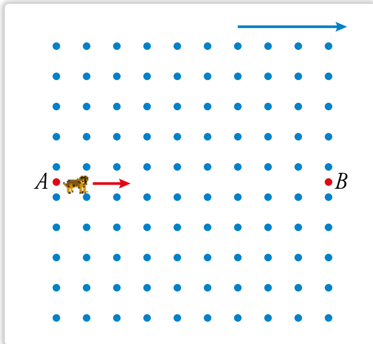
2 ÁLGEBRA

Página 59

Resuelve

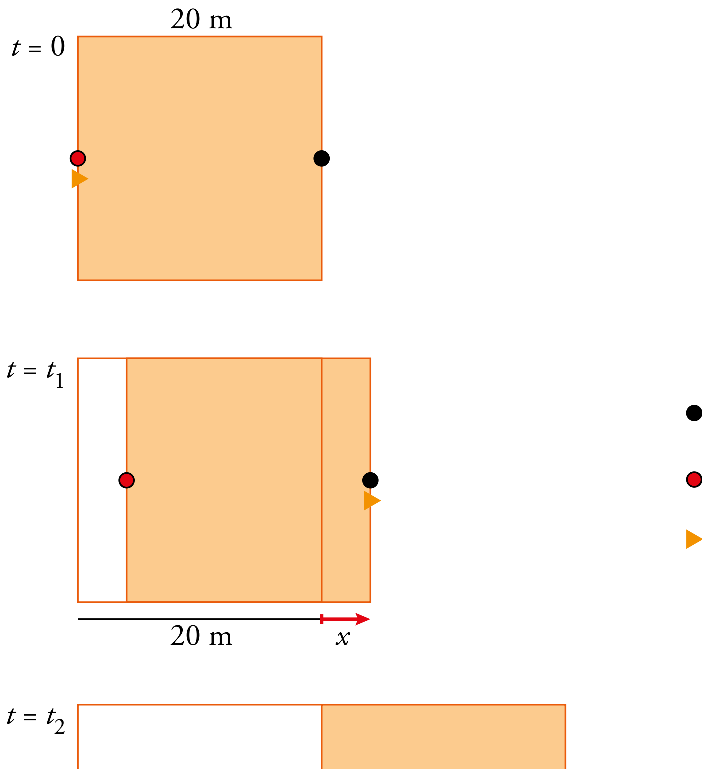
Los cadetes que desfilan con su mascota

Una compañía de cadetes, formada en cuadro de 20 metros de lado, avanza con paso regular. La mascota de la compañía, un pequeño perro, parte del centro de la última fila, punto *A*, camina en línea recta hasta el centro de la fila de cabeza, punto *B*, y regresa del mismo modo hasta el centro de la última fila. En el momento de volver a alcanzar *A*, los cadetes han recorrido exactamente 20 metros.



Suponiendo que el perro camina con velocidad constante y que no pierde tiempo en los giros, ¿cuántos metros ha recorrido?

Representamos esquemáticamente el movimiento de la mascota y de los cadetes:



Llamamos x al espacio que recorre el soldado de cabeza hasta que la mascota lo alcanza, y usaremos la fórmula $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$.

El tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el soldado de cabeza, t_1, es el mismo que el que tarda el soldado de cabeza en recorrer los x metros.

Llamamos $v_{mascota}$ a la velocidad de la mascota y v_{cadete} a la velocidad de los cadetes.

La ventaja del cadete de cabeza es de 20 m.

t_1 = tiempo que tarda la mascota en llegar hasta el cadete de cabeza

$$t_1 = \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}}$$

t_1 = tiempo que tarda el cadete de cabeza en recorrer los x metros

$$t_1 = \frac{x}{v_{cadete}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$I: \frac{20}{v_{mascota} - v_{cadete}} = \frac{x}{v_{cadete}}$$

El espacio recorrido por la mascota cuando avanza con los cadetes es $20 + x$. El espacio recorrido por la mascota al volver es x, puesto que al final se queda a 20 m del principio. Luego el espacio total recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x$.

El tiempo total durante el cual avanza la compañía, t_2, es el mismo que el tiempo que está la mascota corriendo.

t_2 = tiempo total durante el cual avanza la compañía

$$t_2 = \frac{20}{v_{cadete}}$$

t_2 = tiempo total durante el cual corre la mascota

$$t_2 = \frac{20 + 2x}{v_{mascota}}$$

Luego tenemos la igualdad:

$$II: \frac{20 + 2x}{v_{mascota}} = \frac{20}{v_{cadete}} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20 + 2x}{20}$$

Operamos en la igualdad I:

$$x(v_{mascota} - v_{cadete}) = 20 \cdot v_{cadete} \to x \cdot v_{mascota} = 20 \cdot v_{cadete} + xv_{cadete} \to$$

$$\to x \cdot v_{mascota} = v_{cadete}(20 + x) \to$$

$$\to v_{mascota} = v_{cadete}\frac{(20 + x)}{x} \to \frac{v_{mascota}}{v_{cadete}} = \frac{20}{x} + 1$$

Hemos obtenido la razón entre las dos velocidades. Usamos esta relación en la igualdad II y obtenemos:

$$\frac{20 + 2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to 1 + \frac{2x}{20} = \frac{20}{x} + 1 \to \frac{2x}{20} = \frac{20}{x}$$

Operamos y obtenemos:

$$2x^2 = 400 \to x^2 = 200 \to x = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

El espacio recorrido por la mascota es $e = 20 + 2x = 20 + 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2} + 20$ m.

1 ▶ POLINOMIOS. FACTORIZACIÓN

Página 61

1 **Descompón factorialmente estos polinomios:**

a) $\boldsymbol{x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3}$

b) $\boldsymbol{x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x}$

c) $\boldsymbol{x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9}$

d) $\boldsymbol{4x^4 - 15x^2 - 5x + 6}$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3\,(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

	1	–9	24	–20
2		2	–14	20
	1	–7	10	0
2		2	–10	
	1	–5	0	

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x-2)^2\,(x-5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

	1	–3	–3	–5	2	8
1		1	–2	–5	–10	–8
	1	–2	–5	–10	–8	0
–1		–1	3	2	8	
	1	–3	–2	–8	0	
4		4	4	8		
	1	1	2	0		

$x^2 + x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ (no tiene solución)

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x-1)\,(x+1)\,(x-4)\,(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

	1	6	9	0	–1	–6	–9
–1		–1	–5	–4	4	–3	9
	1	5	4	–4	3	–9	0
–3		–3	–6	6	–6	9	
	1	2	–2	2	–3	0	
–3		–3	3	–3	3		
	1	–1	1	–1	0		
1		1	0	1			
	1	0	1	0			

$x^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -1$ (no tiene solución)

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)\,(x^2+1)$

d) $4x^4 - 15x^2 - 5x + 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 0 & -15 & -5 & 6 \\
2 & & 8 & 16 & 2 & -6 \\
\hline
 & 4 & 8 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -4 & -4 & 3 & \\
\hline
 & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \;\rightarrow\; x = \frac{1}{2},\; x = -\frac{3}{2}$$

$$4x^4 - 15x^2 - 5x + 6 = 4(x-2)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

2 **a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.**

b) Hazlo ahora sabiendo que es divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +\,4x^3 & +\,8x^2 & +\,7x & +\,4 & x^2 + x + 1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -\,x^3 & -\,x^2 & & & x^2 + 3x + 4 \\
\cline{1-5}
 & 3x^3 & +\,7x^2 & +\,7x & +\,4 & \\
 & -3x^3 & -\,3x^2 & -\,3x & & \\
\cline{2-5}
 & & 4x^2 & +\,4x & +\,4 & \\
 & & -4x^2 & -\,4x & -\,4 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución).

Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3 **Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve a intentarlo sabiendo que $-1/2$ y $1/3$ son raíces suyas y comprueba tus resultados con la calculadora.**

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 6 & 7 & 6 & 0 & -1 \\
-1/2 & & -3 & -2 & -2 & 1 \\
\hline
 & 6 & 4 & 4 & -2 & \boxed{0} \\
1/3 & & 2 & 2 & 2 & \\
\hline
 & 6 & 6 & 6 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$6x^2 + 6x + 6 = 0$

$6(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ (no tiene solución)

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) 6(x^2 + x + 1) = (2x+1)(3x-1)(x^2 + x + 1)$$

2 FRACCIONES ALGEBRAICAS

Página 63

1 ¿Verdadero o falso?

a) $\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{3x-3}{x^2-1}=\dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x+1}{x}-1=\dfrac{1}{x}$

a) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x+1)(x+1) \neq x^2+1$, luego es falso.

b) Para comprobar si son equivalentes, multiplicamos en cruz: $(x-1)(x+1)=x^2-1$, luego es verdadero.

c) La primera fracción es el triple de $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, y la segunda es el triple de $\dfrac{1}{x+1}$ que son las fracciones del apartado anterior, luego es verdadero.

d) Operamos en el miembro de la izquierda:

$$\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x}$$

Obtenemos el miembro de la derecha, luego es verdadero.

2 Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes, y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=x \\ x^2+x=x(x+1) \\ x+1=x+1 \end{array}\right\} \text{ mín.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x}=\frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x}=\frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1}=-\frac{(2x+1)x}{x(x+1)}=-\frac{2x^2+x}{x(x+1)}=\frac{2x^2-x}{x(x+1)}$$

Las sumamos:

$$\frac{x+7}{x}+\frac{x-2}{x^2+x}-\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}+\frac{x-2}{x(x+1)}+\frac{-2x^2-x}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x}=\frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

3 **Efectúa.**

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x$

a) $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}+\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

b) $\dfrac{x}{x+1}+5x=\dfrac{x+5x(x+1)}{x+1}=\dfrac{x(5x+6)}{x+1}=\dfrac{5x^2+6x}{x+1}$

4 **Efectúa estas operaciones:**

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(2x+3)(x-2)}=\dfrac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$

5 **Calcula.**

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}$

a) $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{x(x-1)}{3(2x+1)}=\dfrac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)}$

b) $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+1}\cdot\dfrac{x^4+x^2}{x^4}=\dfrac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^2(x^2-1)\cdot x^2(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}=\dfrac{x^4(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)\,x^4}=x^2-1$

3 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Página 64

Resuelve

Ecuaciones polinómicas cuadráticas

a) $x^2 + x - 6 = 0$ **b)** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 3x + 3 = 0$

d) $3x^2 - 12 = 0$ **e)** $2x^2 + 10x = 0$ **f)** $x^2 = 121$

a) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \to x_1 = 2,\ x_2 = -3$

b) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \to x = 1$

c) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} \to$ No hay solución.

d) $x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{3}} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $2x(x+5) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -5$

f) $x = \pm\sqrt{121} = \pm 11 \to x_1 = 11,\ x_2 = -11$

Ecuaciones polinómicas bicuadradas

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b)** $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ **c)** $3x^4 - 36x^2 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ **e)** $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **f)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

g) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **h)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) $y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \to y_1 = 4,\ y_2 = 1$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2;\ x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1$

b) $y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \to y_1 = 3,\ y_2 = -2$

Los valores de y obtenidos son negativos, por tanto, la ecuación no tiene solución.

c) $3x^2(x^2 - 12) = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{12},\ x_3 = \sqrt{12}$

d) $y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

e) $x^4 - x^2 - 12 = 0 \to x^2 = y \to y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \to y_1 = 4;\ y_2 = -3$

$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$x = \pm\sqrt{-3}$ no existe.

La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

f) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \to x^2 = y \to y = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} \to y_1 = 9;\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x = \pm\sqrt{-1}$ no es posible.

La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$.

g) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \;\to\; x^2 = y \;\to\; y = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} \;\to\; y_1 = -1;\; y_2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-1}$

$x = \pm\sqrt{-9}$

La ecuación no tiene solución pues no existe la raíz real de números negativos.

h) $x^4 - x^2 - 2 = 0 \;\to\; x^2 = y \;\to\; y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \;\to\; y_1 = 2;\; y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt{2}$

$x = \pm\sqrt{-1}$ no es posible.

La ecuación tiene dos soluciones $x_1 = -\sqrt{2}$ y $x_2 = \sqrt{2}$.

Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2 no bicuadradas

a) $\mathbf{10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = 0}$

b) $\mathbf{x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = 0}$

c) $\mathbf{x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = 0}$

d) $\mathbf{x^5 - x^3 - 6x^2 = 0}$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 10 & 7 & -24 & 5 & 2 \\
1 & & 10 & 17 & -7 & -2 \\ \hline
 & 10 & 17 & -7 & -2 & \boxed{0} \\
-2 & & -20 & 6 & 2 & \\ \hline
 & 10 & -3 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Por tanto: $10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = (x-1)(x+2)(10x^2 - 3x - 1)$

Falta descomponer el factor de segundo grado: $10x^2 - 3x - 1$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{20} = \frac{3 \pm 7}{20} \;\to\; x_1 = \frac{1}{2},\;\; x_2 = \frac{-1}{5}$$

$$10x^4 + 7x^3 - 24x^2 + 5x + 2 = (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)$$

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\
2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline
 & 1 & 3 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
-3 & & -3 & 0 & -3 & \\ \hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + 1 = 0$ pero no tiene solución real ya que: $x = \sqrt{-1}$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3)\,(x^2+1)$

c) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -7 & 9 & -1 & 30 \\
3 & & 3 & -12 & -9 & -30 \\ \hline
 & 1 & -4 & -3 & -10 & \boxed{0} \\
5 & & 5 & 5 & 10 & \\ \hline
 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + x + 2 = 0$ pero no tiene solución real ya que: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$

Por tanto: $x^4 - 7x^3 + 9x^2 - x + 30 = (x-3)(x-5)(x^2 + x + 2)$

d) $x^5 - x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 - x - 6)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

Nos queda por resolver $x^2 + 2x + 3 = 0$ pero no tiene solución ya que: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$

Por tanto: $x^5 - x^3 - 6x^2 = x^2(x-2)(x^2 + 2x + 3)$

Página 65

Resuelve

Ecuaciones con fracciones algebraicas

a) $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x-5}{x}$

b) $\dfrac{3+x}{x-1} + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{-x}{x+1} + \dfrac{2x+1}{2x} + \dfrac{1}{x^2-1} = 0$

d) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x+2}{x+1}$

a) Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$x(3x-2) - 4 = x(2x-5) \rightarrow 3x^2 - 2x - 4 = 2x^2 - 5x \rightarrow$

$\rightarrow 3x^2 - 2x - 4 - (2x^2 - 5x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \rightarrow x = -4,\ x = 1$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -4,\ x_2 = 1$.

b) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x^2 - 1$.

$(3 + x)(x + 1) + 5(x - 1) = x - 2 \rightarrow x^2 + 9x - 2 = x - 2 \rightarrow x^2 + 8x = 0 \rightarrow x = -8,\ x = 0$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -8,\ x_2 = 0$.

c) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $2x(x^2 - 1)$.

$2x(x-1)(-x) + (2x+1)(x^2-1) + 2x = 0 \rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{1}{3}};\ x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

Comprobadas las soluciones sobre la ecuación inicial, se ve que ambas son válidas.

Soluciones: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}},\ x_2 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

d) Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x + 1)$.

$x^2 - (x+1) = x(3x+2) \rightarrow x^2 - (x+1) - x(3x+2) = 0 \rightarrow -2x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{1}{2},\ x = -1$

La solución $x = -1$ no es posible porque hace 0 el denominador. La única solución es $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ecuaciones con radicales

a) $x+3=\sqrt{x+1}+4$ **b)** $\sqrt{4x+9}-\sqrt{2x+1}=2$ **c)** $\sqrt{3x+4}-\sqrt{1-x}=1$

a) Despejamos la raíz:

$x+3=\sqrt{x+1}+4 \ \rightarrow \ x-1=\sqrt{x+1}$

Elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar la raíz:

$x^2-2x+1=x+1$

Desarrollamos la ecuación y la resolvemos.

$x^2-2x+1=x+1$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

Por lo tanto, hay dos posibles soluciones $x_1=0$ y $x_2=3$.

Comprobamos si son soluciones posibles.

