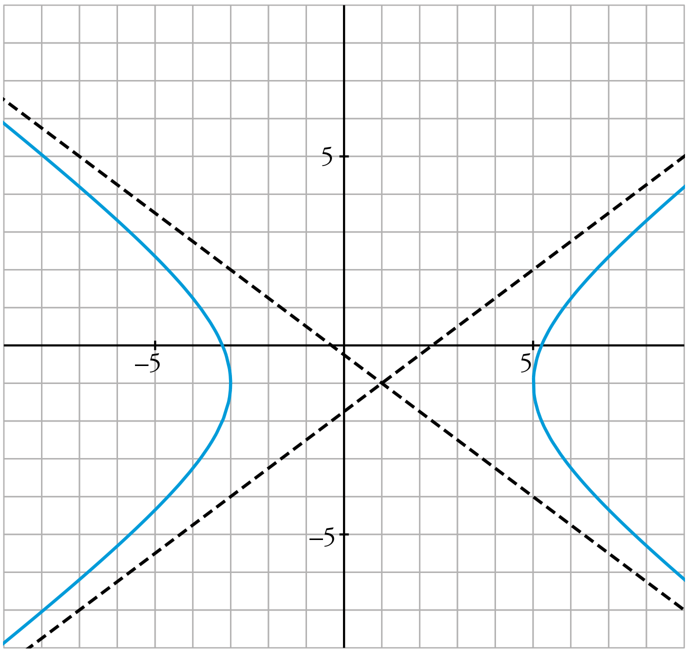
$a = 3;\ \ b = 5;\ \ c = 4$

$exc = \dfrac{4}{5}$

Vértices: (1, –1) y (1, 9)



h) Es una hipérbola $\begin{cases} a = 4;\ b = 3;\ c = 5;\ exc = \dfrac{5}{4} \cong 1{,}25 \\ \text{Asíntotas: } \ y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{7}{4};\ \ y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

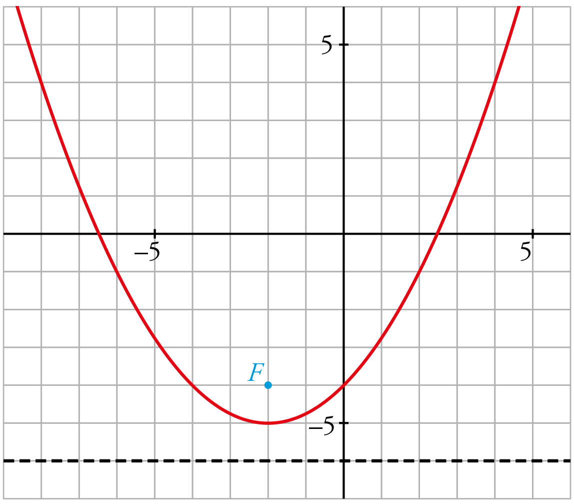


i) Es una parábola

Vértice = (–2, –5)

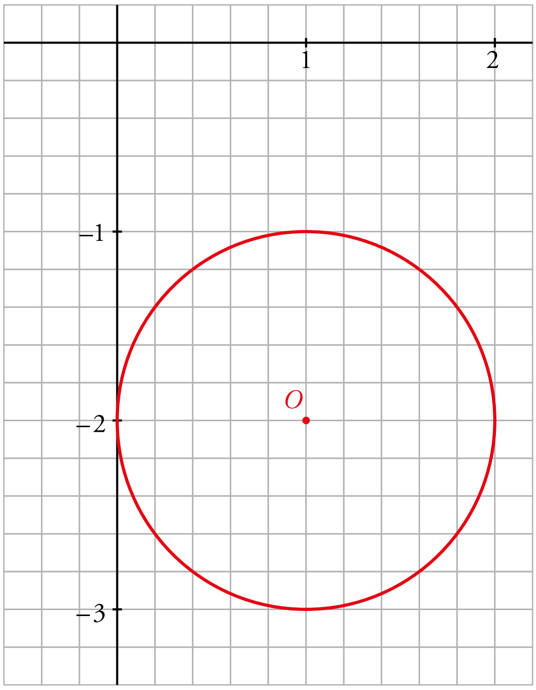
Foco = (–2, –4)

Directriz: $y = -6$



j) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4 \rightarrow (x-1) + (y+2)^2 = 1$

Es una circunferencia de centro $C(1, -2)$ y radio 1.



