

4 FÓRMULAS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 ► FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Página 115

1 Demuestra la fórmula (II.2) a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

2 Demuestra (II.3) a partir de $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\operatorname{tg} \alpha + (-\operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha (-\operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$(*) \text{ Como } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3 Demuestra la fórmula (II.3) a partir de las siguientes:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador por $\cos \alpha \cos \beta$.

4 Si $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$, halla $\cos 12^\circ$, $\operatorname{tg} 12^\circ$, $\cos 37^\circ$ y $\operatorname{tg} 37^\circ$. Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de 49° y de 25° , usando las fórmulas (I) y (II).

• $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$

$$\cos 12^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 12^\circ} = \sqrt{1 - 0,04} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 12^\circ = \frac{0,2}{0,98} = 0,2$$

• $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$

$$\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

• $49^\circ = 12^\circ + 37^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = \operatorname{sen}(12^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 12^\circ \cos 37^\circ + \cos 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\cos 49^\circ = \cos(12^\circ + 37^\circ) = \cos 12^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 37^\circ} = \frac{0,2 + 0,75}{1 - 0,2 \cdot 0,75} = 1,12$$

(Podría calcularse $\operatorname{tg} 49^\circ = \frac{\operatorname{sen} 49^\circ}{\cos 49^\circ}$).

• $25^\circ = 37^\circ - 12^\circ$, luego:

$$\operatorname{sen} 25^\circ = \operatorname{sen} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,6 \cdot 0,98 - 0,8 \cdot 0,2 = 0,428$$

$$\operatorname{cos} 25^\circ = \operatorname{cos} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{cos} 37^\circ \cos 12^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,8 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,904$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{tg} (37^\circ - 12^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ}{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ} = \frac{0,75 - 0,2}{1 + 0,75 \cdot 0,2} = 0,478$$

5 Demuestra esta igualdad:

$$\frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} &= \frac{\operatorname{cos} a \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b - \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b} \\ &= \frac{2 \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b} = \frac{\operatorname{cos} a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

6 Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo $\alpha = \beta$ en las fórmulas (I).

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

7 Halla las razones trigonométricas de 60° usando las de 30° .

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 30^\circ) = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 30^\circ) = \operatorname{cos}^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 Halla las razones trigonométricas de 90° usando las de 45° .

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 45^\circ) = \operatorname{cos}^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 45^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existe.}$$

9 Demuestra que: $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{cos} \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$$

Página 116

Hazlo tú

1 Halla $\cos 15^\circ$ y $\operatorname{tg} 15^\circ$.

$$\bullet \cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\bullet \operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

Piensa y practica

10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.

$$\bullet \cos \alpha = \cos \left(2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Por la igualdad fundamental:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades ($2.^a - 1.^a$):

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

• Por último:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

11 Sabiendo que $\cos 78^\circ = 0,2$, calcula $\operatorname{sen} 78^\circ$ y $\operatorname{tg} 78^\circ$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

$$\bullet \cos 78^\circ = 0,2$$

$$\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

$$\bullet \operatorname{sen} 39^\circ = \operatorname{sen} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

12 Halla las razones trigonométricas de 30° a partir de $\cos 60^\circ = 0,5$.

- $\cos 60^\circ = 0,5$
- $\sin 30^\circ = \sin \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-0,5}{2}} = 0,5$
- $\cos 30^\circ = \cos \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+0,5}{2}} = 0,866$
- $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}} = \sqrt{\frac{1-0,5}{1+0,5}} = 0,577$

13 Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $\cos 90^\circ = 0$.

- $\cos 90^\circ = 0$
- $\sin 45^\circ = \sin \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 90^\circ}{1+\cos 90^\circ}} = \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1$

14 Demuestra: $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1-\cos \alpha}{2} + \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (1-\cos \alpha) + \sin \alpha = \sin \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \sin \alpha \left(\frac{1-\cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

15 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} &= \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \\ \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} &= \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1-\cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1+\cos \alpha)} = \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Página 117

16 Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- Expresa en función de α y β :
 $\cos(\alpha + \beta) = \dots$ $\cos(\alpha - \beta) = \dots$
- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned} \right\}$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Sumando $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ (1)

Restando $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$ (2)

- Llamando $\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$ (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

$$(1) \rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (2) \rightarrow \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

17 Transforma en producto y calcula.

a) $\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ$ b) $\text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ$ c) $\text{cos } 75^\circ - \text{cos } 15^\circ$

$$\text{a) } \text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b) } \text{sen } 75^\circ + \text{sen } 15^\circ = 2 \text{sen } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{c) } \text{cos } 75^\circ - \text{cos } 15^\circ = -2 \text{sen } \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

18 Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha}{\text{cos } 4\alpha + \text{cos } 2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen } 4\alpha + \text{sen } 2\alpha}{\text{cos } 4\alpha + \text{cos } 2\alpha} = \frac{2 \text{sen } \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{4\alpha + 2\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 2\alpha}{2}} = \frac{2 \text{sen } 3\alpha}{2 \cos 3\alpha} = \text{tg } 3\alpha$$

2 ▶ ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Página 118

Hazlo tú

1 Resuelve $\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$.

$$\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$$

$$\text{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \text{sen} 30^\circ = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \text{sen} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos \alpha$:

$$\frac{1}{2} \text{tg} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow \text{tg} \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow \text{tg} \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \alpha_1 = 66^\circ 12' 22'' \\ \alpha_2 = 246^\circ 12' 22'' \end{cases}$$

Hazlo tú

2 Resuelve $\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$.

$$\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha - 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (1 - 2 \text{sen} \alpha) = 0$$

$$\text{Posibles soluciones: } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ \\ 1 - 2 \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 150^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

Página 119

Hazlo tú

3 Resuelve $\text{sen} 3x - \text{sen} x = 0$.

$$\text{sen} 3x - \text{sen} x = 0$$

$$2 \cos \frac{3x+x}{2} \text{sen} \frac{3x-x}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2x \text{sen} x = 0 \rightarrow \cos 2x \text{sen} x = 0$$

$$\text{Si } \cos 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 90^\circ \rightarrow x_1 = 45^\circ \\ 2x = 270^\circ \rightarrow x_2 = 135^\circ \\ 2x = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ \rightarrow x_3 = 225^\circ \\ 2x = 270^\circ + 360^\circ = 630^\circ \rightarrow x_4 = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \text{sen} x = 0 \rightarrow x_5 = 0^\circ, x_6 = 180^\circ$$

Piensa y practica

1 Resuelve.

a) $\text{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ b) $\text{sen} \alpha = \cos \alpha$ c) $\text{sen}^2 \alpha = 1$ d) $\text{sen} \alpha = \text{tg} \alpha$

a) $\alpha = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ o bien $\alpha = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$\alpha = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = \alpha \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

- c) Si $\operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad}$
 Si $\operatorname{sen} \alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad}$ } $\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$
- d) En ese caso debe ocurrir que:
 O bien $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha = k\pi \text{ rad}$
 O bien $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 2k\pi \text{ rad}$ } $\rightarrow \alpha = k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

2 Resuelve estas ecuaciones:

a) $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$

b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0$

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$

d) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3$

a) $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = -45^\circ = 315^\circ, \alpha_4 = 225^\circ$

Todas las soluciones son válidas.

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_3 = 45^\circ, \alpha_4 = 225^\circ \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \xrightarrow{(*)} 2(1 - \cos^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 3$

(*) Como $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$2 - 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0$

$\cos \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

• Si $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$

• Si $\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = -60^\circ = 300^\circ$

Las tres soluciones son válidas.