$x_1=0 \ \rightarrow \ 0+3=\sqrt{0+1}+4 \ \rightarrow \ 3\neq 5$ no es válida

$x_2=3 \ \rightarrow \ 3+3=\sqrt{3+1}+4 \ \rightarrow \ 6=2+4$ sí es válida

La única solución es $x=3$.

b) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{4x+9}=\sqrt{2x+1}+2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{4x+9})^2=(\sqrt{2x+1}+2)^2 \ \rightarrow \ 4x+9=2x+4\sqrt{2x+1}+5$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$4\sqrt{2x+1}=4x+9-2x-5=2x+4$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(4\sqrt{2x+1})^2=(2x+4)^2 \ \rightarrow \ 32x+16=4x^2+16x+16 \ \rightarrow \ 32x+16-(4x^2+16x+16)=0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 4x^2-16x=0 \ \rightarrow \ 4x(x-4)=0 \ \rightarrow \ x_1=4, \ x_2=0$

Comprobación:

$x_1=4 \ \rightarrow \ \sqrt{4\cdot 4+9}-\sqrt{2\cdot 4+1}=5-3=2$ es válida.

$x_2=0 \ \rightarrow \ \sqrt{4\cdot 0+9}-\sqrt{2\cdot 0+1}=2$ es válida.

c) Despejamos una de las dos raíces.

$\sqrt{3x+4}=1+\sqrt{1-x}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{3x+4})^2=(1-\sqrt{1-x})^2 \ \rightarrow \ 3x+4=2\sqrt{1-x}-x+2$

Aislamos el término en el que está la raíz.

$-2\sqrt{1-x}=-x+2-(3x+4)=4x-2$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(-2\sqrt{1-x})^2=(-4x-2)^2 \ \rightarrow \ 4-4x=16x^2+16x+4 \ \rightarrow \ 16x^2+16x+4-4+4x=0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ 16x^2+20x=0 \ \rightarrow \ 4x(4x+5)=0 \ \rightarrow \ x_1=-\dfrac{5}{4}; \ x_2=0$

Comprobación:

$x_1=-\dfrac{5}{4} \ \rightarrow \ \sqrt{3\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)+4}-\sqrt{1+\dfrac{5}{4}}=-1$ no es válida.

$x_2=0 \ \rightarrow \ \sqrt{3\cdot 0+4}-\sqrt{1-0}=1$ es válida.

Hay una solución: $x=0$.

Página 66

Hazlo tú

a) $\mathbf{2^{x^2-4x} = \frac{1}{16}}$

b) $\mathbf{5^{x^2-1} = 7}$

c) $\mathbf{3^{x+2} - 3^x = 72}$

a) $2^{x^2-4x} = \frac{1}{2^4} \to x^2 - 4x = -4 \to x^2 - 4x - 4 = 0 \to x = 2$

b) $log(5^{x^2-1}) = log\,7 \to (x^2 - 1)log\,5 = log\,7 \to (x^2 - 1) = \frac{log\,7}{log\,5} = 1{,}2091 \to$

$\to x^2 = 1 + 1{,}2091 = 2{,}2091 \to$

$\to x = \pm\sqrt{2{,}2091} = \pm\,1{,}4863 \to x_1 = 1{,}4863;\ x_2 = -1{,}4863$

c) Hacemos el siguiente cambio de variable: $3^x = y$

$3^2y - y = 72 \to 8y = 72 \to y = 9 = 3^2$

$3^x = 3^2 \to x = 2$

Página 67

Hazlo tú

a) $\mathbf{log\,x - log\,4 = 2}$

b) $\mathbf{3\,log_5\,(x - 1) = log_5\,125}$

c) $\mathbf{2\,ln\,x = ln\,(2x + 3)}$

a) $log\,x - log\,4 = 2 \to log\,\frac{x}{4} = log\,100 \to \frac{x}{4} = 100 \to x = 400$

La solución es válida.

b) $3log_5(x-1) = log_5\,125 \to log_5(x-1)^3 = log_5\,125 \to (x-1)^3 = 125 \to x - 1 = \sqrt[3]{125} = 5 \to x = 6$

La solución es válida.

c) $2ln\,x = ln\,(2x + 3) \to ln\,x^2 = ln\,(2x + 3) \to x^2 = (2x + 3) \to x^2 - 2x - 3 = 0 \to x_1 = 3$ es válida; $x_2 = -1$ no es válida porque $ln\,(-1)$ no existe.

Piensa y practica

1 ¿Verdadero o falso?

a) Al resolver una ecuación con algún radical cuadrático siempre aparece alguna raíz falsa.

b) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\mathbf{\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 4}$.

c) 4 y –4 son soluciones de la ecuación $\mathbf{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x} = 2}$.

a) Falso. Hemos resuelto ecuaciones de este tipo en las que todas las soluciones eran válidas.

Ejemplo: $\sqrt{4x+9} - \sqrt{2x+1} = 2$ en la página 65.

b) Verdadero. Si sustituimos x por 4 o por -4 obtenemos una igualdad.

c) Falso. Solo es solución $x = 4$. Al sustituir x por -4 no sale una igualdad.

2 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ **b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ **d)** $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) Tomamos $x^2 = y \to y^2 - y - 12 = 0 \to y = 4,\ y = -3$

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

b) Tomamos $x^2 = y \to y^2 - 8y - 9 = 0 \to y = 9,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$

c) Tomamos $x^2 = y \to y^2 + 10y + 9 = 0 \to y = -1,\ y = -9$

Soluciones: No hay.

d) Tomamos $x^2 = y \to y^2 - y - 2 = 0 \to y = 2,\ y = -1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$

3 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3$

e) $\frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2}$ **f)** $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$

a) $10(x + 3) + 10x = 3x(x + 3)$

$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$

$0 = 3x^2 - 11x - 30;\ x = \frac{11 \pm 21{,}93}{6} = \begin{cases} 5{,}489 \\ -1{,}822 \end{cases}$

$x_1 = 5{,}489;\ x_2 = -1{,}822$

b) $12(x - 2) + 2x(x + 1) = 12x(x - 2)$

$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$

$0 = 10x^2 - 38x + 24$

$0 = 5x^2 - 19x + 12;\ x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = \frac{4}{5}$

c) $4x + 4 = 3x^2;\ 0 = 3x^2 - 4x - 4$

$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$

$x_1 = 2;\ x_2 = \frac{-2}{3}$

d) $x(x + 1) + 2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$

$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$

$x = 3$

e) $10(x + 3) + 2x(x + 2) = 3(x^2 + 5x + 6)$

$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$

$0 = x^2 + x - 12$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

$x_1 = 3;\ x_2 = -4$

f) $35(x + 3)(x + 1) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35(x^2 + 4x + 3) - 35(x^2 + 1) = 26(x^2 - 1)$

$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$

$26x^2 - 140x - 96 = 0$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$x_1 = 6;\ x_2 = \dfrac{-8}{13}$

4 **Resuelve.**

a) $2 + \sqrt{x} = x$

b) $2 - \sqrt{x} = x$

c) $-\sqrt{2x - 3} + 1 = x$

d) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} = 4$

e) $\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$

f) $\sqrt{5x + 1} + 2 = \sqrt{27 + 3x}$

a) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 4$

b) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \to \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$$

$x = 1$

c) $1 - x = \sqrt{2x - 3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3;\ x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

d) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x + 7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x + 7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x + 7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$$x^2 - 116x + 228 = 0;\ x = \frac{116 \pm 112}{2} = \begin{cases} 114 \\ 2 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

$x = 114$

e) $\sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8 - 2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8 - 2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} = \begin{cases} 2 \\ 0{,}08 \to \text{(no vale)} \end{cases}$$

Así, $x = 2$.

f) $\sqrt{5x+1}+2=\sqrt{27+3x}$

$\sqrt{5x+1}=\sqrt{27+3x}-2$

$(\sqrt{5x+1})^2=(\sqrt{27+3x}-2)^2$

$5x+1=3x-4\sqrt{3x+27}+31$

$4\sqrt{3x+27}=-(5x+1)+3x+31$

$(4\sqrt{3x+27})^2=(-2x+30)^2$

$16(3x+27)=4x^2-120x+900$

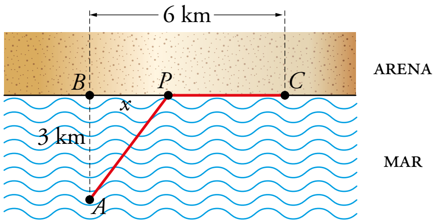
$16(3x+27)-4x^2+120x-900=0 \rightarrow x=39,\ x=3$

Comprobación:

$x=39 \rightarrow \sqrt{5\cdot 39+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 39} \rightarrow 14+2\neq 12 \rightarrow$ (no vale)

$x=3 \rightarrow \sqrt{5\cdot 3+1}+2=\sqrt{27+3\cdot 3} \rightarrow 4+2=6$

5 **Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P, y hemos caminado a 5 km/h de P a C. Hemos tardado, en total, 99 minutos (99/60 horas). ¿Cuál es la distancia, x, de B a P?**



dist(A, P) es la hipotenusa del triángulo ABP, su longitud es:

$\sqrt{9+x^2}$

La longitud de PC es $6-x$.

El tiempo que se ha tardado en recorrer ambas distancias es:

- *dist*(A, P) a 4 km/h:

$$t_{AP}=\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}$$

- *dist*(P, C) a 5 km/h:

$$t_{PC}=\frac{6-x}{5}$$

La suma de los tiempos es $\frac{99}{60}=\frac{33}{20}$ h.

$$\frac{\sqrt{9+x^2}}{4}+\frac{6-x}{5}=\frac{33}{20}$$

$5\sqrt{9+x^2}+4(6-x)=33$

$5\sqrt{9+x^2}=9+4x$

$25(9+x^2)=81+72x+16x^2$

$9x^2-72x+144=0 \rightarrow x^2-8x+16=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=4$$

La distancia de B a P es de 4 quilómetros.

6 Resuelve.

a) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$ **b)** $3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 186$ **d)** $7^{x+2} = 5\,764\,801$

e) $3^x + 3^{x+2} = 30$ **f)** $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$

a) $2^{3x} = 2^{-3x-2};\ 3x = -3x - 2;\ 6x = -2;\ x = \frac{-1}{3}$

b) $3^{4-x^2} = 3^{-2};\ 4 - x^2 = -2;\ x^2 = 6;\ x = \pm\sqrt{6}$

$x_1 = \sqrt{6};\ x_2 = -\sqrt{6}$

c) $\frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186;\ 2^{2x-2-x-2} = 186;\ 2^{x-4} = 186$

$\log 2^{x-4} = \log 186;\ (x-4)\log 2 = \log 186$

$x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11{,}54$

d) $7^{x+2} = 7^8;\ x = 6$

e) Empezamos sacando factor común:

$3^x + 3^{x+2} = 30 \rightarrow 3^x(1+3^2) = 30 \rightarrow 10 \cdot 3^x = 10 \cdot 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x = 1$

f) Sacamos factor común:

$5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5} \rightarrow 5^x\left(5+1+\frac{1}{5}\right) = \frac{31}{5} \rightarrow 5^x(25+5+1) = 31 \rightarrow 5^x = 1 \rightarrow x = 0$

7 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2\log x - \log(x+6) = 3\log 2$

b) $4\log_2(x^2+1) = \log_2 625$

c) $\log_x 27 - \log_{x^2} 9 = 2$ **(expresa $\log_{x^2} 9$ como $\log_x \ldots$)**

a) $\log \frac{x^2}{x+6} = \log 8$

$x^2 = 8x + 48;\ x^2 - 8x - 48 = 0;\ x = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 12$

b) $\log_2(x^2+1)^4 = \log_2 5^4;\ x^2 + 1 = 5;\ x^2 = 4;\ x = \pm 2$

$x_1 = 2;\ x_2 = -2$

c) $\log_x 27 - \log_{x^2} 9 = 2$

Vamos a cambiar de base usando las propiedades de los logaritmos:

$\log_{x^2} 9 = \frac{\log 9}{\log x^2} = \frac{\log 9}{2\log x} = \frac{1}{2}\log_x 9$

Así podemos sustituir en la ecuación inicial:

$\log_x 27 - \log_{x^2} 9 = \log_x 27 - \frac{1}{2}\log_x 9 = \log_x 3^3 - \frac{1}{2}\log_x 3^2 = 3\log_x 3 - \frac{2}{2}\log_x 3 = 2\log_x 3 = 2 \rightarrow \log_x 3 = 1 \rightarrow$

$\rightarrow x^1 = 3 \rightarrow x = 3$

4 ▶ RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 69

1 ¿Verdadero o falso?

a) El sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ **tiene dos soluciones:** $x=4,\ y=1$

b) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene solo dos soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1]$ **y** $[x_2=-2,\ y_2=-1]$

c) El sistema $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ **tiene cuatro soluciones:**

$[x_1=2,\ y_1=1];\ [x_2=2,\ y_2=-1]$

$[x_3=-2,\ y_3=1];\ [x_4=-2,\ y_4=-1]$

a) Falso, $x=4$ e $y=1$ no son dos soluciones, sino una solución para cada incógnita, luego son una solución del sistema.

b) Falso, como las dos incógnitas están al cuadrado, también son soluciones $x_3=-2,\ y_3=1$ y $x_4=2,\ y_4=-1$.

c) Verdadero, por el razonamiento del apartado anterior.

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x^2-7=y+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{1}{xy} \\ xy=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y^2-x^2=16 \\ \sqrt{5-4y}-x=-(x+y) \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y=2x-1 \\ y=x^2-9 \end{array}\right\}$

$x^2-9=2x-1;\ x^2-2x-8=0$

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$x_1=4;\ y_1=7$

$x_2=-2;\ y_2=-5$

b) $\left.\begin{array}{l} y+x=xy-1 \\ xy=6 \end{array}\right\}$

$y=5-x$

$x(5-x)=6;\ 5x-x^2=6;\ x^2-5x+6=0 \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

$x_1=2;\ y_1=3$

$x_2=3;\ y_2=2$

c) $x = 2y + 1$

$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2;\ \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$

$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y+1};\ 2y - 4 = 4\sqrt{y+1};\ y - 2 = 2\sqrt{y+1}$

$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4;\ y^2 - 8y = 0$

$y = 8 \ \rightarrow\ x = 17$

$y = 0$ (no vale)

$x = 17;\ y = 8$

d) $\sqrt{5-4y} - x = -(x + y);\ \sqrt{5-4y} = -y$

$(\sqrt{5-4y})^2 = y^2;\ 5 - 4y = y^2 \begin{cases} y = 1 \ \rightarrow\ \text{(no vale)} \\ y = -5 \end{cases}$

$25 - x^2 = 16 \ \rightarrow\ x = -3,\ x = 3$

$x_1 = 3;\ y_1 = -5$

$x_2 = -3;\ y_2 = -5$

3 **Resuelve:**

a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} log\,(x^2 + y) - log\,(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 27 \\ log\, x - 1 = log\, y \end{cases}$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases}$

a) $y = 1 - x;\ x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$

$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21;\ x^2 - x - 20 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \ \rightarrow\ y = -4 \\ -4 \ \rightarrow\ y = 5 \end{cases}$$

$x_1 = -4;\ y_1 = 5$

$x_2 = 5;\ y_2 = -4$

b) $\left.\begin{array}{l} log\,\dfrac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{array}\right\}$

$x = 2y + 1$

$4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y$

$4y^2 + 5y - 9 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{8} = \frac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \ \rightarrow\ x = -7/2 \\ 1 \ \rightarrow\ x = 3 \end{cases}$$

$x_1 = 3;\ y_1 = 1$

$x_2 = \dfrac{-7}{2};\ y_2 = \dfrac{-9}{4}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 27 + y \\ log\,\dfrac{x}{y} = 1 \end{array}\right\}$

$\dfrac{x}{y} = 10 \;\to\; x = 10y$

$10y = 27 + y;\;\; 9y = 27;\;\; y = 3$

$\dfrac{x}{y} = 10;\;\; x = 10y;\;\; x = 30$

$x = 30;\;\; y = 3$

d) $\begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + 1 \\ 3^{x-1} = 27^{y+3} \end{cases} \to \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,(2 - y) + log\,10 \\ 3^{x-1} = (3^3)^{y+3} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} log\,(2x - y^2) = log\,10\,(2 - y) \\ 3^{x-1} = 3^{3y+9} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 = 10\,(2 - y) \\ x - 1 = 3y + 9 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} 2x - y^2 + 10y = 20 \\ x - 3y = 10 \end{cases}$

$x = 10 - 3y$

$2(10 - 3y) - y^2 + 10y - 20 = 0;$

$y\,(y - 4) = 0;\;\; y = 4,\;\; y = 0$

$y = 4$ no es válida porque aparecería $log\,(-2)$ en la primera ecuación.