55 **Calcula el vértice, el foco y la directriz de cada una de las siguientes parábolas:**

a) $y^2 - x + 2 = 0$ **b)** $y^2 - 2y - 4x + 1 = 0$

c) $x^2 - 4x - 6y - 2 = 0$ **d)** $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$

* ***Mira el ejercicio resuelto 3d).***

a) $y^2 = x - 2 \rightarrow p = \frac{1}{2};\ V(2, 0)$

Buscamos el foco:

$F = (2, 0) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{9}{4}, 0\right)$

Buscamos su directriz:

$d\!: x = \frac{-p}{2} + V_x = \frac{-1}{4} + 2 = \frac{7}{4}$

b) $(y-1)^2 = 4x \rightarrow p = 2;\ V(0, 1)$

Buscamos el foco:

$F = (2, 0) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (1, 1)$

Buscamos su directriz:

$d\!: x = \frac{-p}{2} + V_x = -1 + 0 = -1$

c) Vamos a completar cuadrados para poder escribir la ecuación de la parábola como nos interesa:

$x^2 - 4x + 4 - 6y - 2 = 4 \rightarrow (x-2)^2 = 6y + 6 = 6(y+1) \rightarrow p = 3;\ V(2, -1)$

Buscamos el foco: $F = (2, -1) + \left(0, \frac{p}{2}\right) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$

Buscamos su directriz $d\!: y = \frac{-p}{2} + V_y = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}$

d) Vamos a completar cuadrados para poder escribir la ecuación de la parábola como nos interesa:

$y^2 - 4y + 4 - 6x - 5 = 4 \rightarrow (y-2)^2 = 6x + 9 = 6\left(x + \frac{9}{6}\right) = 6\left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow p = 3;\ V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

Buscamos el foco: $F = \left(-\frac{3}{2}, 2\right) + \left(\frac{p}{2}, 0\right) = (0, 2)$

Buscamos su directriz d: $x = \frac{-p}{2} + V_x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$

56 **a) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-1, 1)$ y es tangente a la recta $3x - 4y - 3 = 0$.**

b) De todas las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante, encuentra las que sean tangentes a la circunferencia hallada en el apartado anterior.

a) El radio, r, de la circunferencia es la distancia del centro $C(-1, 1)$ a la recta s: $3x - 4y - 3 = 0$; es decir:

$$r = dist\,(C, s) = \frac{|-3-4-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} = 2$$

La ecuación será: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, o bien, $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

b) Las rectas paralelas a la bisectriz del primer cuadrante son de la forma $y = x - k$, es decir, t: $x - y + k = 0$. La recta t es tangente a la circunferencia cuando la distancia del centro de la circunferencia, $C(-1, 1)$, a la recta es igual al radio, 2. Es decir:

$$dist\,(C, t) = \frac{|-1-1+k|}{\sqrt{2}} = 2 \to \frac{|k-2|}{\sqrt{2}} = 2 \to |k-2| = 2\sqrt{2} \begin{cases} k-2 = 2\sqrt{2} \to k = 2+2\sqrt{2} \\ k-2 = -2\sqrt{2} \to k = 2-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos rectas: $\begin{cases} y = x+2+2\sqrt{2} \\ y = x+2-2\sqrt{2} \end{cases}$

57 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por (–3, 2) y (4, 1) y es tangente al eje X.**

El centro está en la mediatriz del segmento AB.

$A = (-3, 2)$, $B = (4, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (7, -1) \to \vec{d} = (1, 7)$

$M_{AB} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$m: \frac{x-(1/2)}{1} = \frac{y-(3/2)}{7} \to 7x - \frac{7}{2} = y - \frac{3}{2} \to y = 7x - 2$$

$dist\,(O, A) = dist\,(O, OX) = r$

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y$

Las coordenadas del centro son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 7x - 2 \\ \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} = y \end{cases} \to x_1 = 21,\ y_1 = 145;\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$$

Hay dos circunferencias que cumplen la condición:

C: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$

C': $(x-21)^2 + (y-145)^2 = 145^2 = 21\,025$

58 **De la circunferencia C se sabe que tiene su centro en la recta $x - 3y = 0$ y pasa por los puntos $(-1, 4)$ y $(3, 6)$. Obtén la ecuación de C.**

Si el centro está sobre la recta $x - 3y = 0$, es de la forma $C(3y, y)$.

El centro está a igual distancia de $A(-1, 4)$ que de $B(3, 6)$. Además, esta distancia es el radio, r, de la circunferencia:

$$r = dist\,(A, C) = dist\,(B, C) \rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \rightarrow \sqrt{(3y+1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3y-3)^2 + (y-6)^2}$$

$$9y^2 + 1 + 6y + y^2 + 16 - 8y = 9y^2 + 9 - 18y + y^2 + 36 - 12y$$

$$28y = 28 \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3y = 3$$

Por tanto, el centro de la circunferencia está en $C(3, 1)$, y su radio es:

$$r = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

La ecuación es: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$, o bien, $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

59 **Determina la ecuación de la circunferencia de radio 10 que, en el punto $(7, 2)$, es tangente a la recta $3x - 4y - 13 = 0$.**

Las coordenadas del centro $C(x, y)$ están sobre la recta perpendicular a la recta r que pasa por el punto $(7, 2)$. El vector director de r es $(4, 3)$.