3 Transforma en producto $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$ y resuelve después la ecuación $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0$.

$\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{5\alpha+3\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{5\alpha-3\alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{8\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = 0 \\ \operatorname{sen} \alpha = 0 \end{cases}$

• Si $\cos 4\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 90^\circ & \rightarrow \alpha_1 = 22^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ & \rightarrow \alpha_2 = 67^\circ 30' \\ 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_3 = 112^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_4 = 157^\circ 30' \end{cases}$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

4 Resuelve.

a) $4 \cos 2x + 3 \cos x = 1$

b) $\operatorname{tg} 2x + 2 \cos x = 0$

c) $\sqrt{2} \cos (x/2) - \cos x = 1$

d) $2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 6 \operatorname{sen}^3 x = 0$

a) $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4 (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 4 (\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4 (2 \cos^2 \alpha - 1) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$
 $\rightarrow 8 \cos^2 \alpha - 4 + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0,625 \rightarrow \alpha_1 = 51^\circ 19' 4,13''$, $\alpha_2 = -51^\circ 19' 4,13''$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210^\circ$, $\alpha_4 = 330^\circ = -30^\circ$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90^\circ = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} - \cos \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1 + \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (\cos \alpha + 1) = 0$

• Si $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$, $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son: $\alpha_1 = 90^\circ$ y $\alpha_3 = 180^\circ$

d) $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0$

• Si $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$

• Si $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$, $\alpha_4 = 150^\circ$, $\alpha_5 = 210^\circ$, $\alpha_6 = 330^\circ$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}(180^\circ - x) = \text{cos}(270^\circ - x) + \text{cos} 180^\circ$

b) $\text{sen}(45^\circ - x) + \sqrt{2} \text{sen} x = 0$

a) $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{cos}(270^\circ - \alpha) + \text{cos} 180^\circ$

$$\text{sen} 180^\circ \text{cos} \alpha - \text{cos} 180^\circ \text{sen} \alpha = \text{cos} 270^\circ \text{cos} \alpha + \text{sen} 270^\circ \text{sen} \alpha - 1$$

$$\text{sen} \alpha = -\text{sen} \alpha - 1 \rightarrow 2 \text{sen} \alpha = -1 \rightarrow \text{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210^\circ, \alpha_2 = 330^\circ$$

b) $\text{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0$

$$\text{sen} 45^\circ \text{cos} \alpha - \text{cos} 45^\circ \text{sen} \alpha + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \text{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen} \alpha + \sqrt{2} \text{sen} \alpha = 0$$

$$\text{cos} \alpha - \text{sen} \alpha + 2 \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \text{cos} \alpha + \text{sen} \alpha = 0$$

Dividimos entre $\text{cos} \alpha$:

$$1 + \text{tg} \alpha = 0 \rightarrow \text{tg} \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135^\circ, \alpha_2 = 315^\circ$$

- 4** Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 122 del libro del alumno y de la alumna.

Página 122

- 5** ¿Verdadero o falso?

- a) Las funciones trigonométricas son periódicas.
 b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de 2π .
 c) La función *tg x* tiene periodo π .
 d) La función *cos x* es como *sen x* desplazada $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada 2π radianes.

b) Verdadero.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \\ \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x \end{array} \right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

Podemos observarlo en la gráfica de la función *tg x* en la página 122 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 122 del libro de texto.

4. Resolución de una ecuación trigonométrica factorizable

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$$

Extraemos factor común: $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

Si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

5. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos razones de un mismo ángulo

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 &\rightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \text{ o } \cos x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + k180^\circ \text{ o } x = 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. Resolución de una ecuación trigonométrica con dos ángulos y dos razones

Hazlo tú

• **Resuelve:**

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2 = 1 - \cos x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x \rightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (1 - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

7. Resolución de una ecuación trigonométrica aplicando las fórmulas de suma de senos y cosenos

Hazlo tú

• $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x} = 1$

Transformamos las sumas en productos:

$$\frac{2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2}}{2 \cos \frac{4x+2x}{2} \operatorname{sen} \frac{4x-2x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 125

1. Razones trigonométricas de $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$

- Conociendo $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, y $\operatorname{sec} \beta = 3$, $270^\circ < \beta < 360^\circ$, calcular $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ sin hallar los ángulos α y β .

Por su definición sabemos: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$

También por definición: $\operatorname{sec} \beta = \frac{1}{\operatorname{cos} \beta} \rightarrow \operatorname{cos} \beta = \frac{1}{3}$

Calcularemos $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$ a partir de la igualdad:

$$\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$\operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$ (sabemos que es negativo porque α pertenece al segundo cuadrante).

$\operatorname{sen} \beta = -\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (sabemos que es negativo porque β pertenece al cuarto cuadrante).

Por la fórmula del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) &= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos}(\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{cos}(\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{1 + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 - \frac{3}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{18 - 8\sqrt{2}}{15}}{\frac{12 + 8\sqrt{2}}{15}}} = \sqrt{\frac{2(9 - 4\sqrt{2})}{2(6 + 4\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

2. Identidades trigonométricas

- **Demostrar:** $\operatorname{cos} 3x = 4 \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} 3x &= \operatorname{cos}(2x + x) = \operatorname{cos} 2x \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = (\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x = \\ &= \operatorname{cos}^3 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^3 x - 3(1 - \operatorname{cos}^2 x) \operatorname{cos} x = \\ &= \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x + 3 \operatorname{cos}^3 x = 4 \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x \end{aligned}$$

3. Expresiones algebraicas equivalentes

- **Escribir la expresión:** $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta)$ en función de $\operatorname{cos} \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{cos}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

4. Simplificación de expresiones trigonométricas

- Simplificar esta expresión: $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \left(\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \right)^2 - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

5. Otras ecuaciones trigonométricas

- Resolver estas ecuaciones:

a) $\cos^2 (2x + 30^\circ) = \frac{1}{4}$

b) $4 \operatorname{sen} x + 4 \cos^2 x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 0$

Expresar el resultado obtenido en grados y radianes.

a) $\cos (2x + 30^\circ) = \pm \frac{1}{2}$

$$\text{Si } \cos (2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 60^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 195^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos (2x + 30^\circ) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 120^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ \rightarrow x = 105^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 120^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 285^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

- b) Si $\operatorname{tg} x = 0$ entonces $x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$; $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$ son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si $\operatorname{tg} x \neq 0$, dividimos entre esta función los dos términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 &\rightarrow \frac{4 \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 126

Para practicar

Fórmulas trigonométricas

1 Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ a partir de las de 45° .

$$\operatorname{sen}(22^\circ 30') = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(22^\circ 30') = \operatorname{cos} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}(22^\circ 30') = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

2 Si $\operatorname{cos} 78^\circ = 0,2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$ halla las razones trigonométricas de 41° y de 115° .

$$41^\circ = 78^\circ - 37^\circ$$

$$\bullet \operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\bullet \operatorname{cos} 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

Ahora ya podemos calcular:

$$\bullet \operatorname{sen} 41^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{cos} 37^\circ - \operatorname{cos} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\bullet \operatorname{cos} 41^\circ = \operatorname{cos}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \operatorname{cos} 37^\circ + \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\bullet \operatorname{tg} 41^\circ = \frac{\operatorname{sen} 41^\circ}{\operatorname{cos} 41^\circ} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$$

$$\bullet \operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{cos} 37^\circ + \operatorname{cos} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$$

$$\bullet \operatorname{cos} 115^\circ = \operatorname{cos}(78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \operatorname{cos} 37^\circ - \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$$

$$\bullet \operatorname{tg} 115^\circ = \frac{\operatorname{sen} 115^\circ}{\operatorname{cos} 115^\circ} = -\frac{0,904}{0,428} = -2,112$$