$x = 10;\;\; y = 0$

5 INECUACIONES Y SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

Página 70

1 Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \le 10$ **b)** $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$ **d)** $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \to 3x \le 12 \to x \le 4$

Soluciones: $\{x \mid x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \to x > 3$

Soluciones: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \to 2x \ge 1 \to x \ge \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \ge \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \to 3x \le 14 \to x \le \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \le \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2 Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \le 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5 \ge 6 \\ 3x + 1 \le 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \le 4 \\ x > 3 \end{cases}$ *Soluciones:* $\{x \mid 3 < x \le 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ x \le \frac{14}{3} \end{cases}$ *Soluciones:* $\left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

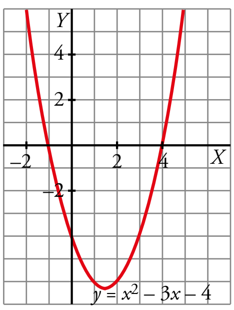
Página 71

3 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $x^2 - 3x - 4 < 0$ **b)** $x^2 - 3x - 4 \ge 0$

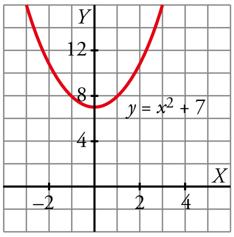
c) $x^2 + 7 < 0$ **d)** $x^2 - 4 \le 0$

a)



$x^2 - 3x - 4 < 0 \to$ intervalo $(-1, 4)$

b) $x^2 - 3x - 4 \ge 0 \to (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) 

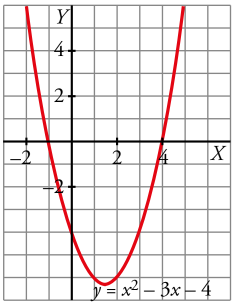
$x^2 + 7 < 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución.

d) $x^2 - 4 \le 0$

La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo (–2, 2); y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$. Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo [–2, 2].

4 Resuelve y comprueba el resultado con la calculadora.

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

a) 

$2x - 7 > 5 \;\rightarrow\; 2x > 12 \;\rightarrow\; x > 6 \;\rightarrow\; (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \ge 0 \;\rightarrow\; (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2 - 4 \le 0 \\ x - 4 > 1 \end{array}\right\}$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo [–2, 2]. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$$x - 4 > 1 \;\rightarrow\; x > 5 \;\rightarrow\; (5, +\infty)$$

- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

6 ▸ INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Página 72

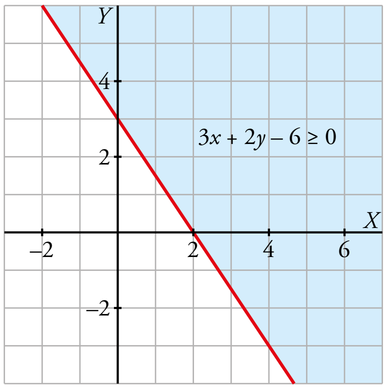
1 **Resuelve.**

a) $3x + 2y \geq 6$ **b)** $x - y + 1 \geq 0$

a) Dibujamos la recta r: $3x + 2y - 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 0 - 6 \geq 0$.

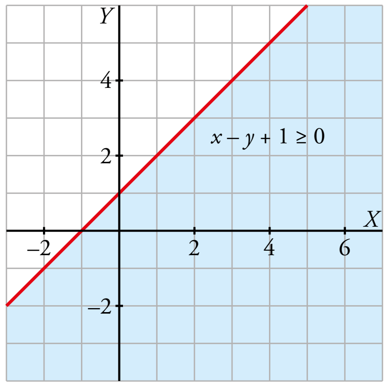
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta r: $x - y + 1 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad: $0 + 0 + 1 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.



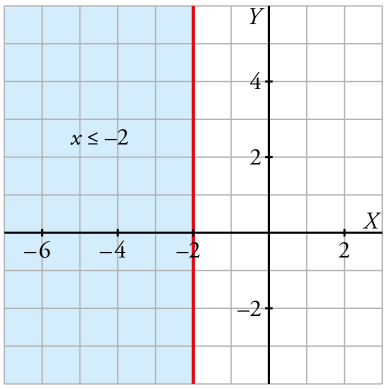
2 **Resuelve.**

a) $x \leq -2$ **b)** $y > 1$

a) Dibujamos la recta r: $x = -2$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 + 2 \leq 0$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

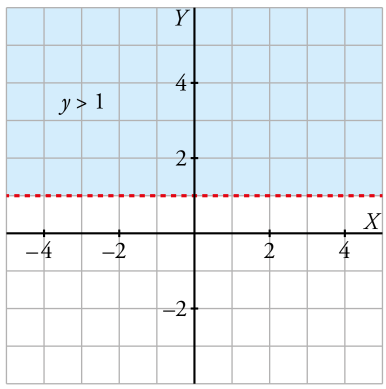


b) Dibujamos la recta r: $y = 1$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad: $0 \geq 1$.

La solución es el semiplano que no contiene a O.

La recta $y = 1$ no pertenece al conjunto de soluciones.



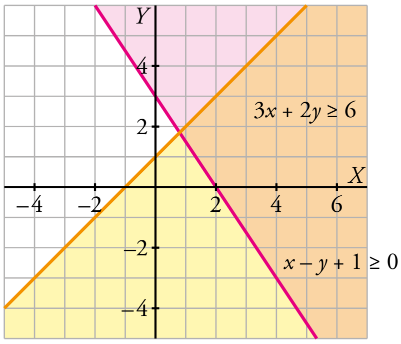
Página 73

3 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

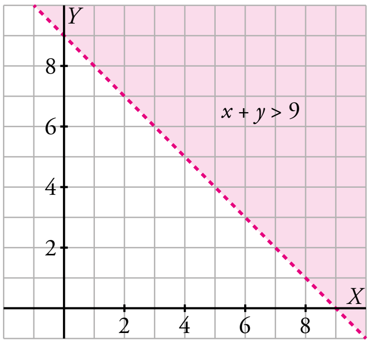
a) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y > 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$

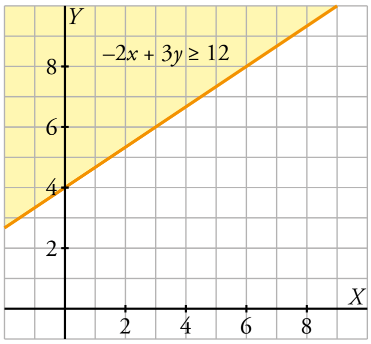
e) $\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y < 9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y < 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x - 3y > -3 \\ x + y > 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$

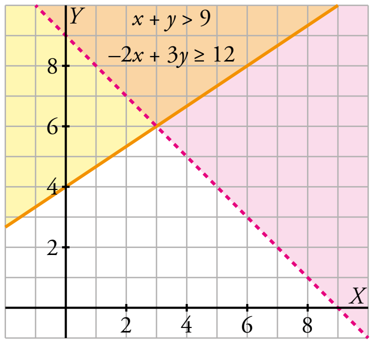
a) Ambas inecuaciones han sido resueltas en el ejercicio 1 anterior. El recinto solución del sistema es la intersección de los semiplanos soluciones de ambas inecuaciones. Es decir, es el recinto de color marrón.



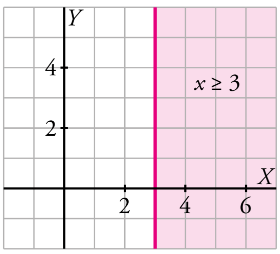
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

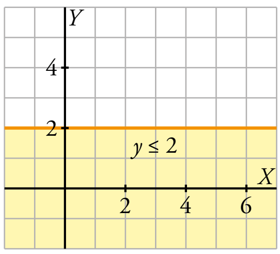


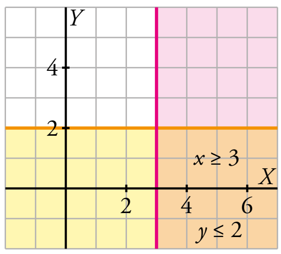




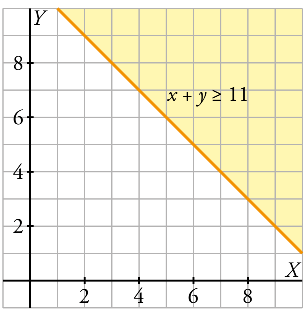
c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La solución es el recinto marrón.

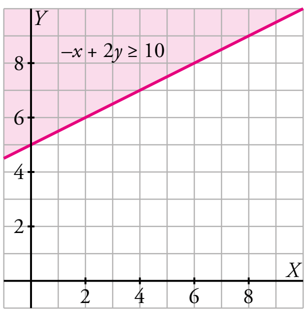


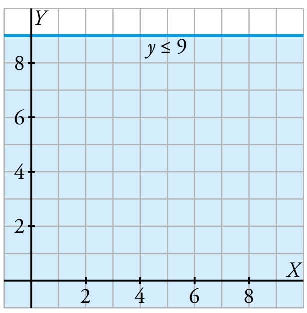


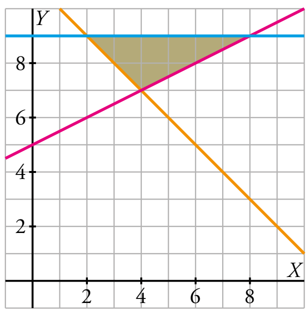


d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los semiplanos. La solución es el triángulo de intersección.

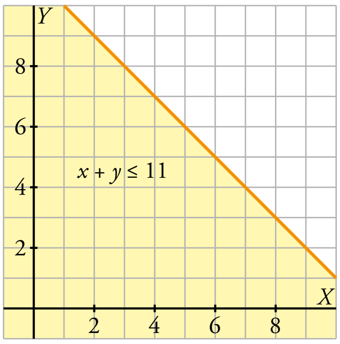


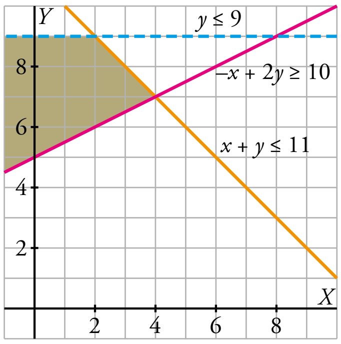




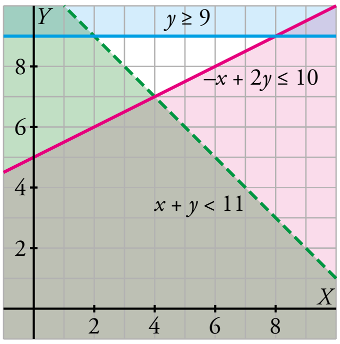


e) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. Los semiplanos de la segunda y tercera inecuaciones coinciden con los del apartado d). Representamos el semiplano de la primera inecuación. La solución es la región común a los recintos.

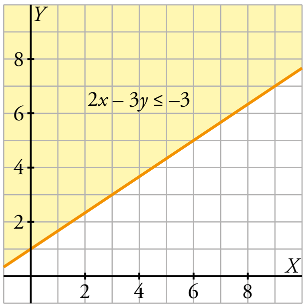


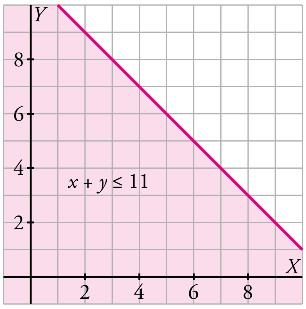


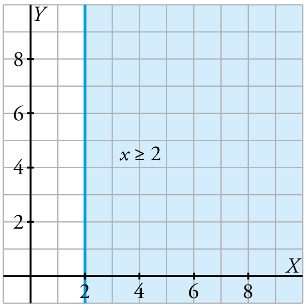
f) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.

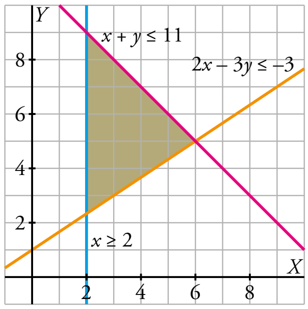


g) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos. La solución es el triángulo común a los semiplanos.

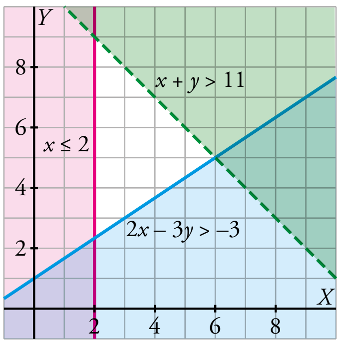








h) Resolvemos cada una de las inecuaciones. No hay ningún punto que esté en la intersección de los tres semiplanos. Luego no hay solución.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 74

1. Ecuaciones polinómicas de grado tres o superior

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$12x^4 + 14x^3 - 2x = 0$

Como no tiene término independiente, sacamos factor común $2x$:

$2x(6x^3 + 7x^2 - 1) = 0$

Buscamos ahora las raíces enteras del nuevo polinomio entre los divisores del término independiente y factorizamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & & -6 & -1 & 1 \\ \hline & 6 & 1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$6x^3 + 7x^2 - 1 = (x + 1)(6x^2 + x - 1)$

Como no hay más raíces enteras, para descomponer el polinomio de segundo grado resolvemos la ecuación asociada y como el coeficiente principal es 6, nos queda:

$$12x^4 + 14x^3 - 2x = 6 \cdot 2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Soluciones: $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = \frac{1}{3}$

2. Ecuaciones con valores absolutos

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $|x^2 - 2| = 2$

b) $|3x + 1| = |2x + 4|$

c) $|x + 3| = |2x| + 2$

a) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado a).

$x^2 - 2 = 2 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$x^2 - 2 = -2 \to x_3 = 0$

b) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado b).

$3x + 1 = 2x + 4 \to x_1 = 3$

$3x + 1 = -(2x + 4) \to x_2 = -1$

c) Seguimos las indicaciones del ejercicio resuelto 2, apartado c).

$|x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases}$ $\quad |2x| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

	$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$\|x+3\|$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\|2x\|$	$-2x$	$-2x$	$2x$
$\|2x\| + 2$	$-2x+2$	$-2x+2$	$2x+2$

$x < -3$	$-3 \le x < 0$	$x \ge 0$
$-x-3 = -2x+2$	$x+3 = -2x+2$	$x+3 = 2x+2$
$x = 5 \notin (-\infty, -3)$	$x = -1/3 \in [-3, 0)$	$x = 1 \in [0, +\infty)$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{1}{3},\ x_2 = 1$

Página 75

3. Ecuaciones del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Hazlo tú

- **Resuelve esta ecuación:**

$x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $x^4 = y$

La ecuación queda: $y^2 - 15y - 16 = 0 \to y_1 = 16,\ y_2 = -1$

$x = \pm\sqrt[4]{16} \to x_1 = 2,\ x_2 = -2$

$x = \pm\sqrt[4]{-1}$ que no existe.

Soluciones: $x_1 = 2,\ x_2 = -2$

4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0$

b) $2\log x - \log(x-1) = \log 4$

a) $3^{x^2+1} - 9^x = 0 \to 3^{x^2+1} - (3^2)^x = 0 \to 3^{x^2+1} - 3^{2x} = 0 \to 3^{x^2+1} = 3^{2x}$

Igualamos los exponentes: $x^2 + 1 = 2x \to x = 1$

b) $2\log x - \log(x-1) = \log 4 \to \log\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \log 4 \to \dfrac{x^2}{x-1} = 4 \to x = 2$ que es solución válida.

5. Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas

Hazlo tú

- **Resuelve, si es posible, por el método que creas conveniente:**

a) $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y + 1 = z \\ 2x + 2y = 8 + z \end{cases}$

a) Si calculamos:

1.ª + 2.ª: $x + 3y = 1$

2.ª + 3.ª: $2x + 6y = 2$

Las dos ecuaciones obtenidas son proporcionales, por tanto, nos quedamos solamente con una de ellas porque nos aportan la misma información.

Resolvemos el sistema formado por:

$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$

Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas nos quedaran dos variables dependiendo de la tercera como solución.

Sumando las dos ecuaciones nos queda: $7y + z = 3 \rightarrow z = 7y - 3$

Aislando x en la primera ecuación: $x = 1 - 3y$

Solución:

$x = 1 - 3y$

$z = 7y - 3$

b) $\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + 2y - z = 8 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ \frac{(1.^a) + (2.^a)}{4} \\ (1.^a) + (3.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ 2x - y = -3 \\ 9x - y = -3 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} 7x - 3y + z = -11 \\ 2x - y = -3 \\ -7x = 0 \end{cases}$

Por lo tanto $x = 0$; $y = 3$, $z = -2$.