Buscamos esta recta, s:

$$\left.\begin{array}{r}\vec{d} = (3, -4)\\ P(7, 2)\end{array}\right\} \; s: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{-4} \rightarrow -4x + 28 = 3y - 6 \rightarrow 4x + 3y - 34 = 0$$

El centro se encuentra en s por lo que cumple su ecuación, y además está a distancia 10 de P:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 34 = 0 \\ \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 1,\; y_1 = 10;\; x_2 = 13,\; y_2 = -6$$

Tendremos dos circunferencias que cumplan las condiciones dadas, una de centro $C_1 = (1, 10)$ y radio 10, y otra de centro $C_2 = (13, -6)$ y radio 10:

C_1: $(x - 1)^2 + (y - 10)^2 = 100$

C_2: $(x - 13)^2 + (y + 6)^2 = 100$

60 **Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de vértices $A(3, 2)$, $B\left(1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y $C\left(5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.**

$A = (3, 2)$, $B = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (-\sqrt{2} - 2, -\sqrt{2} - 2) = (-\sqrt{2} - 2)\,(1, 1)$

Lado AB: $x - 3 = y - 2 \rightarrow x - y - 1 = 0$

$\overrightarrow{AC} = (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (3, 2) = (\sqrt{2} + 2, -\sqrt{2} - 2) = (\sqrt{2} + 2)\,(1, -1)$

Lado AC: $x - 3 = -y + 2 \rightarrow x + y - 5 = 0$

$\overrightarrow{BC} = (1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (5 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2} - 4, 0) = (-2\sqrt{2} - 4)\,(1, 0)$

Lado BC: $y = -\sqrt{2} \rightarrow y + \sqrt{2} = 0$

Bisectriz de $\hat{A}$: $|x - y - 1| = |x + y - 5| \rightarrow y = 2,\; x = 3$

Tomamos $x = 3$, que es la recta interior al triángulo.

Bisectriz de $\hat{C}$:

$$\left|\frac{x+y-5}{\sqrt{2}}\right| = |y + \sqrt{2}| \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = y + \sqrt{2} \\[2ex] \dfrac{x+y-5}{\sqrt{2}} = -(y + \sqrt{2}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - 5 = \sqrt{2}y + 2 \\ x + y - 5 = -\sqrt{2}y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + (1 - \sqrt{2})y - 7 = 0 \\ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases}$$

Tomamos $x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0$, que es la recta interior al triángulo.

El incentro es la intersección de las bisectrices: $\begin{cases} x = 3 \\ x + (1 + \sqrt{2})y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$

radio = *dist* (P, lado BC) = $\sqrt{2}$

Circunferencia inscrita: $C: (x - 3)^2 + y^2 = 2$

61 Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo determinado por la recta $y = -x + 4$ y los ejes de coordenadas. Calcula la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (0, 0).

Vértices del triángulo:

$A \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 4) \qquad B \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B = (4, 0) \qquad C = (0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (4, -4) = 4(1, -1),\ M_{AB} = (2, 2)$

$m_c: x - 2 = y - 2 \rightarrow x = y$

$\overrightarrow{AC} = (0, -4) = 4(0, -1),\ M_{AC} = (0, 2)$

$m_b: y - 2 = 0$

El circuncentro es la intersección de las mediatrices: $\begin{cases} x = y \\ 2 = 2 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = 2 \rightarrow P = (2, 2)$

radio = *dist* (P, C) = $\sqrt{8}$

Circunferencia circunscrita, $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

La recta tangente en (0, 10) es de la forma $y = wx$. Imponiendo que C y r se cortan en un solo punto, se obtiene $y = -x$.

62 Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el cuadrado de vértices $A(-3, 3)$, $B(-1, 3)$, $C(-1, 1)$ y $D(-3, 1)$.

$A = (-3, 3),\ B = (-1, 3),\ C = (-1, 1),\ D = (-3, 1)$

Diagonal $AC: y = -x$

Diagonal $BD: y = x + 4$

Centro: $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 4 \end{cases} \rightarrow x = -2,\ y = 2 \rightarrow P = (-2, 2)$

Lado $AB: y = 3$

radio = *dist* (P, lado AB) = 1

Circunferencia inscrita, $C: (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

63 Halla la ecuación de la circunferencia de radio 5 que pasa por $P(1, 1)$ y cuyo centro pertenece a la recta $x + 3y - 19 = 0$.

* ***Mira el ejercicio resuelto 2.***

Sabemos que $P(1, 1)$ pertenece a la circunferencia y que el centro O de la circunferencia está sobre la recta $s: x + 3y - 19 = 0$.