3 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de 75° a partir de las de 30° y 45° .

b) Utilizando los resultados del apartado a), calcula las razones trigonométricas de 105° ; 165° ; 15° ; 195° y 135° .

$$\text{a) } \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{cos} 45^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \operatorname{cos} 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$$

$$b) \operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} (30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 75^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos (30^\circ + 75^\circ) = \cos 30^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ + \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 165^\circ = \cos (90^\circ + 75^\circ) = \cos 90^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen} (90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ - \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos (90^\circ - 75^\circ) = \cos 90^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 195^\circ = \operatorname{sen} (270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos 75^\circ - \cos 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 195^\circ = \cos (270^\circ - 75^\circ) = \cos 270^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 195^\circ = -\frac{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 180^\circ \cos 45^\circ - \cos 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \cos (180^\circ - 45^\circ) = \cos 180^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = -\cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

4 Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{-7}{25}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) **y** $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$ ($180^\circ < \beta < 270^\circ$), **calcula** $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Usamos la relación $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para calcular $\operatorname{sen} \alpha$:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{24}{25} \text{ porque el ángulo está en el } 3.\text{er cuadrante.}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cos \beta$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ porque también pertenece al tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Como $360^\circ < \alpha + \beta < 540^\circ$, dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que $180^\circ < \frac{\alpha + \beta}{2} < 270^\circ$.

Por tanto, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ pertenece al tercer cuadrante y la tangente de $\frac{\alpha + \beta}{2}$ es positiva.

$$\text{Calculamos } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Por tanto, } \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{1 + \cos(\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - (-3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$$

5 Si $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$ y $\alpha < 270^\circ$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \cos \alpha = 9 + 9 \cos \alpha \rightarrow 10 \cos \alpha = -8 \rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

6 Si $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{6}$ y $\alpha < 90^\circ$, halla $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como α está en el primer cuadrante, solo puede darse que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cos \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 - \sqrt{7}}{3} \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{7 - \sqrt{7}} \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2(7 - \sqrt{7})}}$$

7 Si sabemos que $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$ y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, halla $\cos 2\alpha$, sin hallar el ángulo α .

Nos dicen que el ángulo está en el tercer cuadrante, por lo que su coseno será negativo y el seno también. En cambio $\frac{\alpha}{2}$ estará en el segundo cuadrante y tendrá seno positivo y coseno negativo.

Queremos encontrar $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$ por lo que buscaremos $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha$.

$$\text{Calculamos: } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Por las fórmulas del ángulo medio: } -\frac{1}{3} = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } \frac{1}{9} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{7}{9}$$

$$\text{Por otra parte: } \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Así podemos volver al principio y sustituir:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{49}{81} - \frac{32}{81} = \frac{17}{81}$$

- 10** Si sabemos que $\operatorname{cosec} \alpha = 2,5$ y $\operatorname{sec} \beta = 1,25$, comprueba, sin hallar los ángulos α y β , que el valor aproximado de $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta)$ es 0,57.

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = 2,5 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

Aplicando la igualdad fundamental: $\operatorname{cos} \alpha = \sqrt{1 - 0,4^2} = 0,917$

$$\operatorname{sec} \beta = \frac{1}{\operatorname{cos} \beta} = 1,25 \rightarrow \operatorname{cos} \beta = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Aplicando la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 0,436$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = 0,75$$

Por otro lado sabemos que $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$ y $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$:

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{1 - 0,436 \cdot 0,75}{0,436 + 0,75} = 0,567$$

- 11** Si llamamos $\operatorname{tg} \alpha = t$, escribe $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\operatorname{cos} 2\alpha$ en función de t .

Como $\frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 1 + t^2 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2}$

Por la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

Por las fórmulas del ángulo doble:

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Finalmente, aplicando la igualdad fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)^2 = 1 - \frac{1 - 2t^2 + t^4}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1 + 2t^2 + t^4 - (1 - 2t^2 + t^4)}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} \rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{2t}{1 + t}$$

- 12** Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de α , y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{cos}(\alpha - 45^\circ)$

b) $\frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

c) $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha$

a) $\operatorname{sen}(45^\circ + \alpha) - \operatorname{cos}(\alpha - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha - (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} 45^\circ + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 45^\circ) =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

b) $\frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{(\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha$

c) $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{(1 + \operatorname{cos} \alpha)}{2} \cdot \frac{(1 - \operatorname{cos} \alpha)}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{4}$

13 Simplifica estas expresiones:

a) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\cot g x + \operatorname{tg} x}$

b) $\frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{cosec} x}{\cot g x + \operatorname{tg} x} &= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x \left(\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \right)} = \frac{1}{\cos x \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)} = \frac{1}{\cos x} = \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)} &= \frac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = -\frac{(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \\ &= -(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = -1 \end{aligned}$$

Identidades trigonométricas

14 ¿Verdadero o falso? Desarrolla y comprueba.

a) $\operatorname{sen}(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$

b) $\cos(270^\circ + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$

c) $\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

d) $\cos(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$

e) Si $\alpha + \beta = 120^\circ$, entonces: $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \sqrt{3}$

a) Verdadero.

Por la fórmula del ángulo suma: $\operatorname{sen}(\alpha + 270^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \cos 270^\circ + \cos \alpha \operatorname{sen} 270^\circ$

Como sabemos el seno y coseno de 270° , sustituimos:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos 270^\circ + \cos \alpha \operatorname{sen} 270^\circ = \operatorname{sen} \alpha \cdot 0 + \cos \alpha \cdot (-1) = -\cos \alpha$$

b) Verdadero.

$$\cos(\alpha + 270^\circ) = \cos \alpha \cos 270^\circ - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 270^\circ = \cos \alpha \cdot 0 - (-1) \cdot (\operatorname{sen} \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

c) Falso.

$$\operatorname{sen}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos \alpha - \cos 270^\circ \operatorname{sen} \alpha = -1 \cos \alpha - 0 = -\cos \alpha$$

d) Verdadero.

$$\cos(270^\circ - \alpha) = \cos 270^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} \alpha = 0 - 1 \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha$$

e) Verdadero.

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

15 Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:

a) $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha$

c) $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

d) $\frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{a) } (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 &= \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \\ &= \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$b) \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot 1 = \operatorname{sen} \alpha$$

$$c) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$d) \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) =$$

$$= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha =$$

$$= 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$$

16 Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:

$$a) \cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$$

$$b) \operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$a) \cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - (\cos x \cos 120^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ) =$$

$$= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cos 120^\circ + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ =$$

$$= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cdot (-\cos 60^\circ) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ =$$

$$= 2 \cos x \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$b) \operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - (-1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

17 Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:

$$a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta$$

$$b) \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

* En b), divide numerador y denominador entre $\cos \alpha \cos \beta$.

$$a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta =$$

$$= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos \beta = \cos \beta$$

$$b) \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$$

18 Demuestra.

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

a) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) =$
 $= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta =$
 $= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

19 Demuestra la igualdad $\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \operatorname{cosec} \alpha$.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{2 \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{1 + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)}{\pm 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{\frac{1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}{\pm 2 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{2}{\pm 2(1 + \cos \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} = \frac{1}{\pm (1 + \cos \alpha) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

Por tanto, la igualdad queda demostrada.

20 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

b) $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

c) $\operatorname{cotg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha$

d) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1}{\cos x}$

e) $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \operatorname{cosec}^2 x$

a) $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

b) Falso.