Página 76

6. Inecuaciones con fracciones algebraicas

Hazlo tú

- **Resuelve esta inecuación:**

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{x} \le x}$$

$$\frac{x-1}{x} - x \le 0 \;\to\; \frac{x-1-x^2}{x} \le 0$$

La ecuación $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene solución y la gráfica de $x - 1 - x^2 = 0$ no tiene valores positivos.

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, +\infty)$
$x - 1 - x^2$	–	–	–
x	–	0	+
$\frac{x-1-x^2}{x}$	+	No existe	–

La solución de la inecuación es $(0, +\infty)$.

7. Sistemas de inecuaciones con una incógnita

Hazlo tú

- **Resuelve.**

$\boldsymbol{x < 10 < x^2}$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x < 10 \\ x^2 > 10 \end{cases} \to \begin{cases} x < 10 \\ x > \sqrt{10} \text{ o bien } x < -\sqrt{10} \end{cases}$$

La solución es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, 10)$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 77

1. Fórmulas de Cardano-Vieta

- **Demostrar que las soluciones, x_1 y x_2, de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ cumplen lo siguiente:**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ y por tanto sus soluciones las podemos expresar como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veamos que $x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Veamos ahora que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. Aplicación de las fórmulas de Cardano-Vieta

- **Calcula los coeficientes m y n para que esta ecuación $mx^2 + x - n = 0$ tenga por soluciones $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.**

Lo podemos resolver por dos caminos diferentes.

- Por Cardano-Vieta.

  Si $x_1 = \dfrac{3}{4}$ y $x_2 = \dfrac{1}{3}$ son soluciones, cumplirán que:

  $$x_1 \cdot x_2 = \frac{-n}{m} \rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{n}{m} \rightarrow \frac{1}{4} = -\frac{n}{m} \rightarrow m = -4n \; (*)$$

  Además: $x_1 + x_2 = \dfrac{-1}{m}$

  $$x_1 + x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12} = \frac{-1}{m} \rightarrow m = -\frac{12}{13}$$

  Volviendo a (*), podemos calcular $n = \dfrac{3}{13}$.

- Como son soluciones también cumplen: $\left(x - \dfrac{3}{4}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 0$

  Desarrollamos: $x^2 - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4} = x^2 - \dfrac{13}{12}x + \dfrac{1}{4}$

  Multiplicamos por $-\dfrac{12}{13}$: $\dfrac{-12}{13}x^2 + x - \dfrac{12}{52} \rightarrow m = -\dfrac{12}{13}$ y $n = \dfrac{3}{13}$

3. Planteamiento y resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

- **Para fabricar una lata de conservas cilíndrica de capacidad 48π cm³, se necesitan 56π cm² de chapa. Calcular las dimensiones de la lata de conservas.**

$$\begin{cases} \pi r^2 h = 48\pi \\ 2\pi r^2 + 2\pi r h = 56\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r^2 h = 48 \rightarrow h = \dfrac{48}{r^2} \\ 2r^2 + 2rh = 56 \end{cases}$$

$$2r^2 + 2r\frac{48}{r^2} = 56 \rightarrow 2r^2 + 2r\frac{48}{r^2} - 56 = 0 \rightarrow \frac{96}{r} + 2r^2 - 56 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2(r^3 - 28r + 48)}{r} = 0 \rightarrow (r^3 - 28r + 48) = 0 \rightarrow r = 4,\ r = 2,\ r = -6 \ \text{(no es válida)}$$

Soluciones: $r_1 = 4 \rightarrow h_1 = \dfrac{48}{16} = 3;\ r_2 = 2 \rightarrow h_2 = \dfrac{48}{4} = 12$

4. Planteamiento y resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

- **En un grupo de 1.º de bachillerato todos tienen como materia de modalidad biología, dibujo o tecnología. Las matrículas en biología representan el 60 % del total. Si tres alumnos de dibujo se hubiesen matriculado en tecnología, entonces las dos asignaturas tendrían el mismo número de estudiantes. Finalmente, el doble de la diferencia del número de matriculados en biología y en dibujo es el triple de la diferencia de los matriculados en dibujo y en tecnología. Hallar el número de estudiantes matriculados en cada una de las materias.**

x = n.º de estudiantes de biología

y = n.º de estudiantes de dibujo

z = n.º de estudiantes de tecnología

Planteamos el sistema de 3 ecuaciones inicial:

$$\begin{cases} x - 0,6(x + y + z) \\ y - 3 = z + 3 \\ 2(x - y) = 3(y - z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 0,6x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 2y - 3y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0,4x - 0,6y - 0,6z = 0 \\ y - z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 1.ª ecuación por 5:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 & \text{(1.ª)} \\ y - z = 6 & \text{(2.ª)} \\ 2x - 5y + 3z = 0 & \text{(3.ª)} - \text{(1.ª)} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 & \text{(1.ª)} \\ y - z = 6 & \text{(2.ª)} \\ -2y + 6z = 0 & \text{(3.ª)} + 2 \cdot \text{(1.ª)} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z = 0 \\ y - z = 6 \\ 4z = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 9 \\ z = 3 \end{cases}$$

Solución: $x = 18$ de biología, $y = 9$ de dibujo, $z = 3$ de tecnología.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 78

Para practicar

Factorización

1 Factoriza estos polinomios y encuentra sus raíces:

a) $9x^4 - x^2$ **b)** $4x^2 - 28x + 49$

c) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ **d)** $2x^3 - x^2 - x$

e) $x^4 - 13x^2 + 36$ **f)** $x^4 + 2x^2 + 1$

a) $9x^4 - x^2 = x^2(9x^2 - 1) = x^2(3x - 1)(3x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3}$

b) $4x^2 - 28x + 49 = (2x - 7)^2$

Raíz: $x = \frac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{r|l} x^3 + 9x^2 + 27x + 27 & x + 3 \\ x^2 + 6x + 9 & x + 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3$

Raíz: $x = -3$

d)
$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - x & x \\ 2x^2 - x - 1 & x - 1 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \\ 1 & \end{array}$$

$2x^3 - x^2 - x = x(x - 1)(2x + 1)$

Raíces: $x = 0,\ x = 1,\ x = -\frac{1}{2}$

e)
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 13x^2 + 36 & x - 2 \\ x^3 + 2x^2 - 9x - 18 & x + 2 \\ x^2 - 9 & x - 3 \\ x + 3 & x + 3 \\ 1 & \end{array}$$

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x - 3)(x + 3)(x + 2)$

Raíces: $x = 2,\ x = -2,\ x = 3,\ x = -3$

f) $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

Es un producto notable. No tiene raíces porque $x^2 + 1$ no se puede descomponer.

2 **Halla, en cada uno de estos casos, el máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ y el mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:**

a) $A(x) = x^2 + x - 12;\; B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1;\; B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2;\; B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)\,(x + 4);\; B(x) = x(x - 3)\,(x + 3)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x - 3)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x(x - 3)\,(x + 3)\,(x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)\,(x + 1)^2;\; B(x) = x(x - 1)\,(x + 1)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x - 1)\,(x + 1)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x(x - 1)\,(x + 1)^2$

c) $A(x) = x^2(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1);\; B(x) = (x - 1)\,(x^2 + 1)$

máx.c.d. $[A(x), B(x)] = (x - 1)\,(x^2 + 1)$

mín.c.m. $[A(x), B(x)] = x^2(x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + 1)$

3 **Descompón los siguientes polinomios:**

a) $x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x$

a)

	1	–4	–10	26	–11	30
2		2	–4	–28	–4	–30
	1	–2	–14	–2	–15	0
–3		–3	15	–3	15	
	1	–5	1	–5	0	
5		5	0	5		
	1	0	1	0		

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto:

$x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 11x + 30 = (x - 2)(x + 3)(x - 5)(x^2 + 1)$

b) $3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$

	1	–5	8	–4
1		1	–4	4
	1	–4	4	0

Nos queda por factorizar: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$:

$3x^4 - 15x^3 + 24x^2 - 12x = 3x(x - 1)(x - 2)^2$

4 **Escribe un polinomio que tenga como raíces...:**

a) 1, 2, –3, –2

b) 0, –4, –1 (doble)

a) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 2) = (x - 1)(x + 3)(x^2 - 4) = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4) =$

$= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x^2 - 8x + 12 = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

b) $x(x + 1)^2(x + 4) = x(x^2 + 2x + 1)(x + 4) = x(x^3 + 2x^2 + x + 4x^2 + 8x + 4) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x$

Fracciones algebraicas

5 **Simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^5 + 3x^4 + 2x^3}$

b) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\dfrac{-x^3 - 4x^2 + 11x + 30}{x^2 + 2x - 15}$

d) $\dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^5 + 3x^4 + 2x^3} = \dfrac{x^2(x-1)(x+1)}{x^3(x+2)(x+1)} = \dfrac{1}{x}\,\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4} = \dfrac{(x+2)^3}{(x+2)^2} = x + 2$

c) $\dfrac{-x^3 - 4x^2 + 11x + 30}{x + 2x - 15} = \dfrac{-(x+5)(x-3)(x+2)}{(x+5)(x-3)} = -x - 2$

d) $\dfrac{x^4 - 4x^2}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \dfrac{x^2(x-2)(x+2)}{x(x+2)^2} = x\dfrac{x-2}{x+2}$

6 **Opera y simplifica el resultado.**

a) $\dfrac{3a + 3}{12a - 12} : \dfrac{(a+1)^2}{a^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)^3} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2 - 1}$

c) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)$

e) $\left(1 - \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \dfrac{x+3}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2}$

a) $\dfrac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)}$

c) $\dfrac{x(x-1) - x(x-2) - x}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{x^2 - x - x^2 + 2x - x}{(x-2)(x-1)} = 0$

d) $\dfrac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)} : \dfrac{x+2+x}{x+2} = \dfrac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \dfrac{x+2}{2x+2} = \dfrac{3x+2}{x(2x+2)} = \dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

e) $\dfrac{x^2 + 4 + 4x - x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} \cdot (x+2) = \dfrac{1}{x+2}$

7 **Demuestra las siguientes identidades:**

a) $\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1-x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \dfrac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-2}\right) : \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-2}\right) = 2x - 5$

a) $\left(\dfrac{1-x+2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)}:\dfrac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)}=\dfrac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)}=1$

c) $\left(\dfrac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)}\right):\left(\dfrac{(x-2)-(x-3)}{(x-3)(x-2)}\right)=\dfrac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)}:\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}=$

$=\dfrac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=2x-5$

Ecuaciones polinómicas

8 **Resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones:**

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{2+x}{4}$

b) $0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x-1)^2=1{,}25x-(0{,}5x+2)^2$

c) $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{1+x}{2}=\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{2+x}{4}$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por 16.

$x^2-6x-7=x^2-6x-7$

Obtenemos una identidad, luego las soluciones son todos los números reales.

b) $0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x-1)^2=1{,}25x-(0{,}5x+2)^2$

$0{,}2x+0{,}6-0{,}25(x^2-2x+1)=1{,}25x-(0{,}25x^2+2x+4)$

$-0{,}25x^2+0{,}7x+0{,}35=-0{,}25x^2-0{,}75x-4$

$0{,}7x+0{,}75x=-0{,}35-4$

$1{,}45x=-4{,}35$

Solución: $x=-3$

c) $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$

$25x^2-30x+9+25x-20x^2=5x^2-5x$

$9=0$

No tiene solución.

9 **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a) $0{,}5(x-1)^2-0{,}25(x+1)^2=4-x$

b) $\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x}{2}-2\right)^2-\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{x-1}{4}$

c) $0{,}\widehat{3}x^2-x-1{,}\widehat{3}=0$

d) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

e) $\dfrac{x^2-2x+5}{2}-\dfrac{x^2+3x}{4}=\dfrac{x^2-4x+15}{6}$

f) $\dfrac{3x+1}{3}-\dfrac{5x^2+3}{2}=\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+2}{3}$

g) $(x-a)^2+x(x+b)=8b^2-x(2a-b)+a^2$

a) $0{,}5(x^2 + 1 - 2x) - 0{,}25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$

$0{,}5x^2 + 0{,}5 - x - 0{,}25x^2 - 0{,}25 - 0{,}5x = 4 - x$

$0{,}25x^2 - 0{,}5x - 3{,}75 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$x = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x_1 = -3;\; x_2 = 5$

b) $\frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{4} + 4 - 2x\right) - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x-2}{8}$

$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2;\; 3x^2 - 23x + 44 = 0$

$x = \frac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$

$x_1 = 4;\; x_2 = \frac{11}{3}$

c) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x_1 = 4,\; x_2 = -1$

d) $x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$

$0 = 2x^2 - 8;\; x^2 = 4$

$x_1 = -2;\; x_2 = 2$

e) $6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$

$x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0;\; x_2 = 13$

f) $6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$

$0 = 18x^2 - 8x;\; 2x(9x - 4) = 0$

$x_1 = 0;\; x_2 = \frac{4}{9}$

g) $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$

$2x^2 = 8b^2;\; x^2 = 4b^2;\; x = \pm 2b$

$x_1 = 2b;\; x_2 = -2b$

10 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 + 3x^2 - 4 = 0}$

c) $\boldsymbol{x^4 + 3x^2 + 2 = 0}$ **d)** $\boldsymbol{x^4 - 9x^2 + 8 = 0}$

a) $x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 2;\; x_2 = -2;\; x_3 = 1;\; x_4 = -1$

b) $x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x_1 = 1;\; x_2 = -1$

c) $x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow$ No tiene solución

d) $x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\; x_2 = -1;\; x_3 = 2\sqrt{2};\; x_4 = -2\sqrt{2}$

11 **Resuelve.**

a) $(x^2-2)^2=1$ **b)** $\frac{3x^4-1}{4}+\frac{1}{2}\left(x^4-2-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{x^2-5}{4}$

c) $x^6-2x^3+1=0$ **d)** $x^8-15x^4-16=0$

a) $(x^2-2)^2=1 \to x^4-4x^2+4=1$

$x^4-4x^2+3=0$

$x^2=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$

$x_1=\sqrt{3};\ x_2=-\sqrt{3};\ x_3=1;\ x_4=-1$

b) $3x^4-1+2x^4-4-x^2=x^2-5$

$5x^4-2x^2=0$

$x^2(5x^2-2)=0\begin{cases}x^2=0\\5x^2-2=0\end{cases}$

$x_1=0;\ x_2=\sqrt{\frac{2}{5}};\ x_3=-\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $x^6-2x^3+1=0$

Hacemos el cambio de variable $x^3=y$.

$y^2-2y+1=0 \to y=1$

$x=\sqrt[3]{1}=1$

d) $x^8-15x^4-16=0$

Hacemos el cambio de variable $x^4=y$.

$y^2-15y-16=0 \to y=16,\ y=-1$ que no es válida.

$x=\pm\sqrt[4]{16} \to x_1=2,\ x_2=-2$

12 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $6x^3+7x^2-1=0$ **b)** $16x^5-8x^3+x=0$ **c)** $x^3+6x^2-7x-60=0$

d) $x^3-49x=0$ **e)** $x^3+9x^2+15x-25=0$ **f)** $x^6+3x^2=0$

a)

	6	7	0	–1
–1		–6	–1	1
	6	1	–1	0

Por tanto, $x_1=-1$.

Queda por resolver $6x^2+x-1=0$:

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{12}=\frac{-1\pm 5}{12} \to x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{3}$

Las soluciones son $x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{3}$.

b) $16x^5-8x^3+x=0 \to x(16x^4-8x^2+1)=0$

Por tanto, $x=0$ es solución de la ecuación. Resolvemos ahora la ecuación bicuadrada, $16x^4-8x^2+1=0$.

Hacemos el cambio $y=x^2$:

$16y^2-8y+1=0 \to y=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot 16}}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ (es solución doble)

$\to x=\pm\frac{1}{2}$, (ambas son soluciones dobles)

Las soluciones de la ecuación son, por tanto $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=-\frac{1}{2}$.

c)

	1	6	–7	–60
3		3	27	60
	1	9	20	0

Por tanto, $x_1 = 3$.