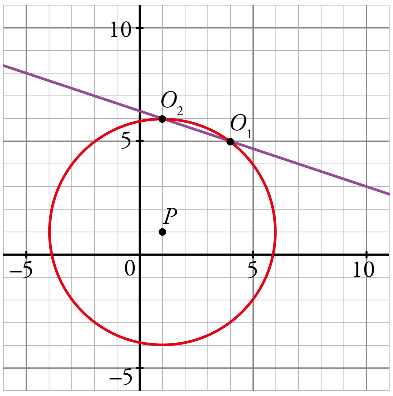
Para definir el centro O definiremos la circunferencia auxiliar C_1 con centro en P y de radio 5. Entonces O estará en el punto de corte de s y C_1.

$C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$

De s sabemos que $x = 19 - 3y$, sustituimos en C_1:

$(18 - 3y)^2 + (y - 1)^2 = 25 \rightarrow 10y^2 - 110y + 300 = 0 \rightarrow y^2 - 11y + 30 = 0 \rightarrow y_1 = 5, y_2 = 6$

Tenemos dos soluciones: $O_1 = (4, 5)$ y $O_2 = (1, 6)$



Por lo tanto el ejercicio tiene dos soluciones distintas, según el centro:

C_1: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

C_2: $(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$

64 **Estudia la posición relativa del punto $P(0, 3)$ respecto a la circunferencia $(x - m)^2 + y^2 = 25$ en función de los valores del parámetro m.**

$(x - m)^2 + y^2 = 25$

Centro: $O = (m, 0)$

Radio: $r = 5$

$dist\,(P, O) = \sqrt{m^2 + 9} = 5 \rightarrow m = -4,\ m = 4$

$\sqrt{m^2 + 9} < 5 \rightarrow m \in (-4, 4)$

$\sqrt{m^2 + 9} > 5 \rightarrow m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

Si $m \in (-4, 4) \rightarrow P$ es interior a la circunferencia C.

Si $m = -4$ o $m = 4 \rightarrow P \in C$

Si $m \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \rightarrow P$ es exterior a C.

65 **Estudia en función de k la posición relativa de la recta s: $4x + 3y + k = 0$ respecto a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.**

Depende del número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y + k = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-3y - k}{4} \\ x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{-3y - k}{4}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{-3y - k}{4}\right) - 6y + 6 = 0$$

$k^2 + 6ky + 8k + 25y^2 - 72y + 96 = 0 \rightarrow 25y^2 + (6k - 72)y + 96 + 8k + k^2 = 0$

El número de soluciones depende del signo del discriminante.

$\Delta = (6k - 72)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (96 + 8k + k^2) = -64k^2 - 1\,664k - 4\,416$

- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 = 0 \rightarrow k = -3,\ k = -23 \rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ Son tangentes.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 < 0 \rightarrow k \in (-\infty, -23) \cup (-3, \infty) \rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ Son exteriores.
- Si $-64k^2 - 1\,664k - 4\,416 > 0 \rightarrow k \in (-23, -3) \rightarrow$ Dos soluciones $\rightarrow$ Son secantes.

Página 228

66 Halla los puntos de intersección de cada pareja de circunferencias y di cuál es su posición relativa.

a) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-16=0 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4-6x-16=0 \ \to\ -6x=12 \ \to\ x=-2 \\ 4+y^2=4 \ \to\ y^2=0 \ \to\ y=0 \end{array}$

Las circunferencias se cortan en el punto (–2, 0).

La primera circunferencia tiene centro en (3, 0) y radio 5; la segunda tiene centro en (0, 0) y radio 2. La distancia entre sus centros es $d = 3$. Como la diferencia entre sus radios es $5 - 2 = 3 = d$, las circunferencias son tangentes interiores.

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-6x-4y+9=0 \\ x^2+y^2-6x+2y+9=0 \end{array}\right\}$ Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:

$6y=0 \ \to\ y=0$

$x^2-6x+9=0 \ \to\ (x-3)^2=0 \ \to\ x=3$

Las circunferencias se cortan en el punto (3, 0).

La primera circunferencia tiene su centro en (3, 2) y radio 2; la segunda tiene su centro en (3, –1) y radio 1. La distancia entre sus centros es $d = 3$, igual que la suma de sus radios. Por tanto, las circunferencias son tangentes exteriores.