Basta con comprobar que no se cumple para $\alpha = 0$:

$$2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin \alpha = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha; \text{ para } \alpha = 0 \rightarrow 0 - 0 = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{\cos 0^\circ} = 1$.

c) Verdadero.

$$\begin{aligned} \cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - \cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

d) Falso.

Igual que en el apartado b) probamos qué pasa para $\alpha = 0$:

$$\frac{1-0}{1} - \frac{1}{1-0} = 1 - 1 = 0$$

Sin embargo, $\frac{1}{\cos \alpha} = 1$.

e) Verdadero.

$$\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha + 1 + \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 2 \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

21 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades:

a) $\operatorname{sen} 130^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\operatorname{sen} 130^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{130^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 90^\circ \cos 40^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 127

Ángulos en radianes

22 Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 3,2$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ$$

$$\frac{4\pi}{9} \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{9} = 80^\circ$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$1,5 \text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

$$3,2 \text{ rad} = \frac{3,2 \cdot 180^\circ}{\pi} = 183^\circ 20' 47''$$

23 Pasa a radianes estos ángulos. Exprésalos en función de π :

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$108^\circ = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$$

$$72^\circ = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

$$126^\circ = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10} \text{ rad}$$

$$480^\circ = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad}$$

24 Prueba que:

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

25 Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

a) $5 \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} - \operatorname{cos} 0 + 2 \operatorname{cos} \pi - \operatorname{cos} \frac{3\pi}{2} + \operatorname{cos} 2\pi$

b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$

c) $\operatorname{cos} \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3} \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

26 Halla las razones trigonométricas de estos ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) 0,8 rad

b) 3,2 rad

c) 2 rad

d) 4,5 rad

e) $\frac{\pi}{8}$ rad

f) $\frac{7\pi}{4}$ rad

g) $\frac{3\pi}{5}$ rad

h) $1,2\pi$ rad

* Ten en cuenta: $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$; $\pi \approx 3,14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$; $2\pi \approx 6,28$

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a) $\operatorname{sen} 0,8 = 0,72$

$\operatorname{cos} 0,8 = 0,69$

$\operatorname{tg} 0,8 = 1,03 \rightarrow$ Cuadrante I

b) $\operatorname{sen} 3,2 = -0,06$

$\operatorname{cos} 3,2 = -1$

$\operatorname{tg} 3,2 = 0,06 \rightarrow$ Cuadrante III

c) $\operatorname{sen} 2 = 0,91$

$\operatorname{cos} 2 = -0,42$

$\operatorname{tg} 2 = -2,19 \rightarrow$ Cuadrante II

d) $\operatorname{sen} 4,5 = -0,98$

$\operatorname{cos} 4,5 = -0,21$

$\operatorname{tg} 4,5 = 4,64 \rightarrow$ Cuadrante III

e) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = 0,38$

$\operatorname{cos} \frac{\pi}{8} = 0,92$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41 \rightarrow$ Cuadrante I

f) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -0,71$

$\operatorname{cos} \frac{7\pi}{4} = 0,71$

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Cuadrante IV

g) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} = 0,95$

$\operatorname{cos} \frac{3\pi}{5} = -0,31$

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -3,08 \rightarrow$ Cuadrante II

h) $\operatorname{sen} 1,2\pi = -0,59$

$\operatorname{cos} 1,2\pi = -0,81$

$\operatorname{tg} 1,2\pi = 0,73 \rightarrow$ Cuadrante III

27 En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo α tales que:

- | | |
|--|--|
| a) $\text{sen } \alpha = 0,32$ | b) $\text{cos } \alpha = 0,58$ |
| c) $\text{tg } \alpha = -1,5$ | d) $\text{sen } \alpha = -0,63$ |
| a) $\alpha_1 = 0,33; \alpha_2 = 2,82$ | b) $\alpha_1 = 0,95; \alpha_2 = 5,33$ |
| c) $\alpha_1 = -0,98; \alpha_2 = 2,16$ | d) $\alpha_1 = -0,68; \alpha_2 = 3,82$ |

Ecuaciones trigonométricas

28 Resuelve las siguientes ecuaciones:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $2 \text{sen}^2 x = 1$ | b) $3 \text{tg}^2 x - 1 = 0$ |
| c) $1 - 4 \text{cos}^2 x = 0$ | d) $3 \text{tg} x + 4 = 0$ |

$$a) 2 \text{sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot k$

$$b) 3 \text{tg}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{tg } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\bullet \text{ Si } \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\bullet \text{ Si } \text{tg } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$c) 1 - 4 \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow \text{cos}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \text{cos } x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ Si } \text{cos } x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\bullet \text{ Si } \text{cos } x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$d) 3 \text{tg} x + 4 = 0 \rightarrow \text{tg } x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k; x = 306^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k$$

29 Resuelve estas ecuaciones:

- | | |
|--|---|
| a) $2 \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x + 1 = 0$ | b) $\text{sen}^2 x - \text{sen } x = 0$ |
| c) $2 \text{cos}^2 x - \sqrt{3} \text{cos } x = 0$ | d) $2 \text{cos}^2 x + \text{sen } x = 1$ |

$$a) 2 \text{cos}^2 x - \frac{\text{sen}^2 x + 1}{\text{cos}^2 x} = 0 \left. \vphantom{2 \text{cos}^2 x} \right\} \rightarrow 2 \text{cos}^2 x + \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow 3 \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{cos}^2 x = 0 \rightarrow \text{cos } x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podemos expresar como:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_3 = 90^\circ \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, de otra forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k\pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 así incluye las soluciones x_1 y x_2 anteriores)

$$c) \operatorname{cos} x (2 \operatorname{cos} x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{cos} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$d) 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210^\circ, x_3 = 330^\circ \end{cases}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

30 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$

b) $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0$

c) $\operatorname{cos} 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cos} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{cos} 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \operatorname{cos}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{cos} x (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\operatorname{sen} x| \leq 1 \end{cases}$$

Comprobamos que la dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x &= 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x &= 0 \rightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

31 Resuelve.

$$\text{a) } \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{b) } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$$

$$\text{c) } 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$$

$$\text{d) } 4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1 + \cos x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} &= 0 \rightarrow 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + 1 &= \cos x \rightarrow 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible, pues } |\cos x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Luego: $x = k \cdot 360^\circ = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 2 \cdot \frac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 &\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 300^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 4(1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0 &\rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos^4 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 4 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

32 Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea $\operatorname{tg} x$ y resuélvelas:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

b) $\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

c) $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre $\cos x$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k$$

c) Dividimos toda la ecuación entre $\cos^2 x$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

• Si $\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si $\operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

33 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x - \pi) = 2$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$

a) $\sqrt{3} \left(\cos \frac{3\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} x \right) + \cos x \cos \pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 2 = \cos x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = \cos^2 x \rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2 \text{ No vale.}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2 \text{ Vale.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 &\rightarrow -\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

Dividimos los dos miembros entre $\cos x$:

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 1 &\rightarrow 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \\ \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} - \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2} \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \\ \rightarrow -2 \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 + \cos x \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x &\rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Si } \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

$$\bullet \text{ Si } \cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$\bullet \text{ Si } x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \text{ Vale.}$$

$$\bullet \text{ Si } x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) = -2 \neq 1 \text{ No vale.}$$

$$\bullet \text{ Si } x = \pi \rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} - \pi \right) = 1 \text{ Vale.}$$

34 Resuelve.

a) $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{cos} \frac{x}{2} = \sqrt{2}$

b) $\operatorname{cos} 3x + \operatorname{cos} x = 2 \cdot \operatorname{cos} 210^\circ \cdot \operatorname{cos} x$

c) $4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{cos} x = 3$

a) Aplicamos las fórmulas del ángulo mitad:

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{cos} x}{2}} + \sqrt{\frac{1+\operatorname{cos} x}{2}} = \sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\frac{1-\operatorname{cos} x}{2} + \frac{1+\operatorname{cos} x}{2} + 2\sqrt{\frac{1-\operatorname{cos} x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\operatorname{cos} x}{2}} = 2$$

$$1 + 2\sqrt{\frac{1-\operatorname{cos}^2 x}{4}} = 2 \rightarrow 1 + 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right) = 2 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k$$

Como hemos elevado al cuadrado debemos comprobar que las soluciones son válidas y observamos que cuando k es impar, el valor de α que resulta no es solución de la ecuación pero cuando k es par, sí que lo es.