$x^2 + 9x + 20 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} \rightarrow x_2 = -5;\ x_3 = -4$

Las soluciones son $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = -4$.

d) $x^3 - 49x = x(x^2 - 49) = x(x-7)(x+7) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 7,\ x_3 = -7$

e)

	1	9	15	–25
1		1	10	25
	1	10	25	0

Por tanto, $x_1 = 1$.

$x^2 + 10x + 25 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100-100}}{2} = \dfrac{-10}{2} \rightarrow x = -5$ (raíz doble)

Las soluciones son $x_1 = 1,\ x_2 = -5,\ x_3 = -5$ (doble).

f) $x^6 - 3x^2 = 0 = x^2(x^4 - 3) \rightarrow x_1 = 0$

$x^4 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$

$x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[4]{3},\ x_3 = -\sqrt[4]{3}$ (soluciones dobles)

Ecuaciones con fracciones algebraicas

13 Resuelve sin olvidar comprobar las soluciones:

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

c) $\dfrac{3x-7}{x} = \dfrac{8x}{x+1} - 5$

d) $\dfrac{x-3}{x^2-9} + \dfrac{x+1}{x+3} = x + 2$

e) $\dfrac{x+7}{x+1} - \dfrac{7x+1}{x^2+2x+1} = x - 4$

f) $\dfrac{30}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2x+1}{x+3}$

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x-1}{x^2} = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2.

$\dfrac{2x-1}{x^2} = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0$$

$x = \dfrac{1}{2}$ es válida.

b) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} = -x$

$\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{2x}{2-x} + x = 0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x-2)$.

$\dfrac{x(x-3)}{x-2} = 0 \rightarrow x(x-3) = 0$

Soluciones: $x_1 = 3,\ x_2 = 0$. Son válidas.

c) $\frac{3x-7}{x}=\frac{8x}{x+1}-5$

$\frac{3x-7}{x}-\frac{8x}{x+1}+5=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $x(x+1)$.

$\frac{(x-7)}{x(x+1)}=0 \rightarrow x-7=0 \rightarrow x=7$ es válida.

d) $\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}=x+2$

$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=0$

Reducimos a común denominador, simplificamos y multiplicamos por $(x+3)$.

$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+1}{x+3}-x-2=-\frac{(x+2)^2}{x+3}=0 \rightarrow x+2=0$

Solución: $x=-2$, es válida.

e) $\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}=x-4$

$\frac{x+7}{x+1}-\frac{7x+1}{x^2+2x+1}-x+4=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por $(x+1)^2$.

$\frac{-x^3+3x^2+8x+10}{(x+1)^2}=0 \rightarrow -x^3+3x^2+8x+10=0$

Factorizamos: $-x^3+3x^2+8x+10=-(x-5)(2x+x^2+2)$

La solución es $x=5$, que es válida.

f) $\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}=\frac{2x+1}{x+3}$

$\frac{30}{x^2+5x+6}-\frac{x}{x+2}-\frac{2x+1}{x+3}=0$

Reducimos a común denominador y multiplicamos por x^2+5x+6.

$-\frac{3x^2-8x-28}{x^2+5x+6}=0 \rightarrow 3x^2+8x-28=0$

Soluciones: $x_1=2$, $x_2=-\frac{14}{3}$. Son válidas.

Página 79

Ecuaciones con radicales

14 **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:**

a) $\sqrt{5x+6}=3+2x$ **b)** $x+\sqrt{7-3x}=1$

c) $\sqrt{2-5x}+x\sqrt{3}=0$ **d)** $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-5}=0$

a) $5x+6=9+4x^2+12x;\ 0=4x^2+7x+3$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\frac{-7\pm 1}{8}=\begin{cases}-1\\-3/4\end{cases}$$

$x_1=-1;\ x_2=-\frac{3}{4}$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x;\ \ 0 = x^2 + x - 6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$x = -3$

c) $2 - 5x = 3x^2;\ \ 0 = 3x^2 + 5x - 2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$x = -2$

d) $2x + 3 = x - 5;\ \ x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

15 Resuelve.

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ **b)** $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

c) $\sqrt{\dfrac{7x+1}{4}} = \dfrac{5x-7}{6}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{8}$

a) $5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$

$3x - 22 = -8\sqrt{2x}$

$9x^2 + 484 - 132x = 64 \cdot 2x;\ \ 9x^2 - 260x + 484 = 0$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$x = 2$

b) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \ \to\ 6\sqrt{x+1} = 12 \ \to\ \sqrt{x+1} = 2$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \ \to\ x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

c) $\dfrac{7x+1}{4} = \dfrac{25x^2 + 49 - 70x}{36}$

$63x + 9 = 25x^2 + 49 - 70x;\ \ 0 = 25x^2 - 133x + 40$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$x = 5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{8}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{8}\right)^2 \ \to\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{64}x^2 \ \to\ x = \sqrt[3]{64} = 4$, solución válida.

16 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x-4$

d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2-16x}$

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 + \sqrt[4]{3x+1}$

a) $\sqrt{3x} - \sqrt{x} - \sqrt{2} = 0$

$\sqrt{3x} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$

$(\sqrt{3x})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{2})^2$

$3x = x + 2\sqrt{2}\sqrt{x} + 2$

$2\sqrt{2}\sqrt{x} = 2x - 2$

$(2\sqrt{2}\sqrt{x})^2 = (2x-2)^2$

$8x = 4x^2 - 8x + 4 \rightarrow 4(x^2 - 4x + 1) = 0 \rightarrow x = \sqrt{3} + 2,\ x = 2 - \sqrt{3}$ no es válida.

Solución: $x = \sqrt{3} + 2$

b) $\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x} = \sqrt{7-6x}$

$(\sqrt{-5-7x} + \sqrt{4+x})^2 = (\sqrt{7-6x})^2 \rightarrow 2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} - 6x - 1 = 7 - 6x$

$2\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4} = 8 \rightarrow (\sqrt{-7x-5}\sqrt{x+4})^2 = 4^2 \rightarrow -7x^2 - 33x - 20 = 16$

Soluciones: $x_1 = -\dfrac{12}{7},\ x_2 = -3.$ Las dos son válidas.

c) $\sqrt[3]{4x-1} = x-4$

Elevamos al cubo ambos miembros:

$(\sqrt[3]{4x-1})^3 = (x-4)^3 \rightarrow 4x - 1 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \rightarrow x^3 - 12x^2 + 48x - 64 - 4x + 1 = 0$

Factorizamos:

$x^3 - 12x^2 + 44x - 63 = (x-7)(x^2 - 5x + 9)$

Solución: $x = 7$ es válida.

d) $\sqrt[3]{4-2x} = \sqrt[6]{8x^2-16x}$

Elevamos a la sexta ambos miembros:

$(4-2x)^2 = 8x^2 - 16x \rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 8x^2 - 16x \rightarrow 4x^2 - 16 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = \pm 2,$ las dos soluciones son válidas.

No tiene solución.

e) $\sqrt{2x+2} - \sqrt[4]{6x+10} = 0$

Aislamos las raíces.

$\sqrt{2x+2} = \sqrt[4]{6x+10}$

Elevamos a la cuarta ambos miembros:

$(2x+2)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 6x + 10 \rightarrow 4x^2 + 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -\dfrac{3}{2}$ no es válida.

Solución: $x = 1$

f) $\sqrt[4]{3x+1} = 4 + \sqrt[4]{3x+1} \rightarrow 0 = 4 \rightarrow$ No tiene solución.

Ecuaciones exponenciales

17 **Resuelve expresando ambos miembros de la ecuación como potencias de la misma base:**

a) $3^{x^2+1} = \dfrac{1}{9}$

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x} = 27$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \dfrac{5}{4}$

d) $5^{x^2+3x} = 0{,}04$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27}$

f) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 81$

g) $0{,}01^x = 100$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5}$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25$

a) $3^{x^2+1} = \dfrac{1}{9} \to 3^{x^2+1} = 3^{-2} \to x^2+1 = -2 \to x^2 = -3 \to$ No tiene solución.

b) $\dfrac{9^{2x}}{3^x} = 27 \to \dfrac{3^{4x}}{3^x} = 3^3 \to 3^{4x-x} = 3^3 \to 3x = 3 \to$ *Solución:* $x = 1$

c) $5 \cdot 2^{x+3} = \dfrac{5}{4} \to 5 \cdot 2^{x+3} = 5 \cdot 2^{-2} \to x+3 = -2 \to$ *Solución:* $x = -5$

d) $5^{x^2+3x} = 0{,}04 \to 5^{x^2+3x} = \dfrac{4}{100} = \dfrac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = \dfrac{1}{25} \to 5^{x^2+3x} = 5^{-2} \to x^2+3x = -2$

Soluciones: $x_1 = -1,\ x_2 = -2$

e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{8}{27} \to \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \to$ *Solución:* $x = 3$

f) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = 81 \to \left(\dfrac{1}{9}\right)^x = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-2} \to$ *Solución:* $x = -2$

g) $(0{,}01)^x = 100 \to \left(\dfrac{1}{100}\right)^x = 100^1 \to$ *Solución:* $x = -1$

h) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 36 \to 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} = 6^2 \to 6^{x+1} = 6^2 \to x+1 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

i) $\sqrt{2^{3x-1}} = 0{,}125 \to \sqrt{2^{3x-1}} = \dfrac{125}{1000} = \dfrac{1}{8} \to$

$\to \sqrt{2^{3x-1}} = \dfrac{1}{8} \to 2^{\frac{3x-1}{2}} = 2^{-3} \to \dfrac{3x-1}{2} = -3 \to$ *Solución:* $x = -\dfrac{5}{3}$

j) $3\sqrt[3]{27^{x-1}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x+5} \to 3\sqrt[3]{3^{3(x-1)}} = \left(\dfrac{1}{3^2}\right)^{2x+5} \to 3^{1+\frac{3(x-1)}{3}} = 3^{-2(2x+5)} \to$

$\to 1 + \dfrac{3(x-1)}{3} = -2(2x+5) \to x = -2(2x+5) \to$ *Solución:* $x = -2$

k) $3 \cdot 9^x \cdot 27^x = 1 \to 3 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^0 \to 3^{1+2x+3x} = 3^0 \to 1 + 5x = 0 \to$ *Solución:* $x = -\dfrac{1}{5}$

l) $5^{x-5} \cdot 125^{2x} = 25 \to 5^{x-5} \cdot 5^{3 \cdot 2x} = 5^2 \to 5^{x-5+6x} = 5^2 \to 7x - 5 = 2 \to$ *Solución:* $x = 1$

18 **Resuelve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:**

a) $\dfrac{1}{e^x} = 27$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\dfrac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3$

f) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \to \frac{1}{27} = e^x \to ln\,\frac{1}{27} = ln\,e^x \to x = ln\,\frac{1}{27} = ln\,1 - ln\,27 = 0 - ln\,27 \to x \approx -3{,}296$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \to ln\,e^{x-9} = ln\,\sqrt{73} \to x - 9 = \frac{1}{2}ln\,73 \to x = 9 + \frac{ln\,73}{2} \to x \approx 11{,}145$

c) $6^x = 81 \to x\,log\,6 = log\,81 \to x = \frac{log\,81}{log\,6} \approx 2{,}453$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \to \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \to x\,log\,\frac{2}{3} = log\,3 \to x = \frac{log\,3}{log\,2 - log\,3} \approx -2{,}710$

e) $2^{x+1} \cdot 16^{2x+1} = 3 \to 2^{x+1} \cdot 2^{4(2x+1)} = 3 \to 2^{9x+5} = 3 \to log\,2^{9x+5} = log\,3 \to$

$\to (9x+5)\,log\,2 = log\,3 \to (9x+5) = \frac{log\,3}{log\,2} = 1{,}5850$

Solución: $x = \frac{1{,}5850 - 5}{9} = -0{,}3794$

f) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 125^{x+1} = 4 \to 5^{-x} \cdot 5^{3x+3} = 4 \to 5^{2x+3} = 4 \to log\,5^{2x+3} = log\,4 \to$

$\to (2x+3)\,log\,5 = log\,4 \to (2x+3) = \frac{log\,4}{log\,5} = 0{,}8613$

Solución: $x = \frac{0{,}8613 - 3}{2} = -1{,}0693$

19 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6$

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$z = 2^x \to z + \frac{2}{z} = 3;\ z^2 + 2 = 3z$

$z^2 - 3z + 2 = 0;\ z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \to 2^x = 2 \to x_1 = 1 \\ 1 \to 2^x = 1 \to x_2 = 0 \end{cases}$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2};\ 4 \cdot 2^x + 2^x = 5;\ 2^x = 1$

$x = 0$

c) $2^{3+3x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \to 2^x = z \to 128z^3 + 8z^3 = 17$

$(128+8)z^3 = 17;\ z^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \to z = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \to 2^x = \frac{1}{2}$

$x = -1$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0;\ 3^x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 1$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0;\ 7^x = \dfrac{50 \pm 48}{14} = \begin{cases} 7 \\ 1/7 \end{cases}$

$x_1 = -1;\ x_2 = 1$

g) $2^{x/2} + 2^x = 6 \to \sqrt{2^x} + 2^x = 6$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$\sqrt{y} + y = 6 \to \sqrt{y} = -y + 6 \to (\sqrt{y})^2 = (-y+6)^2 \to y = y^2 - 12y + 36 \to$

$\to y^2 - 13y + 36 = 0 \to y = \dfrac{13 \pm 5}{2}$

$y = 9 \to 2^x = 9 \to x = \dfrac{log 9}{log 2}$ no es válida ya que:

$2^{\frac{log(9)}{log(2)}} + 2^{\frac{log(9)}{log(2)}} = 12$

$y = 4$ tampoco es válida ya que $2^2 + 2^4 = 20$. Por tanto no tiene solución.

h) $\sqrt{3^{2x} + 7} = 3^x + 1$

Hacemos el cambio de variable $3^x = y$:

$\sqrt{y^2 + 7} = y + 1 \to (\sqrt{y^2+7})^2 = (y+1)^2 \to y^2 + 7 = y^2 + 2y + 1 \to 7 = 2y + 1 \to y = 3$

Solución: $x = 1$

i) $2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 3 \cdot 2^{x+2} = 8$

Hacemos el cambio de variable $2^x = y$:

$y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y^2 + 3 \cdot 2^2 y = 8 \to y^3 - 6y^2 + 12y = 8 \to y^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \to (y-2)^3 = 0 \to y = 2$

Solución: $x = 1$

Ecuaciones logarítmicas

20 Resuelve estas ecuaciones:

a) $log\,(x^2 + 1) - log\,(x^2 - 1) = log\,\dfrac{13}{12}$

b) $ln\,(x - 3) + ln\,(x + 1) = ln\,3 + ln\,(x - 1)$

c) $(x - 1)\,log\,(3^{x+1}) = 3\,log\,3$

d) $log\,(x + 3) - log\,(x - 6) = 1$

a) $log\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = log\,\dfrac{13}{12}$

$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13;\ 25 = x^2$

$x_1 = -5;\ x_2 = 5$

b) $ln\,(x^2 - 2x - 3) = ln\,(3x - 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3;\ x^2 - 5x = 0$

$x = 5$ ($x = 0$ no vale)

c) $log\,(3^{(x+1)(x-1)}) = log\,3^3$

$3^{(x+1)(x-1)} = 3^3;\ (x+1)(x-1) = 3$

$x = 2;\ x = -2$

d) $log\,\dfrac{x+3}{x-6} = 1$

$x + 3 = 10x - 60;\ 63 = 9x$

$x = 7$

21 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\log_5 (x^2 - 2x + 5) = 1$

b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2 (\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$

d) $\frac{1}{2}\log_{11} (x + 5) = 1$

e) $\log (x^2 + 3x + 36) = 1 + \log (x + 3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log_5 (x^2 - 2x + 5) = \log_5 5$

$x^2 - 2x + 5 = 5;\ x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0;\ x_2 = 2$

b) $\dfrac{\log (x(3x+5))}{2} = 1;\ 3x^2 + 5x - 100 = 0$

$x = \dfrac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$

$x = 5$

c) $\log x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49+72}}{4} = \dfrac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1;\ x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2;\ x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$

d) $\log_{11} (x+5)^{1/2} = \log_{11} 11$

$(x+5)^{1/2} = 11;\ (x+5) = 11^2$

$x = 116$

e) $\log \dfrac{x^2 + 3x + 36}{x + 3} = 1$

$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30;\ x^2 - 7x + 6 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \dfrac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$