67 Considera las circunferencias C_1: $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ y C_2: $(x-3)^2+(y+3)^2=10$.

a) Comprueba que ambas circunferencias son secantes y calcula sus puntos de corte, A y B.

b) Halla las potencias de los puntos A y B a las circunferencias C_1 y C_2.

c) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿qué podrías decir del eje radical de ambas circunferencias?

d) ¿Puedes generalizar este resultado para un par cualquiera de circunferencias secantes?

a) Calculamos los puntos de corte resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2=2 \\ (x-3)^2+(y+3)^2=10 \end{cases} \to \begin{cases} x^2-2x+y^2+2y+2=2 \\ x^2-6x+y^2+6y+18=10 \end{cases} \to x_1=0,\ y_1=-2;\ x_2=2,\ y_2=0$$

Puntos de corte: $A = (0, -2)$, $B = (2, 0)$, luego son secantes.

b) $A \in C_1 \cap C_2 \ \to\ A$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \ \to\ \mathcal{P}(A, C_1) = \mathcal{P}(A, C_2) = 0$

$B \in C_1 \cap C_2 \ \to\ B$ verifica las ecuaciones de C_1 y $C_2 \ \to\ \mathcal{P}(B, C_1) = \mathcal{P}(B, C_2) = 0$

c) El eje radical es la recta que pasa por A y por B.

d) Sí, pues el razonamiento del apartado b) muestra que los puntos de corte siempre tienen potencia igual a cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

68 Dos circunferencias se cortan en los puntos (0, 0) y (0, 8). ¿Cuál es su eje radical? Justifica tu respuesta.

El eje radical es la recta que pasa por (0, 0) y por (0, 8), pues los puntos de corte siempre tienen potencia cero respecto a las dos circunferencias. Luego el eje radical siempre pasa por ellos.

Eje radical: $x = 0$

69 **Escribe la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos en el eje de abscisas, sabiendo que pasa por el punto $P(8, -3)$ y que su eje mayor es igual al doble del menor.**

El eje mayor es igual al doble del menor, es decir: $a = 2b$. Además, pasa por el punto $P(8, -3)$. Luego:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{64}{4b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \to \frac{16}{b^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \to \frac{25}{b^2} = 1 \to 25 = b^2;\ a^2 = 4b^2 = 100$$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

70 **Halla la ecuación de la hipérbola centrada en el punto (4, 5), cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(6, 5)$ y cuyo semieje menor es $b = 1$.**

Centro = (4, 5)

Eje paralelo a OX

$c = dist\,(C, F) = 2$

$a^2 = 4 - 1 = 3$

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{(x-4)^2}{3} - \dfrac{(y-5)^2}{1} = 1$

71 **Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:**

- **Tiene el centro en el origen de coordenadas.**
- **Tiene los focos en el eje de abscisas.**
- **Pasa por el punto $P\left(\sqrt{5/2}, 1\right)$.**
- **Una de sus asíntotas es la recta $y = 2x$.**

Ecuación de la hipérbola: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{b}{a} = 2 \to b = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$$

Pasa por $P = \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}, 1\right)$

$$\frac{5/2}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = 1 \to \frac{10-1}{4a^2} = 1 \to 4a^2 = 9 \to a^2 = \frac{9}{4}$$

La ecuación pedida es: $\dfrac{x^2}{9/4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

72 **Halla la ecuación de la hipérbola equilátera cuyos focos son (5, 0) y (–5, 0).**

Centro = (0, 0)

$$c = 5 = \sqrt{2a^2} \to a^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

La ecuación pedida es:

$$\frac{x^2}{\frac{25}{2}} - \frac{y^2}{\frac{25}{2}} = 1$$

73 **El cometa Halley describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos, de excentricidad 0,96657. Si su distancia mínima al Sol (perihelio) es de 0,6 UA, calcula cuál es la máxima (afelio). Recuerda que 1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol.**

Focos: *Sol*, *F*

$dist\ (Halley, Sol) + dist\ (Halley, F) = 2a$

$e = \frac{c}{a} = 0{,}96657 \ \rightarrow\ c = 0{,}96657a$

Luego la distancia mínima se alcanza cuando el cometa está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 0{,}6$

$$\begin{cases} a - c = 0{,}6 \\ c = 0{,}96657a \end{cases} \rightarrow\ a = 17{,}946,\ \ c = 17{,}348$$

La distancia máxima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice opuesto al foco del Sol y es:

$2a - 0{,}6 = 2 \cdot 17{,}948 - 0{,}6 = 35{,}296$ UA

74 **La Tierra describe una órbita elíptica, estando el Sol en uno de sus focos. En esta trayectoria, la distancia mínima Tierra-Sol es de 147 095 248 km, y la máxima es de 152 100 492 km. Calcula la excentricidad de la órbita e interpreta el resultado obtenido.**

Focos: *Sol*, *F*

$dist\ mínima + dist\ máxima = 2a$

$dist\ (Tierra, Sol) + dist\ (Tierra, F) = 2a$

$147\,095\,248 + 152\,100\,492 = 2a \ \rightarrow\ a = 1{,}4960 \cdot 10^8$

La distancia mínima se alcanza cuando la Tierra está en el vértice correspondiente al foco del Sol y es:

$a - c = 147\,095\,248$

$1{,}4960 \cdot 10^8 - c = 147\,095\,248 \ \rightarrow\ c = 2{,}5048 \cdot 10^6$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2{,}5048 \cdot 10^6}{1{,}4960 \cdot 10^8} = 1{,}6743 \cdot 10^{-2} = 0{,}0167$$

Como la excentricidad es muy pequeña, la órbita es casi una circunferencia.