Por tanto, la solución es: $x = 90^\circ + 720^\circ k$

b) Aplicando las fórmulas de la suma de cosenos:

$$2 \operatorname{cos} 2x \cdot \operatorname{cos} x = 2 \operatorname{cos} 210^\circ \cdot \operatorname{cos} x$$

Si $\operatorname{cos} x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90^\circ + 180^\circ k$

Si $\operatorname{cos} x \neq 0$:

$$2 \operatorname{cos} 2x = 2 \operatorname{cos} 210^\circ \rightarrow \operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos} 210^\circ$$

Por tanto:

$$2x = 210^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 105^\circ + 180^\circ k$$

Y como $\operatorname{cos} 210^\circ = \operatorname{cos} 150^\circ$:

$$2x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 180^\circ k$$

Solución: $x = 90^\circ + 180^\circ$; $x = 105^\circ + 180^\circ k$; $x = 75^\circ + 180^\circ k$

c) Aplicando la fórmula del ángulo medio y restando $\operatorname{cos} x$:

$$4\sqrt{\frac{1-\operatorname{cos} x}{2}} = 3 - \operatorname{cos} x$$

Ahora elevamos al cuadrado:

$$\frac{16(1-\operatorname{cos} x)}{2} = 9 + \operatorname{cos}^2 x - 6 \operatorname{cos} x \rightarrow 8 - 8 \operatorname{cos} x - 9 - \operatorname{cos}^2 x + 6 \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos}^2 x + 2 \operatorname{cos} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ k$$

De nuevo, si comprobamos las soluciones, observamos que para valores impares de k , el valor de x obtenido no es solución de la ecuación mientras que para los valores pares sí que lo es, por tanto, la solución es: $x = 180^\circ + 720^\circ k$.

35 Resuelve transformando en producto.

a) $\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x = 2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x$

b) $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x = 2 \cdot \operatorname{sen} 240^\circ \cdot \cos x$

a) Por las fórmulas de la resta de senos:

$$2 \cos 5x \cdot \operatorname{sen} x = 2 \cos 60^\circ \cdot \operatorname{sen} x$$

Si $\operatorname{sen} x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 0^\circ + 180^\circ k$

Si $\operatorname{sen} x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $\operatorname{sen} x$:

$$2 \cos 5x = 2 \cos 60^\circ \rightarrow \cos 5x = \cos 60^\circ \rightarrow 5x = 60^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 12^\circ + 72^\circ k$$

Como $\cos 60^\circ = \cos 300^\circ$:

$$2 \cos 5x = 2 \cos 60^\circ \rightarrow 2 \cos 5x = 2 \cos 300^\circ \rightarrow \cos 5x = \cos 300^\circ \rightarrow 5x = 300^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 60^\circ + 72^\circ k$$

Solución: $x = 0^\circ + 180^\circ k$; $x = 12^\circ + 72^\circ k$; $x = 60^\circ + 72^\circ k$

b) Por la fórmula de la suma de los senos:

$$2 \operatorname{sen} 4x \cos x = 2 \operatorname{sen} 240^\circ \cos x$$

Si $\cos x = 0$, la ecuación se cumple: $x = 90^\circ + 180^\circ k$

Si $\cos x \neq 0$, dividimos ambos miembros de la ecuación por $\cos x$:

$$2 \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow 4x = 240^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 60^\circ + 60^\circ k$$

Como $\operatorname{sen} 240^\circ = \operatorname{sen} 300^\circ$:

$$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 240^\circ \rightarrow \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 300^\circ \rightarrow 4x = 300^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 90^\circ k$$

Solución: $x = 90^\circ + 180^\circ k$; $x = 60^\circ + 72^\circ k$; $x = 75^\circ + 90^\circ k$

36 Resuelve.

a)
$$\begin{cases} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* *Da las soluciones del intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.*

a) De la segunda ecuación sabemos que $x = \operatorname{sen}^2 y$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $\operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 2 \rightarrow \operatorname{sen}^2 y = 1 \rightarrow x = 1$

Por tanto: $1 = \operatorname{sen}^2 y \rightarrow \operatorname{sen} y = \pm 1 \rightarrow y = 90^\circ, y = 270^\circ$

Soluciones: $x = 1, y = 90^\circ$; $x = 1, y = 270^\circ$

b) Restamos las ecuaciones (1.ª ecuación - 2.ª ecuación)

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ$$

Volviendo a la primera ecuación:

$$\cos^2 y = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 45^\circ, y = 315^\circ$

Si $\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = 135^\circ, y = 225^\circ$

Soluciones:

$x = 0^\circ, y = 45^\circ$

$x = 0^\circ, y = 135^\circ$

$x = 0^\circ, y = 315^\circ$

$x = 0^\circ, y = 225^\circ$

$x = 180^\circ, y = 45^\circ$

$x = 180^\circ, y = 135^\circ$

$x = 180^\circ, y = 315^\circ$

$x = 180^\circ, y = 225^\circ$

37 Elige la respuesta correcta: «Las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ son»:

- a) $\frac{17\pi}{12}$ y $\frac{23\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{7\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{12}$ y $\frac{11\pi}{12}$

Veamos que la solución correcta es a).

Para que se cumpla la igualdad dada se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

De la primera igualdad: $x = -\frac{\pi}{12} = 2\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$

De la segunda igualdad: $x = -7\frac{\pi}{12} = 2\pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{17\pi}{12}$

Página 128

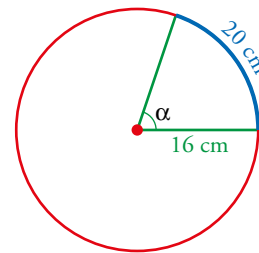
Para resolver

38 En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.

Como la circunferencia completa (100,53 cm) son 2π rad, entonces:

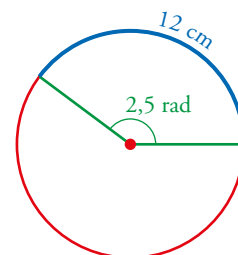
$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,25 = 71^\circ 37' 11''$$



39 En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?

$$\frac{2,5 \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{12 \text{ cm}}{R \text{ cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8 \text{ cm}$$



40 Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y 2π tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de $\frac{19\pi}{5}$.