$x_1 = 1;\ x_2 = 6$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

$\ln (x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$

$\ln (8x^3) = 3 \ \rightarrow\ 8x^3 = e^3 \ \rightarrow\ x^3 = \dfrac{e^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{\dfrac{e^3}{8}} = \dfrac{e}{2} \ \rightarrow\ x = \dfrac{e}{2}$

22 **Resuelve.**

a) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + \log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 20$

b) $\log_2 (x - 16) = \log_4 (x - 4)$

c) $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_6 x} = 2$

a) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + \log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 20$

Vamos a expresar todos los logaritmos en base 2 usando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = \frac{\log\sqrt{x}}{\log\sqrt{2}} = \frac{\log x^{1/2}}{\log 2^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\log x}{\frac{1}{2}\log 2} = \log_2 x$$

$$\log_4 x^2 = \frac{\log x^2}{\log 2^2} = \log_2 x$$

$$\log_8 x^3 = \frac{\log x^3}{\log 2^3} = \log_2 x$$

$$\log_{16} x^4 = \frac{\log x^4}{\log 2^4} = \log_2 x$$

Volviendo a la ecuación inicial y sustituyendo nos queda que:

$5\log_2 x = 20 \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow 2^4 = x \rightarrow x = 16$

$\log_2 (x-16) = \log_{2^2}(x-4) = \frac{1}{2}\log_2(x-4) \rightarrow x - 16 = (x-4)^{1/2} \rightarrow (x-16)^2 = x - 4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 - 32x + 256 = x - 4 \rightarrow x^2 - 33x + 260 = 0 \rightarrow x = \dfrac{33 \pm \sqrt{1089 - 1040}}{2} = \dfrac{33 \pm 7}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x = 20;\ (x = 13$ no es válida)

c) Sabemos que $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ y aplicando además la propiedad de suma de logaritmos con la misma base:

$\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_6 x} = \log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 6 = \log_x (2 \cdot 3 \cdot 6) = \log_x 36 = 2 \rightarrow x^2 = 36$

Por otra parte, sabemos que la base de un logaritmo es siempre positiva $\rightarrow x = 6$

Sistemas de ecuaciones

23 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x - \ \ y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + \ 5y = -3 \\ \dfrac{x}{5} + \ \ y = 0 \\ x + 10y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x - \ \ y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ 10 - 2y - y = 7 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y = 1 \\ -5x + 21y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ -20 + 21 = 1 \end{cases}$

La solución es $x = 4,\ y = 1$.

b) $\begin{cases} 2x + 5y = -3 \\ \dfrac{x}{5} + y = 0 \\ x + 10y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 5\dfrac{x}{5} = -3 \rightarrow x = -3 \\ y = -\dfrac{x}{5} \\ x + 10y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \dfrac{3}{5} \\ -3 + 6 = 3 \end{cases}$

Se llega a una contradicción, el sistema no tiene solución.

24 **Resuelve por sustitución.**

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y \quad = 2 \\ x \quad = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y \quad = -1 \\ 3y + z = 1 \\ 4x \quad - z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y \quad = -1 \\ 2z = 4 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 1 - y = 2 \to y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 1 - 1 + z = 3 \to z = 3 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

La solución es $x = 4$, $y = 1$.

b) $\begin{cases} 2x - y \quad = -1 \to y = 2x + 1 \\ 3y + z = 1 \\ 4x \quad - z = 7 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x + 3 + z = 1 \to z = -6x - 2 \\ 4x - z = 7 \end{cases}$

$\to \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -6x - 2 \\ 4x + 6x + 2 = 7 \to x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 \\ z = -5 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

La solución es $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$, $z = -5$.

c) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2z = 4 \\ 3x - y + z = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2y - 1 \\ z = 2 \\ -6y - 3 - y + 2 = 6 \to y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

La solución es $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$.

d) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 8 \\ y + z = 9 \end{cases} \to \begin{cases} x = 7 - y \\ 7 - y + z = 8 \to z = 1 + y \\ y + 1 + y = 9 \to y = 4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 \\ z = 5 \\ y = 4 \end{cases}$

La solución es $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

25 **Resuelve por sustitución o reducción.**

a) $\begin{cases} x - y \quad = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y - z = -1 \\ y + 2z = -7 \\ x \quad - z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y \quad = 0 \\ y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - 2y + 3z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$

* ***Mira el ejercicio resuelto 5.***

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+6y-5z=-4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a)-(3.^a)}}$ $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+6y-5z=-4 \\ z=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+6y=1 \\ z=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=x-1 \\ 2x+6x-6=1 \to x=\dfrac{7}{8} \\ z=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=-\dfrac{1}{8} \\ x=\dfrac{7}{8} \\ z=1 \end{cases}$

La solución es $x=\dfrac{7}{8}$, $y=\dfrac{1}{8}$, $z=1$.

b) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ y+2z=-7 \\ x-z=0 \to z=x \end{cases} \to \begin{cases} y=1 \\ 1+2z=-7 \\ x=z \end{cases} \to \begin{cases} y=1 \\ z=-4 \\ x=-4 \end{cases}$

La solución es $x=-4$, $y=1$, $z=-4$.

c) $\begin{cases} x-y=0 \to x=y \\ y-z=1 \\ -x+2y+z=2 \end{cases} \to \begin{cases} x=y \\ z=y-1 \\ -y+2y+y-1=2 \to y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ z=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

La solución es $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{3}{2}$, $z=\dfrac{1}{2}$.

c) $\begin{cases} 2x-y-\ \ z=2 \\ x-2y+3z=5 \\ x+\ \ y-2z=1 \end{cases}$ $\xrightarrow{\substack{(1.^a)-2\cdot(3.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a)}}$ $\begin{cases} -3y+3z=0 \to z=y \\ -3y+5z=4 \\ x+\ \ y-2z=1 \end{cases} \to \begin{cases} z=y \\ 2z=4 \to z=2 \\ x+2-4=1 \to x=3 \end{cases}$

La solución es $x=3$, $y=2$, $z=2$.

Página 80

26 Resuelve.

a) $\begin{cases} x\cdot y=15 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ 2x+3y=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ 2y-x=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y^2-2y+1=x \\ \sqrt{x}+y=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1}=y+1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)}+x=12 \\ 2x-y=6 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+2=x+1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

a) $x=\dfrac{5y}{3}$

$\dfrac{5y^2}{3}=15;\ y^2=9 \begin{cases} y=3 \to x=5 \\ y=-3 \to x=-5 \end{cases}$

$x_1=5$, $y_1=3$; $x_2=-5$, $y_2=-3$

b) $\left.\begin{array}{l} 6y + 6x = 5xy \\ y = \dfrac{2-2x}{3} \end{array}\right\}$ $\quad 4 - 4x + 6x = \dfrac{5x(2-2x)}{3}$

$6x + 12 = 10x - 10x^2$

$10x^2 - 4x + 12 = 0$

$5x^2 - 2x + 6 = 0$

No tiene solución.

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \ \to \ (2y-7)^2 + y^2 = 10 \ \to \\ 2y - x = 7 \ \to \ x = 2y - 7 \end{cases}$

$\to \ 4y^2 - 28y + 49 + y^2 = 10 \ \to \ 5y^2 - 28y + 39 = 0 \ \to \ y = 3, \ y = \dfrac{13}{5}$

$y_1 = 3, \ x_1 = -1; \ y_2 = \dfrac{13}{5}, \ x_2 = -\dfrac{9}{5}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \ \to \ \left(\dfrac{6}{y}\right)^2 - y^2 = 5 \ \to \ -\dfrac{y^4 - 36}{y^2} - 5 = 0 \ \to \ -\dfrac{(y^4 + 5y^2 - 36)}{y^2} = 0 \ \to \\ xy = 6 \ \to \ x = \dfrac{6}{y} \end{cases}$

$\to \ y^4 + 5y^2 - 36 = 0 \ \to \ y_2 = 4; \ y_2 = -9$ (no es válida) $\to \ y = 2, \ y = -2$

$y_1 = 2, \ x_1 = 3; \ y_2 = -2, \ x_2 = -3$

e) $x = (5 - y)^2$

$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$

$8y = 24; \ y = 3; \ x = 4$

$x = 4; \ y = 3$

f) $4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; \ x = \dfrac{y^2 + 2y - 3}{4}$

$x = \dfrac{1 + 3y}{2} = \dfrac{2 + 6y}{4}$

$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \ \to \ x = 8 \\ -1 \ \to \ x = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1, \ y_1 = -1; \ x_2 = 8, \ y_2 = 5$

g) $y = 2x - 6$

$\sqrt{3(3x-6)} = 12 - x$

$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$

$0 = x^2 - 33x + 162$

$x = \dfrac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \ \to \ y = 48 \ \text{(no vale)} \\ 6 \ \to \ y = 6 \end{cases}$

$x = 6, \ y = 6 \ \ (x = 27, \ y = 48$ no vale)

h) $y = 2x - 5$

$\sqrt{3x - 5} = x - 1$

$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$

$0 = x^2 - 5x + 6$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \ \to \ y = 1 \\ 2 \ \to \ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = 2, \ y_1 = -1; \ x_2 = 3, \ y_2 = 1$

27 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} e^x - e^{y+1} = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$

$y = 1 + x \to 2^x + 2^{1+x} = 12 \to 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \to 3 \cdot 2^x = 12 \to$

$\to 2^x = 4 \to x = 2 \to y = 1 + 2 = 3$

$x = 2,\ y = 3$

b) $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \to e^{x+y+1} = e^0 \to x = -1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \to (-1-y)^2 + y^2 = 1 \to 2y^2 + 2y = 0 \to y(y+1) = 0 \to y = 0;\ y = -1 \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -1$

c) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases} \to \begin{cases} 5^{x+y} = 5^0 \\ 5^{x-y} = 5^2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$x = 1,\ y = -1$

d) $\begin{cases} 10^x \cdot 10^{y^2-1} = 0,1 \\ \dfrac{2^{2x}}{2^{y-1}} = 0,25 \end{cases} \to \begin{cases} 10^{x+y^2-1} = 10^{-1} \\ 2^{2x-y+1} = 2^{-2} \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 - 1 = -1 \\ 2x - y + 1 = -2 \end{cases} \to \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x = -y^2 \\ -2y^2 - y + 3 = 0 \to y = 1,\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$x_1 = -1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{9}{4},\ y_2 = -\dfrac{3}{2}$

28 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \dfrac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log (x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$

a) Sumando las dos ecuaciones obtenemos: $2 \log x = 2$

$x = 10;\ y = 100$

b) $\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 2\log_2 x - \log_2 y = 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} \log_2 x + 3\log_2 y &= 5 \\ 6\log_2 x - 3\log_2 y &= 9 \\ \hline 7\log_2 x \qquad\quad &= 14 \end{array}$$

$x = 4,\ y = 2$

c) $\begin{cases} 2log\ x + log\ y = 2 \\ log\ x - 2log\ y = 6 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} 4log\,x + 2log\,y = & 4 \\ log\,x - 2log\,y = & 6 \\ \hline 5log\,x \qquad\quad = & 10 \end{array} \rightarrow log\,x = 2$$

$x = 100$

$y = \dfrac{1}{100}$

d) De la segunda ecuación: $log\dfrac{x}{y} = 1;\ \dfrac{x}{y} = 10;\ x = 10y$

$100y^2 - y^2 = 11;\ 99y^2 = 11;\ y^2 = \dfrac{1}{9} \rightarrow y = \pm\dfrac{1}{3}$

$x = \dfrac{10}{3};\ y = \dfrac{1}{3}$

$\left(y = -\dfrac{1}{3}\ \text{no vale}\right)$

e) $\begin{cases} y = x - 25 \\ log\dfrac{y}{x} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x - 25 \\ y = 0,1x \end{cases} \rightarrow x - 25 = 0,1x \rightarrow 0,9x = 25$

$x = \dfrac{250}{9};\ y = \dfrac{25}{9}$

f) $\left.\begin{array}{l} ln\,x - ln\,y = 2 \\ ln\,x + ln\,y = 4 \end{array}\right\}$ Sumando las dos ecuaciones, queda: $2\,ln\,x = 6 \rightarrow ln\,x = 3 \rightarrow x = e^3$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$2ln\,y = 2 \rightarrow ln\,y = 1 \rightarrow y = e$

$x = e^3;\ y = e$

29 Resuelve y comprueba las soluciones.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{log\sqrt{x} - log\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}} \\ \boldsymbol{3\,log\,x + 2\,log\,y = 8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{3^x \cdot 3^{2y} = 3^{11}} \\ \boldsymbol{\dfrac{2^x}{2^y} = \dfrac{1}{2^4}} \end{cases}$

a) $\begin{cases} log\sqrt{x} - log\sqrt{y} = \dfrac{1}{2} \\ 3\,log\,x + 2\,log\,y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}log\,x - \dfrac{1}{2}log\,y = \dfrac{1}{2} \\ 3\,log\,x + 2\,log\,y = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} log\,x - log\,y = 1 \\ 3\,log\,x + 2\,log\,y = 8 \end{cases}$

Multiplicamos la 1ª por 2 y la sumamos a la segunda:

$5log\,x = 10 \rightarrow log\,x = 2 \rightarrow x = 100$

Sustituimos en la segunda:

$6 + 2log\,y = 8 \rightarrow log\,y = 1 \rightarrow y = 10$

Comprobamos la posible solución $x = 100,\ y = 10$.

$\begin{cases} log\sqrt{100} - log\sqrt{10} = log\,10 - \dfrac{1}{2}log\,10 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \\ 3\,log\,100 + 2\,log\,10 = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \end{cases}$

La solución es correcta.

b) $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 3^{11} \\ \dfrac{2^x}{2^y} = \dfrac{1}{2^4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3^{x+2y} = 3^{11} \rightarrow x + 2y = 11 \\ 2^{x-y} = 2^{-4} \rightarrow x - y = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - y = -4 \end{cases} \begin{matrix} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \end{matrix} \begin{cases} 3y = 15 \rightarrow y = 5 \\ x - 5 = -4 \rightarrow x = 1 \end{cases}$

La solución es $x = 1$, $y = 5$.

30 Resuelve.

a) $\begin{cases} (x-1)\cdot(y-1) = 0 \\ (x-5)\cdot(y-2) = 0 \\ (x-1)\cdot(y-3) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y(x-y) = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} (x-1)\cdot(y-1) = 0 \\ (x-5)\cdot(y-2) = 0 \\ (x-1)\cdot(y-3) = 0 \end{cases}$

Para que la primera ecuación se cumpla, o $x = 1$ o $y = 1$.

- Si $x = 1$, para que la segunda ecuación se cumpla, $y = 2$.

  Además, se cumple la tercera.

  Por lo tanto, una solución es $x = 1$, $y = 2$.

- Si $y = 1$, para que se cumpla la segunda ecuación $x = 5$. Pero, en este caso, la tercera ecuación no se cumple, por lo tanto, $x = 5$, $y = 1$ no es una solución.

La única solución es $x = 1$, $y = 2$.

b) $\begin{cases} y(x-y) = 0 \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$

Para que la primera ecuación se cumpla, o $y = 0$ o $x = y$.

- Si $y = 0$, para que se cumpla la segunda ecuación:

  $x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

  Hay dos soluciones en este caso:

  $x = 3$, $y = 0$

  $x = -3$, $y = 0$

- Si $x = y$, sustituyendo en la segunda ecuación:

  $x^2 + 3x^2 + 5x^2 = 9 \rightarrow 9x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 1$

  Hay dos soluciones en este caso:

  $x = 1$, $y = 1$

  $x = -1$, $y = -1$

El sistema tiene cuatro soluciones:

$x = 3$, $y = 0$

$x = -3$, $y = 0$

$x = 1$, $y = 1$

$x = -1$, $y = -1$

Inecuaciones. Sistemas de inecuaciones

31 **Resuelve estas inecuaciones:**

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \ge 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \le 0$

a) $10 + 5x > -5x;\ \ 10x > -10;\ \ x > -1$

La solución es: $(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2;\ \ 1 > x$

La solución es: $(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0$

La solución es: $(-5, 0)$

d) La solución es: $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{cases} -2 \\ -4 \end{cases}$

$(x + 2)(x + 4) \ge 0$

La solución es: $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

La solución es: $[-3, 5]$

32 **Resuelve.**

a) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

b) $x(x^2 + 3) < 0$

c) $\frac{x^2}{x+4} < 0$

d) $\frac{x-3}{x+2} < 0$

a) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x+1>0 \\ x-3>0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x>-1 \\ x>3 \end{array}\right\} (3, +\infty) \\ \left.\begin{array}{l} x+1<0 \\ x-3<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x<-1 \\ x<3 \end{array}\right\} (-\infty, -1) \end{array}\right\}$ La solución es: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

b) La solución es $(-\infty, 0)$ ya que $x^2 + 3$ es siempre positivo.

c) x^2 es siempre positivo, entonces para que el cociente sea negativo lo tiene que ser su denominador.