75 **Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que están a continuación:**

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 9$

c) $y^2 - 9x^2 = 9$

d) $2xy = 1$

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

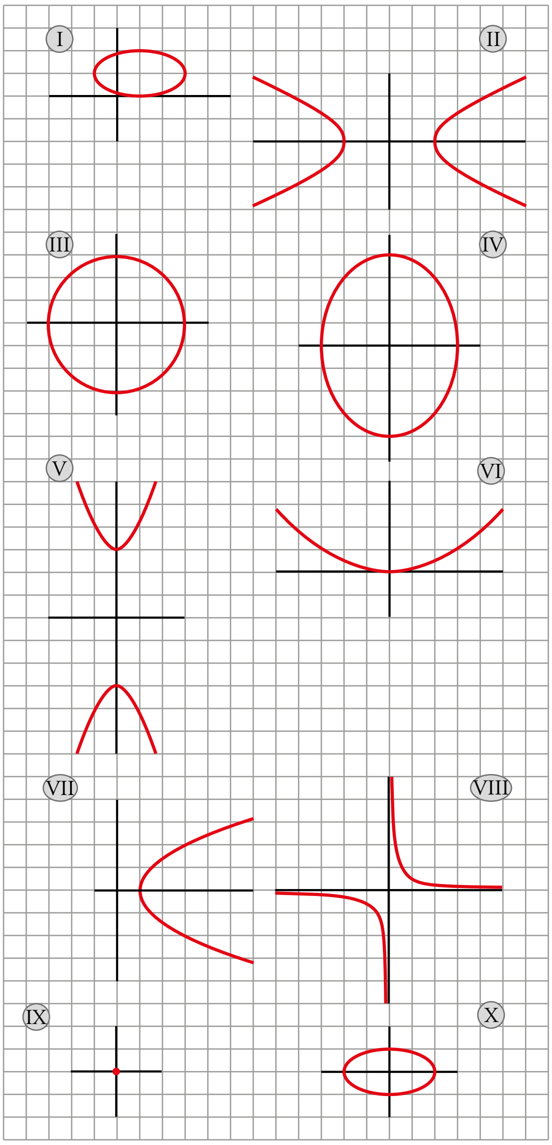
f) $\frac{x^2}{9} - y = 0$

g) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

h) $y^2 = 2(x - 1)$

i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$

j) $\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



a) X	b) III	c) V	d) VIII	e) IV
f) VI	g) II	h) VII	i) IX	j) I

Cuestiones teóricas

76 Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a cónicas. Si es así, indica qué cónica es:

a) $-\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} + 1$ **b)** $\frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} - 1$

c) $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$ **d)** $y^2 + 2y = x$

a) No es ninguna cónica porque $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1$ no es posible. La suma de dos números positivos no puede dar un resultado negativo.

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$. Hipérbola con focos en el eje OY.

c) Si es alguna cónica, es una circunferencia, pero

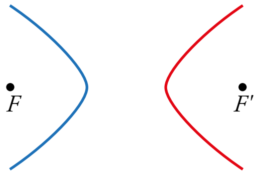
$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

es imposible porque un radio no puede ser negativo, luego no es una cónica.

d) Es una parábola $(y + 1)^2 = x + 1$

Página 229

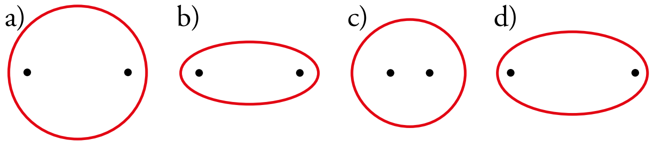
77 Sabemos que en esta hipérbola $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 4$.
¿Qué rama corresponde a $\overline{PF} - \overline{PF'} = 4$ y cuál corresponde a $\overline{PF'} - \overline{PF} = 4$?



$\overline{PF} - \overline{PF'} = 4 \to$ Los puntos están más lejos de F, luego es la rama roja.

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \to$ Los puntos están más lejos de F', luego es la rama azul.

78 Teniendo en cuenta la definición de elipse y tomando sobre el dibujo algunas medidas, di cuáles de estas elipses con sus focos están mal dibujadas:



a) Está mal dibujada porque a y b son casi iguales, luego c tiene que ser muy pequeño y, sin embargo, los focos están muy separados, siendo c la distancia al centro del foco.

b) Mal. a es la hipotenusa del triángulo que une el centro, un foco y un vértice del eje OY, y no mide igual que el semieje mayor.

c) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

d) Bien. Dibujamos el triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro de la elipse, el vértice superior de la elipse y un foco. La medida de la hipotenusa de ese triángulo es similar a la medida del semieje horizontal.