Como $\frac{19}{5} = 3,8$, el ángulo α dado verifica $2\pi < \alpha < 4\pi$, luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

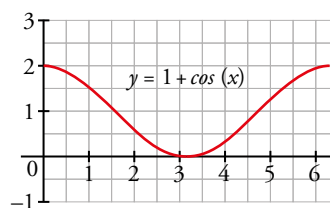
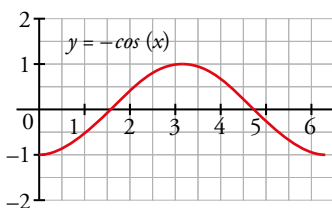
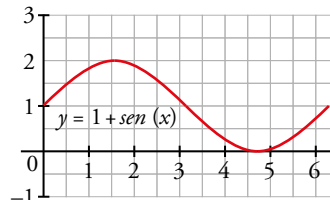
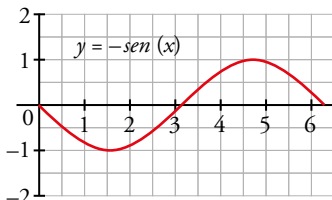
Si le restamos una vuelta (2π) obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$ y $0 < \frac{9\pi}{5} \text{ rad} < 2\pi$.

41 Haz una tabla de valores como la de la página 122 para cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente en el intervalo $[0, 2\pi)$:

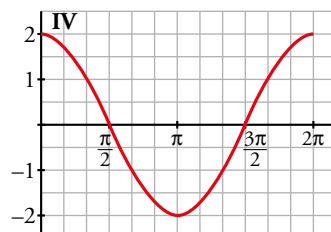
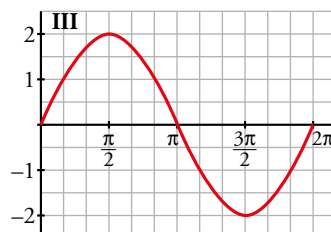
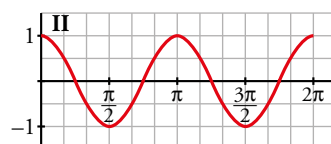
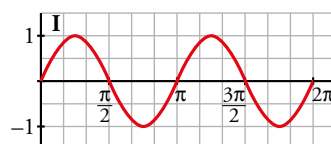
- a) $y = -\text{sen } x$ b) $y = 1 + \text{sen } x$ c) $y = -\text{cos } x$ d) $y = 1 + \text{cos } x$

Grad (°)	rad	$-\text{sen } x$	$1 + \text{sen } x$	$-\text{cos } x$	$1 + \text{cos } x$
0	0	0	1	-1	2
30	$\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$
45	$\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$
60	$\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
90	$\pi/2$	-1	2	0	1
120	$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
135	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
150	$5\pi/6$	$-1/2$	$3/2$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$
180	π	0	1	1	0
210	$7\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$
225	$5\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$
240	$4\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/2$
270	$3\pi/2$	1	0	0	1
300	$5\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1 - \sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/2$
315	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$1 - \sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1 + \sqrt{2}/2$
330	$11\pi/6$	$1/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1 + \sqrt{3}/2$
360	2π	0	1	-1	2



42 Asocia a cada una de estas funciones su gráfica:

- a) $y = 2 \text{sen } x$ b) $y = \text{cos } 2x$ c) $y = 2 \text{cos } x$ d) $y = \text{sen } 2x$



- a) Gráfica III.
b) Gráfica II.
c) Gráfica IV.
d) Gráfica I.

43 En un triángulo ABC conocemos $\hat{B} = 45^\circ$ y $\cos \hat{A} = -1/5$. Calcula, sin hallar los ángulos \hat{A} y \hat{C} , las razones trigonométricas del ángulo \hat{C} .

Calculamos primero las razones trigonométricas de \hat{A} y de \hat{B} .

$$\text{sen}^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow \text{sen} \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180^\circ.$$

$$\text{sen} \hat{B} = \text{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{sen} \hat{C} &= \text{sen} (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \text{sen} 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) - \cos 180^\circ \text{sen} (\hat{A} + \hat{B}) = \text{sen} (\hat{A} + \hat{B}) = \\ &= \text{sen} \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \text{sen} \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \hat{C} &= \cos (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \cos 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) + \text{sen} 180^\circ \text{sen} (\hat{A} + \hat{B}) = -\cos (\hat{A} + \hat{B}) = \\ &= -(\cos \hat{A} \cos \hat{B} - \text{sen} \hat{A} \text{sen} \hat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\text{tg} \hat{C} = \frac{\text{sen} \hat{C}}{\cos \hat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

44 Si $\text{sen} x \cdot \cos x = 0,25$ comprueba sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora, que $\text{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$.

Según el enunciado:

$$\begin{aligned} \text{sen} x \cos x = 1/4 \rightarrow \text{sen} x \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1/4 \rightarrow \text{sen}^2 x (1 - \text{sen}^2 x) = 1/16 \rightarrow \\ \rightarrow \text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x + 1/16 = 0 \end{aligned}$$

Obtenemos, por tanto, una ecuación bicuadrada en la que obtenemos como soluciones:

$$\text{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } \text{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Si comprobamos las soluciones en la ecuación inicial, observamos que solo son válidas las soluciones:

$$\text{sen} x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ o bien } \text{sen} x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Por otra parte, sabemos:

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \frac{\text{sen} x}{1/(4 \text{sen} x)} = 4 \text{sen}^2 x$$

$$\text{Si } \text{sen} x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \text{tg} x = 4 \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{Si } \text{sen} x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \text{tg} x = 4 \left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

45 Demuestra estas igualdades:

a) $\frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} 2\alpha - \text{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$

b) $\text{sen} 3x = 3\text{sen} x - 4 \text{sen}^3 x$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} 2\alpha - \text{tg} \alpha} &= \frac{\text{tg} \alpha}{\frac{2 \text{tg} \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} - \text{tg} \alpha} = \frac{\text{tg} \alpha (1 - \text{tg}^2 \alpha)}{2 \text{tg} \alpha - \text{tg} \alpha (1 - \text{tg}^2 \alpha)} = \frac{\text{tg} \alpha (1 - \text{tg}^2 \alpha)}{\text{tg} \alpha + \text{tg}^3 \alpha} = \frac{\text{tg} \alpha (1 - \text{tg}^2 \alpha)}{\text{tg} \alpha (1 + \text{tg}^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

Podemos aplicar la fórmula de la suma de senos:

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x (2 - 4 \operatorname{sen}^2 x)$$

Aplicamos la fórmula del ángulo doble:

$$\begin{aligned} 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x (2 - 4 \operatorname{sen}^2 x) \rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x - 2 + 4 \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x (2 \cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x - 2) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x (2 - 2) = 0 \rightarrow 0 = 0 \end{aligned}$$

Todos los valores de x son solución de la igualdad y, por tanto, es cierta.

46 Simplifica.

a) $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$

b) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \frac{2(\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)(\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2(\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (2\alpha) &= \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = -\operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

47 Resuelve estas ecuaciones:

a) $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

b) $\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

d) $\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$

$$\text{a) } \frac{2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} (2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 30^\circ \rightarrow x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150^\circ \rightarrow x_2 = 75^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390^\circ \rightarrow x_3 = 195^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510^\circ \rightarrow x_4 = 255^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

$$\text{b) } \frac{2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{cases}$$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 3x - \cos x \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x \rightarrow$ (Dividimos entre $2 \operatorname{sen} x$)

$$\rightarrow \cos 2x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{aligned} 2x &= 315^\circ \rightarrow x_1 = 157,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 135^\circ \rightarrow x_2 = 67,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 675^\circ \rightarrow x_3 = 337,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x &= 495^\circ \rightarrow x_4 = 247,5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$$x = 67,5^\circ + k \cdot 90^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

48 a) Demuestra: $\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

b) Utiliza el resultado del apartado a) para demostrar:

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\begin{aligned} & \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \stackrel{(*)}{=} \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ & = 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \beta)} = \\ & = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

(*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) &= \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] = \\ &= \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] \cdot \left[-2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{-\beta}{2} \right] = \left[2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] = \\ &= 4 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \\ &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

(*) Por el apartado anterior.