$x + 4 < 0 \to x < -4$

La solución es: $(-\infty, -4)$

d)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+	–	+

La solución es: $(-2, 3)$

33 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x < 1 \\ x > -4 \end{array}\right\} (-4, 1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{array}\right\} (4, +\infty)$

c) $\left.\begin{array}{l} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{array}\right\} (17, +\infty)$

d) $\left.\begin{array}{l} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{array}\right\}$ No tiene solución.

34 **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} x^2+2x>15 \\ 3-2x<7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-x^2\ge 4 \\ 5x-1<4x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2\le 4 \\ x^2-5x+4\le 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2-5x-6\ge 0 \\ -x^2+11x-24\ge 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2+2x>15 & \to \ \textit{Soluciones:} \ (-\infty,-5)\cup(3,\infty) \\ 3-2x<7 & \to \ \textit{Soluciones:} \ (-2,\infty) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty,-5)\cup(3,\infty))\cap(-2,\infty)=(3,\infty)$

b) $\begin{cases} 5x-x^2\ge 4 & \to \ \textit{Soluciones:} \ [1,4] \\ 5x-1<4x+2 & \to \ \textit{Soluciones:} \ (-\infty,3) \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[1,4]\cap(-\infty\ 3)=[1,3)$

c) $\begin{cases} x^2\le 4 & \to \ \textit{Soluciones:} \ [-2,2] \\ x^2-5x+4\le 0 & \to \ \textit{Soluciones:} \ [1,4] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $[-2,2]\cap[1,4]=[1,2]$

d) $\begin{cases} x^2-5x-6\ge 0 & \to \ \textit{Soluciones:} \ (-\infty,-1]\cup[6,\infty) \\ -x^2+11x-24\ge 0 & \to \ \textit{Soluciones:} \ [3,8] \end{cases}$

Las soluciones comunes son: $((-\infty,-1]\cup[6,\infty))\cap[3,8]=[6,8]$

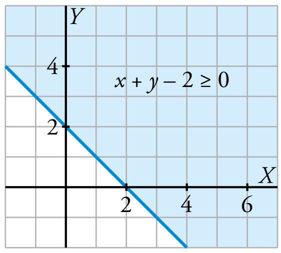
35 **Resuelve gráficamente.**

a) $x+y-2\ge 0$ b) $2x-3y\le 6$ c) $\dfrac{x-3y}{2}\le 3$ d) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\ge -1$

a) Dibujamos la recta $r: x+y-2=0$.

Tomamos el punto $O=(0,0)\notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que no se verifica la desigualdad $0+0-2\ge 0$.

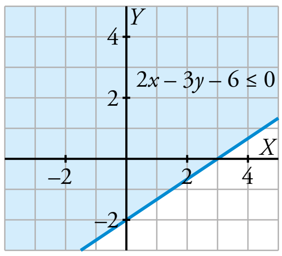
La solución es el semiplano que no contiene a O.



b) Dibujamos la recta $r: 2x-3y-6=0$.

Tomamos el punto $O=(0,0)\notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0-0-6\le 0$.

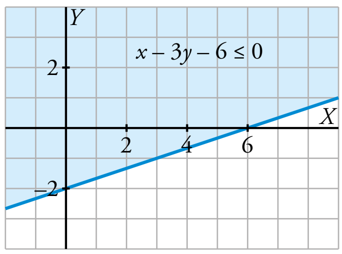
La solución es el semiplano que contiene a O.



c) $\dfrac{x-3y}{2}\le 3 \to x-3y-6\le 0$. Dibujamos la recta $r: x-3y-6=0$.

Tomamos el punto $O=(0,0)\notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0-0-6\le 0$.

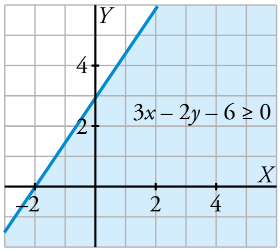
La solución es el semiplano que contiene a O.



d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq -1 \rightarrow 3x - 2y + 6 \geq 0$. Dibujamos la recta r: $3x - 2y + 6 = 0$.

Tomamos el punto $O = (0, 0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \geq 0$.

La solución es el semiplano que contiene a O.

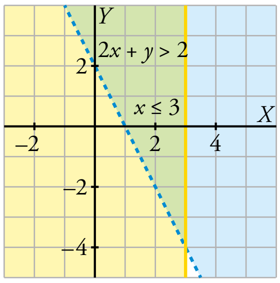


36 **Resuelve gráficamente.**

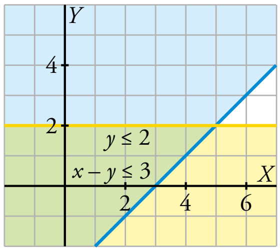
a) $\begin{cases} 2x + y > 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

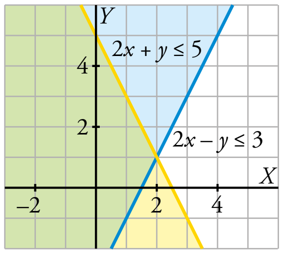
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos. La recta $2x + y = 2$ no pertenece al recinto solución.



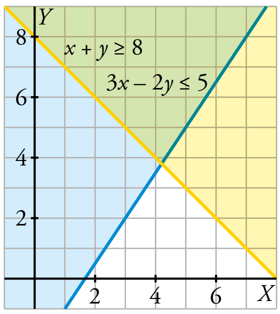
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



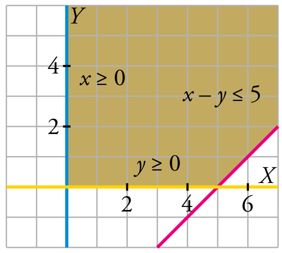
d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de ambos semiplanos.



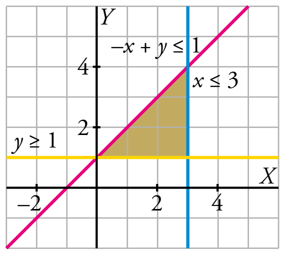
37 **Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas.**

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ 2x - y > 1 \\ y > 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x - y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

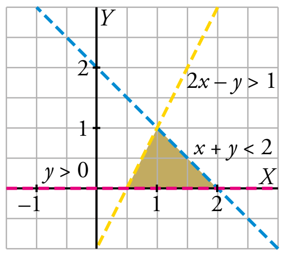
a) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los tres semiplanos.



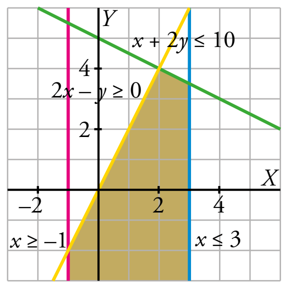
b) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos.



c) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es el triángulo intersección de los tres semiplanos (los segmentos de los lados del triángulo no pertenecen a la solución).



d) Resolvemos cada una de las inecuaciones. El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.



Página 81

Para practicar

38 **Un inversor, que tiene 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8 % y el resto en otro banco al 6 %. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?**

x al 8 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}08x$

$(28\,000 - x)$ al 6 % $\xrightarrow{\text{1 año}}$ $0{,}06\,(28\,000 - x)$

$0{,}08x = 0{,}06(28\,000 - x) + 200;\ \ 0{,}08x = 1\,680 - 0{,}06x + 200 \ \to\ x = 13\,428{,}57$ €

Colocó 13 428,57 € al 8 % y 14 571,43 € al 6 %.

39 **Contratamos una hipoteca en enero de 2019 con revisión semestral del tipo de interés. En julio nos sube la cuota un 4 %, en la siguiente revisión baja un 1 % respecto a julio. Si en el mes de enero de 2020 tenemos que pagar 19,24 € mensuales más que en el mismo mes del año anterior, ¿cuál era la cuota inicial?**

Usamos la fórmula $C_f = C_i \cdot \textit{índice variación}$ con C_f = Cuota final, C_i = Cuota inicial

El índice de variación en el primer semestre es $1 + \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 + 0{,}04 = 1{,}004$

El índice de variación en el segundo semestre es $1 - \frac{r}{2}$ (donde r es el tanto por uno del interés).

$i.v. = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

El índice de variación total es *índice de variación* = 1,04 · 0,99 = 1,0296

$C_f = C_i \cdot \textit{índice variación} \rightarrow x + 19{,}24 = x \cdot 1{,}0296 \rightarrow x = 650$ € era la cuota inicial.

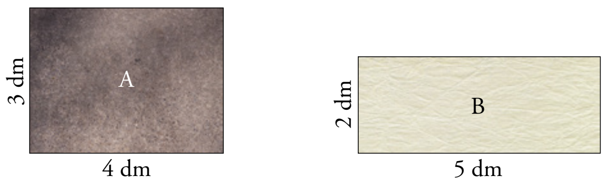
40 **El número de visitantes a cierta exposición durante el mes de febrero se incrementó en un 12 % respecto al mes de enero. Sin embargo, en marzo sufrió un descenso del 12 % respecto a febrero. Si el número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo, ¿cuántas personas vieron la exposición en enero?**

Enero $\xrightarrow{+12\,\%}$ Febrero $\xrightarrow{-12\,\%}$ Marzo

x $\quad 1{,}12\,x \quad 0{,}88 \cdot 1{,}12x = 0{,}9856x$

$x = 0{,}9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500$ personas.

41 **Para cubrir el suelo de una habitación, un solador dispone de dos tipos de baldosas:**



Eligiendo el tipo A, se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiera el tipo B. ¿Cuál es la superficie de la habitación?

$$\left.\begin{array}{l} \text{n.º baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.º baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array}\right\} \text{Superficie: } 12x = 10(x + 40)$$

$12x = 10x + 400$

$2x = 400$

$x = 200$ baldosas

$200 \cdot 12 = 2\,400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$

42 **En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene otro número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3x}{D} \cdot \dfrac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \dfrac{x}{D} \cdot \dfrac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array}\right\} \begin{array}{l} 31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3 \end{array}$$

El número es el 93.

43 Dos grifos llenan un depósito de 1500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?

Entre los dos $\rightarrow$ 1 500 litros en 1,2 horas.

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\text{o}} \rightarrow t+1 \\ 2.^{\text{o}} \rightarrow t \end{array}\right\} \frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}=\frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)}=\frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$2,4t + 1,2 = t^2 + t$

$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$

$$t=\frac{1,4\pm 2,6}{2}= \begin{cases} 2 \\ -0,6 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

El primero tardaría 3 horas, y el segundo, 2 horas.

44 Una piscina tarda 5 horas en llenarse utilizando su toma de agua habitual, y 20 horas si utilizamos una manguera. ¿Qué tiempo será necesario emplear para su llenado si usamos ambos métodos de forma simultánea?

En una hora, la toma de agua habitual llenaría $\frac{1}{5}$ de la piscina. En una hora la manguera llenaría $\frac{1}{20}$ de la piscina.

Entre los dos, en una hora llenarían $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}$ de la pisicina.

Luego necesitan 4 horas para llenar la piscina.

45 Una bodega vende su vino de montaña a 18 €/L y su vino del valle a 12 €/L. ¿Cuántos litros de cada uno debe echar a una barrica para conseguir 60 litros de la mezcla a 14,4 €/L?

Llamaremos x al n.º de litros de vino de montaña que vamos a emplear, e y al n.º de litros de vino de valle. Del enunciado deducimos:

$$\begin{cases} x+y=60\ (*) \\ 14,4\cdot 60=18x+12y\ (**) \end{cases}$$

Simplificando (**): $144 = 3x + 2y$

Aislando en (*): $x = 60 - y$

Por tanto: $144=3(60-y)+2y=180-y \rightarrow y=36 \rightarrow x=24$

46 Calcula el lado y la apotema de un hexágono regular de 40 cm² de área.

Un hexágono, H, regular está formado por 6 triángulos, T, cuyos lados son iguales, por lo que podemos usar sus áreas para calcular el área del hexágono.

$A_H=6\cdot A_T=6\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}$; donde la base es un lado del triángulo al que llamaremos a y h a su altura, la apotema que buscamos.

$40=6\cdot\frac{a\cdot \text{h}}{2} \rightarrow 3a\text{h}=40 \rightarrow \text{h}=\frac{40}{3a}\ (*)$

Además podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que nos queda de dividir en dos el triángulo regular, puesto que sabemos que tiene un ángulo recto: $a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\text{h}^2 \rightarrow \frac{3}{4}a^2=\text{h}^2\ (**)$

Sustituyendo (*) en (**): $\frac{3}{4}a^2=\left(\frac{40}{3a}\right)^2 \rightarrow a^4=\frac{40^2\cdot 4}{3^2\cdot 3}= \rightarrow a^2=\frac{80}{3\sqrt{3}} \rightarrow a=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3^3}}$

Y volviendo a (*): $\text{h}=\frac{40}{3a}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

47 El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 18 cm. Si su área es 216 cm², ¿cuánto miden la hipotenusa y el cateto mayor?

Llamaremos h a la hipotenusa y a al cateto mayor.

Área = 216 cm², por tanto:

$$\begin{cases} h^2 = 18^2 + a^2 \\ 216 = \dfrac{a \cdot 18}{2} = 9a \to a = 24 \end{cases}$$

$h^2 = 18^2 + 24^2 = 900 \to h = \pm 30$

La hipotenusa mide 30 cm, el cateto mayor mide 24 cm.

48 Marcos necesita 24 dm² de tela para construir una cometa con forma de rombo de medio metro de lado. Si cada metro de listón cuesta 12 €, ¿cuánto pagará por las dos varillas que necesita la estructura de la cometa?

Dividimos el rombo, *R*, en 4 triángulos, *T*, iguales y rectángulos de hipotenusa h, cateto corto a y cateto largo b.

Sabemos h = 0,5 m = 5 dm.

$A_R = 24 = 4A_T = 4\dfrac{a \cdot b}{2} = 2ab \to 12 = ab \to a = \dfrac{12}{b}$ (*)

Por el teorema de Pitágoras: $5^2 = a^2 + b^2$ (**)

Sustituyendo (*) en (**):

$25 = \dfrac{12^2}{b^2} + b^2 \to 144 + b^4 = 25b^2 \to b^4 - 25b^2 + 144 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, usando $y = b^2$:

$y^2 - 25y + 144 = 0 \to y = \dfrac{25 \pm \sqrt{49}}{2} \to y_1 = 16,\ y_2 = 9$

$y_1 = 16 \to b = \pm 4$ y como no tiene sentido que el lado de un triángulo sea negativo, $b = 4$.

$y_2 = 9 \to b = \pm 3$ y como no tiene sentido que el lado de un triángulo sea negativo, $b = 3$.

Si $b = 4 \to a = 3$

Si $b = 3 \to a = 4$

Por lo tanto necesita una varilla de 6 dm y otra de 8 dm (a y b son la mitad de cada varilla) por lo que si cada metro vale 12 € tendremos que 1 dm = 1,2 € y tendrá que pagar 14 · 1,2 = 16,8 €.

49 Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

Tenía x docenas $\to \dfrac{36}{x}$ €/docena

Le quedan $x - 4$ docenas $\to \left(\dfrac{36}{x} + 0,45\right)$ €/docena

$\left(\dfrac{36}{x} + 0,45\right)(x - 4) = 36$

$(36 + 0,45x)(x - 4) = 36x$

$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x$

$0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$

$x = 20$ ($x = -16$ no vale) $\Rightarrow$ Tenía 20 docenas.

50 **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilogramos compró?**

Compró x kg $\to \dfrac{125}{x}$ €/kg

Vende $(x-20)$ kg $\to \left(\dfrac{125}{x}+0,40\right)$ €/kg

$\left(\dfrac{125}{x}+0,40\right)(x-20)=147$

$(125+0,40x)(x-20)=147x$

$125x-2\,500+0,40x^2-8x=147x$

$0,40x^2-30x-2\,500=0$

$x=125$ ($x=-50$ no vale)

Compró 125 kg.