79 ¿Verdadero o falso?

a) Si la distancia de una recta al centro de una elipse es mayor que el semieje mayor, no se cortan.

b) Todas las hipérbolas equiláteras tienen la misma excentricidad.

c) Las parábolas del tipo $y^2 = -2px$ tienen excentricidad -1.

d) Por tres puntos alineados no puede pasar una circunferencia.

e) Cuanto más se alejan el foco y la directriz de una parábola, mayor es su excentricidad.

a) Verdadero.

Si la elipse tiene los focos sobre el eje Y entonces su eje mayor estará sobre este eje también.

b) Verdadero. Sabemos que en este caso $c = \sqrt{2}a$ y $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$.

c) Falso. La excentricidad de una parábola es siempre 1.

d) Verdadero. Por tres puntos alineados pasa una recta.

e) Falso. En una parábola su excentricidad es siempre 1.

Para profundizar

80 **a) Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ cuya suma de cuadrados de distancias a los puntos $A(-3, 0)$ y $B(3, 0)$ es 68. Puedes comprobar que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. ¿Cuál es su radio?**

b) Generaliza: Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de cuadrados de distancias a $A(-a, 0)$ y $B(a, 0)$ es k (constante), y comprueba que se trata de una circunferencia de centro $O(0, 0)$. Di el valor de su radio en función de a y de k. ¿Qué relación deben cumplir a y k para que realmente sea una circunferencia?

a) $P = (x, y)$

$(dist\,(P, A))^2 = (x + 3)^2 + y^2$

$(dist\,(P, B))^2 = (x - 3)^2 + y^2$

$(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 68 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 50 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = 5$

b) $(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 = k \rightarrow 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 = k \rightarrow x^2 + y^2 = \dfrac{k}{2} - a^2$

Circunferencia de centro $O = (0, 0)$ y radio $r = \sqrt{\dfrac{k}{2} - a^2}$

Para que sea una circunferencia, $\dfrac{k}{2} > a^2 \rightarrow k > 2a^2$

81 **a) Considera la circunferencia $C: (x - 1)^2 + y^2 = 25$ y el punto $P(9, 6)$. Sea r la recta que une P con el centro de la circunferencia. Halla A y B, puntos de corte de r y C. Comprueba que la potencia de P respecto a C coincide con $d(P, A) \cdot d(P, B)$.**

b) Demuestra que el apartado anterior es cierto si sustituimos r por cualquier recta secante a C que pase por P.

* ***Haz un dibujo y llama A' y B' a los puntos de corte de C y la nueva recta. Aplica semejanza a los triángulos $AB'P$ y $A'PB$.***

a) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

$O = (1, 0)$

$\overrightarrow{PO} = (8, 6) = 2(4, 3)$

Recta PO: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{3} \rightarrow 3x - 4y - 3 = 0$

Puntos de intersección:

$$\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow x_1 = -3,\ y_1 = -3;\ x_2 = 5, y_2 = 3 \rightarrow A = (-3, -3),\ B = (5, 3)$$

$\mathcal{P}(P, C) = (9 - 1)^2 + 6^2 - 25 = 75$

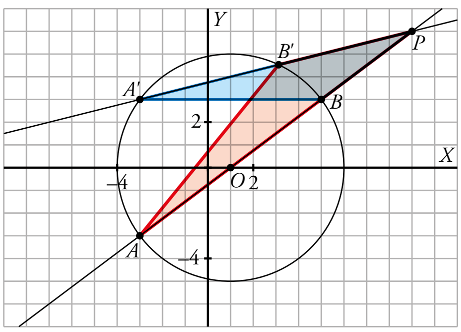
$d(P, A) \cdot d(P, B) = \sqrt{144 + 81} \cdot \sqrt{16 + 9} = 15 \cdot 5 = 75$

b) Sean dos rectas que pasan por P y son secantes a C.

Los triángulos PAB' y $PA'B$ son semejantes porque tienen un ángulo común y un ángulo inscrito con arco común, luego los lados son proporcionales:

$\dfrac{PA}{PA'} = \dfrac{PB'}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$

Luego el resultado no depende de la recta secante elegida.



82 **Calcula el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a estas rectas es 2:**

***r*: 2*x* + 3*y* = 0** **_s_: $y = \frac{2}{3}x$**

Buscamos el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$dist(P, r) \cdot dist(P, s) = 2$$

$$\frac{|2x+3y|}{\sqrt{4+9}} \cdot \frac{|2x-3y|}{\sqrt{4+9}} = 2 \rightarrow (2x+3y)(2x-3y) = 26 \rightarrow 4x^2 - 9y^2 = 26 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{26}{4}} - \frac{y^2}{\frac{26}{9}} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{13}{2}} - \frac{y^2}{\frac{26}{9}} = 1$$

Por lo tanto el lugar geométrico es una hipérbola.