49 En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos α y β .

Llamamos $\gamma = \alpha - \beta$.

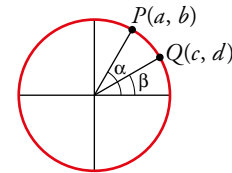
a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a $\operatorname{sen} \gamma$?

- I. $ac + bd$ II. $bc - ad$
III. $ad - bc$ IV. $ab + cd$

b) ¿Alguna de ellas es igual a $\cos \gamma$?

a) $\operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = bc - ad$ (II)

b) $\cos \gamma = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = bd + ac$ (I)



50 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a)
$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 1 \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \cos y = 1 \end{cases}$$

a) De la segunda ecuación: $2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$

Como:

$$\begin{aligned} x + y = 120^\circ &\rightarrow 2 \cos 60^\circ \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ \end{aligned}$$

Así: $x + y = 120^\circ$

$x - y = 60^\circ$

$2x = 180^\circ \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ$

Luego la solución es $(90^\circ, 30^\circ)$

b) $x + y = 90^\circ \rightarrow$ complementarios $\rightarrow \operatorname{sen} x = \cos y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$\cos y + \cos y = 1 \rightarrow 2 \cos y = 1 \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ \rightarrow x = 90^\circ - y = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Luego la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$

c) Como
$$\begin{cases} \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y \\ \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \end{cases}$$

El sistema queda:

$$\left. \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \end{cases}$$

$-2 \operatorname{sen}^2 y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0^\circ$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\cos^2 x - 0 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 = \begin{cases} \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ \cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ \in 2.^\circ \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es: $(0^\circ, 0^\circ)$

$$d) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \cos y = 1 \end{cases} \rightarrow \cos y = 1 - \operatorname{sen} x$$

$$4 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, la solución es: $(30^\circ, 60^\circ)$.

51 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$a) \begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3} \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \operatorname{sen}(x - y) = 1/2 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos y = 1/2 \\ \operatorname{cosec} x + \sec y = -1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} - \cos x \\ \cos x \left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \cos x - \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x + 2 \cos^2 x = 1$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Si $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

$$\cos y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$$

• Si $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi \\ x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi \end{cases}$

$$\text{Soluciones: } \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$$

$$b) y = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\sqrt{3} \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x = \operatorname{sen} x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$3 \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

• Si $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ y } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ vale.}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ no puede ser porque no está en el intervalo dado.}$$

• Si $\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoco es posible por el mismo motivo.

c) De la primera ecuación tenemos:

$$x - y = 30 \text{ o bien } x - y = 150$$

De la segunda ecuación tenemos:

$$x + y = 90 \text{ o bien } x + y = 270$$

Tenemos que resolver 4 sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 120 \rightarrow x = 60 \rightarrow y = 30$$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 240 \rightarrow x = 120 \rightarrow y = 330$$

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ x + y = 270 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 300 \rightarrow x = 150 \rightarrow y = 120$$

$$\begin{cases} x - y = 150 \\ x + y = 270 \end{cases}$$

$$\text{Sumando las dos ecuaciones: } 2x = 420 \rightarrow x = 210 \rightarrow y = 60$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 60^\circ, y_1 = 30^\circ; x_2 = 120^\circ, y_2 = 330^\circ; x_3 = 150^\circ, y_3 = 120^\circ; x_4 = 210^\circ, y_4 = 60^\circ$$

d) De la primera ecuación tenemos que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} - \cos y$, y sustituimos en la segunda ecuación:

$$\operatorname{cosec} x + \sec y = -1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos y} = -1 \rightarrow \frac{\cos y + \frac{1}{2} - \cos y}{\left(\frac{1}{2} - \cos y\right) \cos y} = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos^2 y - \frac{1}{2} \cos y - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \cos y = 1 \text{ o bien } \cos y = -1/2$$

$$\text{Si } \cos y = 1 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Si } \cos y = -1/2 \rightarrow y_1 = 120, y_2 = 240$$

$$\text{Volvemos a la primera ecuación: } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} - \cos y$$

$$\text{Si } \cos y = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = -1/2 \rightarrow x_1 = 330, x_2 = 210$$

$$\text{Si } \cos y = -1/2 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90$$

$$\text{Soluciones: } x_1 = 330^\circ, y_1 = 0^\circ; x_2 = 210^\circ, y_2 = 0^\circ; x_3 = 90^\circ, y_3 = 120^\circ; x_4 = 90^\circ, y_4 = 240^\circ$$

52 Halla los valores de α y β para los que se cumple la igualdad $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$.

$$\text{Como } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta, \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$

Esta relación es cierta, obviamente si $\alpha = \beta$.

Por otro lado, dividiendo entre $\cos \alpha \cos \beta$ se tiene que $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$, luego los ángulos α y β deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$ por la periodicidad de la función $y = \operatorname{tg} x$.

Si $\cos \alpha = 0$ entonces $0 = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 0$ ya que $\operatorname{sen} \alpha = \pm 1$.

Por tanto, la relación también es cierta si α y β son simultáneamente de la forma $90^\circ + 360^\circ \cdot k$ o $270^\circ + 360^\circ \cdot k$.

En resumen, se verifica la igualdad cuando $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$.

53 Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de x se verifica cada una de estas igualdades:

a) $\text{sen } 2x - \text{sen } (x - 60^\circ) = 0$

b) $\text{cos } (2x + 60^\circ) - \text{cos } (x - 45^\circ) = 0$

c) $\text{cos } (2x - 30^\circ) - \text{cos } (x + 45^\circ) = 0$

a) $\text{sen } 2x - \text{sen } (x - 60^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2 \text{cos } \frac{2x + x - 60^\circ}{2} \text{sen } \frac{2x - (x - 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{cos } \frac{3x - 60^\circ}{2} \text{sen } \frac{x + 60^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \text{cos } \frac{3x - 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 80^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x - 60^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 200^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 320^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } \frac{x + 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 60^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

b) $\text{cos } (2x + 60^\circ) - \text{cos } (x - 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2 \text{sen } \frac{2x + 60^\circ + x - 45^\circ}{2} \text{sen } \frac{2x + 60^\circ - (x - 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen } \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{x + 105^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } \frac{x + 105^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 105^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

c) $\text{cos } (2x - 30^\circ) - \text{cos } (x + 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2 \text{sen } \frac{2x - 30^\circ + x + 45^\circ}{2} \text{sen } \frac{2x - 30^\circ - (x + 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen } \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen } \frac{x - 75^\circ}{2} = 0$$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Si sumamos 360° encontramos otra solución: $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

$$\bullet \text{ Si } \text{sen } \frac{x - 75^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x - 75^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

Cuestiones teóricas

54 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

- a) Las gráficas de las funciones $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ y de $y = \operatorname{sen} x$ son iguales.
 b) La gráfica de la función $y = \cos(x + \pi)$ es igual que la de $y = -\cos x$.
 c) Al duplicarse un ángulo su tangente también se duplica.
 d) La ecuación $\operatorname{sec} x = 2$ no tiene solución.
 e) La ecuación $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}$ tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) Falso.

Veamos que son distintos, por ejemplo, en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- b) Verdadero, porque el signo del coseno cambia cada 180° .
 c) Falso, la fórmula del ángulo doble nos dice que no se cumple $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{tg} \alpha$.
 d) Falso, ya que tiene por ejemplo $\frac{\pi}{3}$ es solución:

$$\operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e) Verdadero.