AUTOEVALUACIÓN

Página 229

1 **Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:**

$r_1: x = 3$

$r_2: 3x - 4y + 1 = 0$

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist\,(X, r_1) = dist\,(X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist\,(X, r_1) = |x-3| \\ dist\,(X, r_2) = \dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}} \end{array}\right\} |x-3| = \frac{|3x-4y+1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 2x + 4y - 16 = 0 \rightarrow x + 2y - 8 = 0$

$-5(x-3) = 3x - 4y + 1 \rightarrow 8x - 4y - 14 = 0 \rightarrow 4x - 2y - 7 = 0$

2 **Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -3)$ y pasa por el punto $A(5, 0)$.**

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x-1)^2 + (y+3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$(5-1)^2 + 3^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 25$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

3 **Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y la recta $r: 3x - 4y + k = 0$. Calcula los valores que debe tomar k para que r sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Hallamos primero el centro, O, y el radio, R, de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow O = (1, 0)$ y $R = 1$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O, a la recta $r: 3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist\,(O, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|3+k|}{5}$$

- Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} < 1 \rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow k < 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} < 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} > -1 \rightarrow k > -8 \end{cases}\right\} \text{Es decir, } k \in (-8, 2).$$

- Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{cases}$$

- Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty).$$

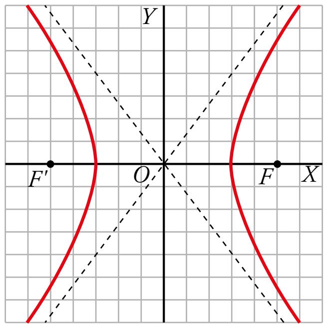
4 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **b)** $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una hipérbola en la que:

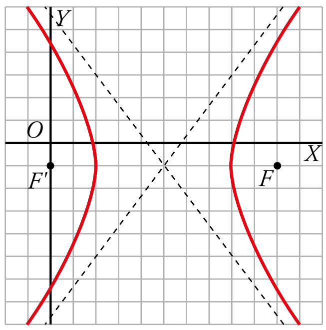
- $a = 3$, $b = 4$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$, $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$



b) $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{23}{3}$; $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$



5 **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.**

$F(-4, 0)$ $F'(4, 0)$ $exc = 0{,}8$

$c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = 4$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

6 **Escribe la ecuación de la parábola que tiene directriz $x = 3$ y como vértice, el origen de coordenadas.**

d: $x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\dfrac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\dfrac{p}{2} \rightarrow p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$.

7 **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola que tiene por ecuación: $9y^2 - 16x^2 = 144$.**

Dibújala.

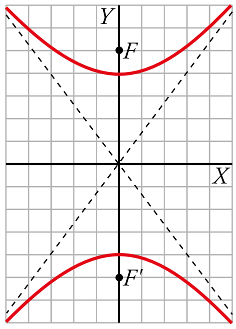
$9y^2 - 16x^2 = 144 \rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \rightarrow a = 4;\ b^2 = 9 \rightarrow b = 3;\ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

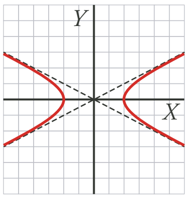
Los focos son $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$.

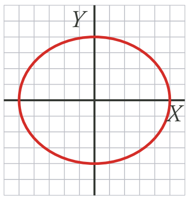
Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

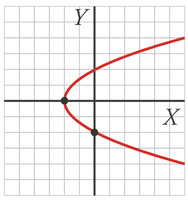
Asíntotas: $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$



8 **Indica las ecuaciones de las siguientes cónicas:**

a)


b)


c)


a) $V(2, 0);\ b = 1;\ a = 2 \rightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

b) $b = 4;\ a = 5;\ V(0, 0) \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $V(-2, 0);\ y^2 = 2p(x + 2)$

$P(0, -2)$ tiene que cumplir su ecuación $\rightarrow 4 = 2p \cdot 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow y^2 = 2(x + 2)$

9 **Dadas estas circunferencias:**

C_1**:** $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

C_2**:** $x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$

C_3**:** $x^2 + y^2 - 8x - 5y + 1 = 0$

Represéntalas y calcula su centro radical.

- Eje radical de C_1 y C_2:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{4}$

- Eje radical de C_2 y C_3:

$x^2 + y^2 - 8x - 5y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0 \rightarrow -4x + 13y - 20 = 0$

- Punto de corte de los dos ejes radicales:

$$\begin{cases} -4x + 13y - 20 = 0 \rightarrow x = -\frac{15}{16} \rightarrow P'\left(-\frac{15}{16}, \frac{5}{4}\right) \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$