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } \operatorname{sen}(3x) = -\frac{1}{2} &\rightarrow 3x = 210^\circ + 360^\circ k \text{ o } x = 330^\circ + 360^\circ k \\ &\rightarrow x = 70^\circ + 120^\circ k \text{ o } x = 110^\circ + 120^\circ k \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones del intervalo $[0, 360^\circ)$ son:

$$x = 70^\circ, x = 110^\circ, x = 190^\circ, x = 230^\circ, x = 310^\circ, x = 330^\circ$$

Es decir, la ecuación tiene seis soluciones en el intervalo $[0, 360^\circ)$.

55 ¿En qué puntos del intervalo $[0, 4\pi]$ corta al eje X cada una de las siguientes funciones?:

- a) $y = \cos \frac{x}{2}$ b) $y = \operatorname{sen}(x - \pi)$ c) $y = \cos(x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje X son aquellos para los que $y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos \frac{x}{2} = 0 &\rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases} & \text{b) } \operatorname{sen}(x - \pi) = 0 &\rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{c) } y = \cos(x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} < -1$ que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser menor que -1 .
Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

60 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

a) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 3/4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1/4 \end{cases}$

a) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0$$

Si $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$

Además, $\operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$(0, \frac{\pi}{3}), (0, \frac{2\pi}{3}), (\pi, \frac{\pi}{3}), (\pi, \frac{2\pi}{3})$ Valen.

Si $\operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0, y = \pi$

Además, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$(\frac{\pi}{3}, 0), (\frac{\pi}{3}, \pi), (\frac{2\pi}{3}, 0), (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ Valen.

b) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^2 y) = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 - \operatorname{sen}^2 x) \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow 16 \operatorname{sen}^2 x - 1 - 16 \operatorname{sen}^4 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 \operatorname{sen}^4 x - 16 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

• Si $\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$x = 75^\circ, x = 105^\circ, y = 75^\circ, y = 285^\circ$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$(75^\circ, 75^\circ) \rightarrow$ Vale.

$(75^\circ, 285^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(105^\circ, 75^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(105^\circ, 285^\circ) \rightarrow$ Vale.

• Si $\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
 $x = 285^\circ, x = 255^\circ, y = 105^\circ, y = 255^\circ$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$(285^\circ, 105^\circ) \rightarrow$ Vale.

$(285^\circ, 255^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(255^\circ, 105^\circ) \rightarrow$ No vale ya que no cumple la segunda ecuación.

$(255^\circ, 255^\circ) \rightarrow$ Vale.

61 Demuestra que:

a) $\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$

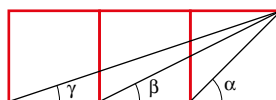
b) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$

a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$

62 Demuestra que, en la siguiente figura, $\alpha = \beta + \gamma$:



Supongamos que los cuadrados tienen lado l .

Por una parte,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así, α y $\beta + \gamma$ son dos ángulos comprendidos entre 0° y 90° cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir, $\alpha = \beta + \gamma$.

AUTOEVALUACIÓN

Página 129

1 Expresa los radianes en grados y viceversa.

- a) $\frac{3\pi}{5}$ rad b) 1,4 rad c) 140°
 a) 108° b) 80° 13' c) $7\pi/9$

2 ¿Cuánto mide el arco correspondiente a un ángulo de 0,75 radianes en una circunferencia de 12 cm de diámetro?

Aplicamos la fórmula de la longitud de un arco:

$$L = \text{radio} \cdot \alpha(\text{rad}) = 6 \cdot 0,75 = 4,5$$

3 Si $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:

- a) $\text{sen } \alpha$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ c) $\text{tg } \frac{\alpha}{2}$ d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \text{sen } \frac{\pi}{3} \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$$

$$c) \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ porque } \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$d) \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$$

4 Demuestra cada una de estas igualdades:

$$a) \text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

$$b) \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta$$

$$a) \text{tg } 2\alpha = \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$$

$$b) \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\alpha - \beta) = (\text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen } \beta)(\text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen } \beta) = \\ = \text{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \beta = \text{sen}^2 \alpha (1 - \text{sen}^2 \beta) - (1 - \text{sen}^2 \alpha) \text{sen}^2 \beta = \\ = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta - \text{sen}^2 \beta + \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \beta = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta$$

5 Resuelve.

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - (-\operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x(-2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ, x = 150^\circ \end{cases}$$

Soluciones:

$$x_1 = 360^\circ \cdot k; x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k; x_3 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x_4 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

6 a) Simplifica: $\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

b) Resuelve: $\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \operatorname{cotg} x$

a) Aplicando las fórmulas de suma y resta de seno y coseno:

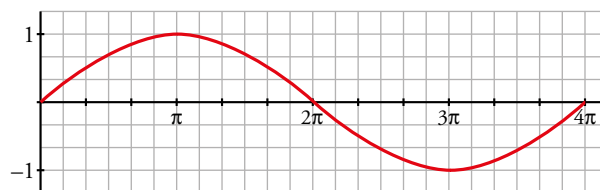
$$\frac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \cos 4x \operatorname{sen} x}{2 \cos 4x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

b) Tenemos que resolver $\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1$

$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$$

7 Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:



a) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

La función representada es de periodo 4π y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$$x = \pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$x = 2\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0$$

$$x = 3\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$x = 4\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2} = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

8 Resuelve dando las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

$$\text{a) } \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1/2 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \operatorname{cos} \frac{3x - y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

a) Aislamos $\operatorname{sen} x$ en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left(\frac{3}{2} - \operatorname{sen} y\right) \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}}{-2} \rightarrow \operatorname{sen} y = 1 \text{ o } \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30, y = 90 \text{ o bien } x = 150, y = 90$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 1/2 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = 90, y = 30 \text{ o bien } x = 90, y = 150$$

Solución del sistema:

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, y_1 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, y_2 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_3 = 90^\circ + 360^\circ k, y_3 = 30^\circ + 360^\circ k$$

$$x_4 = 90^\circ + 360^\circ k, y_4 = 150^\circ + 360^\circ k$$

b) Para resolver el sistema, aplicaremos las fórmulas de suma de senos a la primera ecuación:

$$\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \operatorname{cos} \frac{3x - y}{2} = 3/2$$

Ahora podemos sustituir la segunda ecuación en la primera:

$$2 \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{3x + y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{3x + y}{2} = 60^\circ \text{ o bien } \frac{3x + y}{2} = 120^\circ (*)$$

$$\text{Si } \frac{3x + y}{2} = \frac{\pi}{3} \rightarrow y = \frac{2\pi}{3} - 3x$$

$$\text{Y de la segunda ecuación: } \operatorname{cos} \frac{(3x - y)}{2} = 3/2 \rightarrow \frac{3x - y}{2} = 30^\circ \text{ o bien } \frac{3x - y}{2} = 330^\circ (**)$$

Combinamos (*) y (**) para encontrar sus soluciones:

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 60 \\ \frac{3x - y}{2} = 30 \end{cases} \qquad \text{Solución: } x = 30^\circ, y = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 60 \\ \frac{3x - y}{2} = 330 \end{cases} \qquad \text{Solución: } x = 130^\circ, y = -270^\circ = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 120 \\ \frac{3x - y}{2} = 30 \end{cases} \qquad \text{Solución: } x = 50^\circ, y = 90^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{3x + y}{2} = 120 \\ \frac{3x - y}{2} = 330 \end{cases} \qquad \text{Solución: } x = 150^\circ, y = -210^\circ = 150^\circ$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, y_1 = 30^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 130^\circ + 360^\circ k, y_2 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_3 = 50^\circ + 360^\circ k, y_3 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_4 = 150^\circ + 360^\circ k, y_4 = 150^\circ + 360^\circ k$$