51 **Un almacén tiene contenedores de reciclado para abastecer a las dos entidades para las que trabaja durante 6 meses. Sabiendo que, si suministrara a una sola de las dos, a la primera la podría servir durante 5 meses más que a la segunda, ¿durante cuánto tiempo podría proveer a cada una de ellas si fuesen clientes únicos?**

Llamamos t al n.º de meses que puede servir a la entidad A. El n.º de meses que puede servir a la entidad B es $t+5$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad A es $\dfrac{1}{t}$.

La proporción de contenedores que sirve al mes a la entidad B es $\dfrac{1}{t+5}$.

La proporción de contenedores servidos al mes a las dos entidades es: $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t+5}=\dfrac{2t+5}{t(t+5)}$

Esta cantidad es la sexta parte del total puesto que puede servir a las dos entidades durante 6 meses.

$6\left(\dfrac{2t+5}{t(t+5)}\right)=1 \to$ *Soluciones:* $t=10$, $t=-3$ que no es válida.

Puede servir solo a la primera entidad durante 10 meses.

Puede servir solo a la segunda entidad durante 15 meses.

52 **Una empresa fabrica dos tipos de latas de refrescos de 33 cL. El primer tipo tiene una altura de 12 cm, y el segundo, de 15 cm. ¿Cuál tiene mayor coste de producción?**

Las fórmulas del volumen y la superficie total de una lata son:

$V=\pi r^2 h$; $S=\pi r^2+2\pi rh$

A partir del volumen y la altura, calculamos el radio de la base.

Lata A:

$h=12$ cm $\to 33=\pi r^2\cdot 12 \to r^2=\dfrac{33}{12\pi} \to r=\sqrt{\dfrac{33}{12\pi}}$

$S_A=\pi r^2+2\pi rh=\pi\dfrac{33}{12\pi}+2\pi\sqrt{\dfrac{33}{12\pi}}\cdot 12=73,293$

Lata B:

$h=15$ cm $\to 33=\pi r^2\cdot 15 \to r^2=\dfrac{33}{15\pi} \to r=\sqrt{\dfrac{33}{15\pi}}$

$S_B=\pi r^2+2\pi rh=\pi\dfrac{33}{15\pi}+2\pi\sqrt{\dfrac{33}{15\pi}}\cdot 15=81,069$

Tiene mayor coste de producción la lata de altura 15 cm.

53 **De dos triángulos rectángulos se sabe que: la suma de sus hipotenusas es 18, sus catetos menores son 3 y 5, respectivamente, y sus catetos mayores están en relación 1/3. Determina dichos triángulos.**

Llamamos h_1 y h_2 a las hipotenusas de los triángulos y C_1 y C_2 a los catetos desconocidos del primer y segundo triángulo, respectivamente.

Expresamos las hipotenusas en función de los catetos $h_1 = \sqrt{3^2 + C_1^2}$; $h_2 = \sqrt{5^2 + C_2^2}$

Por otra parte: $C_2 = 3C_1$

$h_1 + h_2 = 18 \rightarrow \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18$

Tenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = 3C_1 \\ \sqrt{3^2 + C_1^2} + \sqrt{5^2 + C_2^2} = 18 \end{array}\right\} \textit{ Soluciones: } C_1 = -4,\ C_2 = -12;\ C_1 = 4,\ C_2 = 12$$

Como los lados tienen que ser positivos, la solución es $C_1 = 4$, $C_2 = 12$.

El triángulo T_1 tiene catetos de medidas 3 y 4 e hipotenusa de medida 5.

El triángulo T_2 tiene catetos de medidas 5 y 12 e hipotenusa de medida 13.

54 **Al romper la hucha he sacado 50 monedas de 0,5 €, 1 € y 2 € que suman 40 €. Sabiendo que hay la mitad de monedas de 2 € que de 1 €, ¿cuántas monedas hay de cada clase?**

Llamaremos x al n.º de monedas de 0,50 € que hemos sacado de la hucha, y al n.º de monedas de 1 € y z al n.º de monedas de 2 €. Del enunciado deducimos:

$$\begin{cases} 0,5x + y + 2z = 40 \\ \dfrac{y}{2} = z \\ x + y + z = 50 \end{cases}$$

Sustituimos en la primera y tercera ecuación el valor de z que indica la segunda:

$$\begin{cases} 0,5x + y + y = 40 \\ x + y + \dfrac{y}{2} = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 80 - 4y \\ x + y + \dfrac{y}{2} = 50 \end{cases} \rightarrow 80 - 4y + y + \frac{y}{2} = 50 \rightarrow 2(80 - 4y) + 3y = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y = 60 \rightarrow y = 12 \rightarrow z = 6 \rightarrow x = 32$$

55 **En una función de teatro se recaudan 5 200 € vendiéndose 200 entradas de tres tipos distintos: patio de butacas, a 30 €; primer y segundo piso, a 25 €, y localidades con visibilidad reducida, a 10 €. Sabiendo que el número de localidades más económicas suponen un 25 % del número de localidades de 25 €, calcula el número de entradas de cada tipo.**

Llamamos:

x = n.º de entradas de 30 € $\quad$ y = n.º de entradas de 25 € $\quad$ z = n.º de entradas de 10 €

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 200 \\ 30x + 25y + 10z = 5\,200 \\ z = 0,25y \end{array}\right\} \textit{ Solución: } x = 100,\ y = 80,\ z = 20$$

Hay 100 entradas de 30 €, 80 entradas de 25 € y 20 entradas de 10 €.

56 **Preparamos un surtido con dos tipos de bombones de 10 €/kg y de 15 €/kg, respectivamente. Nuestro presupuesto es de 600 € y queremos preparar, al menos, 40 kg. ¿Qué restricciones tiene la composición del surtido?**

Llamamos:

x = cantidad de bombones de 10 €/kg

y = cantidad de bombones de 15 €/kg

Expresamos las condiciones en función de las incógnitas y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

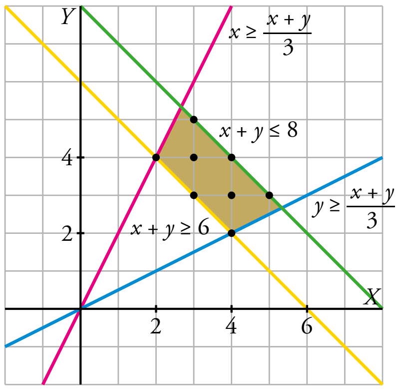
$$\begin{cases} x + y \ge 40 \\ 10x + 15y \le 600 \end{cases}$$

57 **Un comité de una comunidad de vecinos debe estar formado por entre 6 y 8 personas, no pudiendo ser el número de hombres ni el de mujeres inferior a un tercio del grupo. ¿Cuántas combinaciones posibles hay?**

Llamamos x al n.º de mujeres e y al n.º de hombres. Las condiciones son:

$$\begin{cases} 6 \le x + y \le 8 \\ x \ge \dfrac{x+y}{3} \\ y \ge \dfrac{x+y}{3} \end{cases}$$

Representamos el recinto solución:



Las diferentes posibilidades son: $(x = 4,\ y = 2)$, $(x = 3,\ y = 3)$, $(x = 2,\ y = 4)$, $(x = 4,\ y = 3)$, $(x = 3,\ y = 4)$, $(x = 5,\ y = 3)$, $(x = 4,\ y = 4)$, $(x = 3,\ y = 5)$, que corresponden a los puntos del recinto común cuyas coordenadas son enteras.

Página 82

58 **Calcula los parámetros a y b para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx - 12$ corte al eje X por los puntos (2, 0) y (6, 0). (Ten en cuenta las fórmulas de Cardano-Vieta).**

Los puntos de corte del eje de las abscisas nos indican dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx - 12 = 0$ por lo que si $x_1 = 2$ y si $x_2 = 6$ podemos aplicar las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{12}{a} = 12$$

Por tanto: $a = -1,\ b = 8$

59 **Calcula m y n para que $P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 24$ sea divisible por $R(x) = x^2 + x - 12$.**

Buscamos las soluciones de $R(x)$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \to x_1 = 3 \text{ y } x_2 = -4 \to R(x) = (x-3)(x+4)$$

Como $P(x)$ tiene que ser divisible por $R(x)$, las soluciones de $R(x)$ también lo serán de $P(x)$:

$P(x) = x^4 + 2x^3 + mx^2 + nx + 24$

$P(3) = 3m + n + 53 = 0 \quad (*)$

$P(-4) = 4m - n + 38 = 0$

Si sumamos (*) y (**): $7m + 91 = 0 \to m = \frac{-91}{7} = -13$ y $n = -14$

60 **Determina la expresión del polinomio $P(x)$ sabiendo que $P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2 + 4$.**

Buscamos $P(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2 + 4$:

$P(x^2+1) = a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) + c = a(x^4 + 1 + 2x^2) + bx^2 + b + c = ax^4 + a + 2ax^2 + bx^2 + b + c =$

$= ax^4 + (2a+b)x^2 + a + b + c$

Para que se cumpla la igualdad $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2 + 4$:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 4 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$.

61 **Halla los parámetros a y b para que estas parábolas tengan sus vértices en el eje de abscisas:**

a) $y = x^2 + ax + 25$ **b)** $y = x^2 + 6x + b$

a) Buscamos las soluciones de $y = x^2 + ax + 25 = 0$:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 25}}{2}$$

Que tengan solución en el eje de abscisas indica que cuando $y = 0$ la parábola solamente corta al eje de abscisas en un punto, y por lo tanto habrá una única solución. Para ello es necesario:

$\sqrt{a^2 - 4 \cdot 25} = 0 \to a = \pm 10$

b) Buscamos las soluciones de $y = x^2 - 6x + b = 0$:

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4b}}{2}$ y, como antes, $\sqrt{36 - 4b} = 0 \to b = 9$

62 **Resuelve.**

a) $x^7 - 16x^4 + 64x = 0$

b) $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1} + \dfrac{x}{x+1} = 2$

c) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = x + 1$

d) $(\sqrt{x} + x + 2)x = 0$

e) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{25}{9x^2} = 0$

f) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{2}{81x^3} = 0$

g) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{x^2} = 0$

h) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = 0$

a) $x^7 - 16x^4 + 64x = 0$

Factorizamos el polinomio:

$x^7 - 16x^4 + 64x = x(x-2)^2(2x + x^2 + 4)^2$

Soluciones: $x = 0$; $x = 2$

b) $\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}=2 \rightarrow \dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=0$

Operamos en el miembro de la izquierda:

$\dfrac{5x+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x}{x+1}-2=-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

La ecuación queda:

$-\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1$ que es válida.

Solución: $x = 1$

c) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=x+1$

$(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x})^2=(x+1)^2$

$3x+2\sqrt{x(2x+1)}+1=x^2+2x+1$

$2\sqrt{x(2x+1)}=x^2-x$

$4x(2x+1)=x^4-2x^3+x^2 \rightarrow x^4-2x^3+x^2-8x^2-4x=0$

Factorizamos el polinomio:

$x^4-2x^3+7x^2-4x=x(x-4)(x+1)^2$

Soluciones: $x = 0,\ x = 4,\ x = -1$ no válida

d) $(\sqrt{x}+x+2)x=0$ Cada factor se iguala a cero: $x=0,\ \sqrt{x}+x+2=0$

Resolvemos $\sqrt{x}+x+2=0$

$\sqrt{x}=-x-2$

$x = x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 3x + 4 = 0$ que no tiene soluciones.

Tenemos, entonces, solamente la solución correspondiente al primer factor.

Solución: $x = 0$

e) $\dfrac{3x}{5}+\dfrac{25}{9x^2}=0$

$\dfrac{27x^3+125}{45x^2}=0 \rightarrow 27x^3+125=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{-125}{27}}=-\dfrac{5}{3}$

Solución: $x=-\dfrac{5}{3}$

f) $\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=0$

$\dfrac{x}{8}-\dfrac{2}{81x^3}=\dfrac{81x^4-16}{648x^3}=0 \rightarrow 81x^4-16=0 \rightarrow x=\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}=\pm\dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x=\dfrac{2}{3},\ x=-\dfrac{2}{3}$

g) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=0$

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^3-2}{2x^2}=0 \rightarrow x^3-2=0 \rightarrow x=\sqrt[3]{2}$

Solución: $x=\sqrt[3]{2}$

h) $\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = 0$

$\dfrac{2}{5x} - \dfrac{5x^3}{2} = -\dfrac{25x^4 - 4}{10x} = 0 \to 25x^4 - 4 = 0 \to x = \sqrt[4]{\dfrac{4}{25}} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

Soluciones: $x = \sqrt{\dfrac{2}{5}},\ x = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

63 **Resuelve las siguientes ecuaciones en las que aparecen valores absolutos:**

a) $|x - 5| = 3x - 1$ **b)** $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = 4$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$ **d)** $|x^2 - 3x + 1| = 1$

* ***Ver ejercicio resuelto 2.***

a) $|x-5| = 3x - 1 \to \begin{cases} x - 5 = 3x - 1 \\ x - 5 = -(3x-1) \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ x = 3/2 \end{cases}$

Soluciones: $x = -2,\ x = \dfrac{3}{2}$

b) $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| = 4 \to \begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = 4 \\ \dfrac{x-3}{2} = -4 \end{cases} \to \begin{cases} x = 11 \\ x = -5 \end{cases}$

Soluciones: $x = 11,\ x = -5$

c) $|x^2 - x| = |1 - x^2| \to \begin{cases} x^2 - x = 1 - x^2 \\ x^2 - x = -(1 - x^2) \end{cases} \to \begin{cases} x = 1,\ x = -1/2 \\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 1,\ x = -\dfrac{1}{2}$

d) $|x^2 - 3x + 1| = 1 \to \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 1 \\ x^2 - 3x + 1 = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3,\ x = 0 \\ x = 2,\ x = 1 \end{cases}$

Soluciones: $x = 3,\ x = 0,\ x = 2,\ x = 1$

64 **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3^x}}{(1/3)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$ **d)** $3^x \cdot 9^x = 2$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$ **f)** $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \cdot 16^{x+1} \cdot 2^{1-x} = 0{,}25$

$(2^{-2})^x \cdot 2^{4(x+1)} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2}$

$2^{-2x} \cdot 2^{4x+4} \cdot 2^{1-x} = 2^{-2} \to 2^{-2x+4x+4+1-x} = 2^{-2}$

$-2x + 4x + 4 + 1 - x = -2 \to x = -7$

Solución: $x = -7$

b) $\dfrac{\sqrt{3^x}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}} \cdot 9^{1-x} = 243$

$\dfrac{3^{(1/2)\cdot x}}{3^{-(x+1)}} \cdot 3^{2(1-x)} = 3^5$

$3^{\frac{1}{2}\cdot x} \cdot 3^{x+1} \cdot 3^{2-2x} = 3^5 \;\rightarrow\; 3^{\frac{x}{2}+x+1+2-2x} = 3^5$

$\dfrac{x}{2} + x + 1 + 2 - 2x = 5 \;\rightarrow\; x = -4$

Solución: $x = -4$

c) $2^x \cdot 5^{x+1} = 10$

$2^x \cdot 5 \cdot 5^x = 10 \;\rightarrow\; 5 \cdot (2 \cdot 5)^x = 10 \;\rightarrow\; 5 \cdot 10^x = 10 \;\rightarrow\; 10^x = 2 \;\rightarrow\; x = log\, 2$

Solución: $x = log\, 2 = 0{,}69$

d) $3^x \cdot 9^x = 2$

$3^x \cdot 3^{2x} = 2$

$3^{3x} = 2$

$3x = log_3 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{log_3 2}{3}$

Solución: $x = \dfrac{log_3 2}{3} = 0{,}21$

e) $25^x - 2 \cdot 5^{x+1} + 25 = 0$

$5^{2x} - 2 \cdot 5 \cdot 5^x + 5^2 = 0 \;\rightarrow\; (5^x - 5)^2 = 0 \;\rightarrow\; 5^x - 5 = 0 \;\rightarrow\; 5^x = 5 \;\rightarrow\; x = 1$

Solución: $x = 1$

f) $3^{2x} + 2 \cdot 3^{x+1} = 3^3$

Hacemos el cambio de variable: $3^x = y$

$y^2 + 2 \cdot 3y - 27 = 0 \;\rightarrow\; y = 3,\ y = -9$ no válida

$y = 3 \;\rightarrow\; x = 1$

Solución: $x = 1$

65 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas:

a) $2\, log_2 x = log_2 \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}$

b) $log\,(x+1)^5 + log\,(3x+2)^5 = 5$

c) $log\,(8 + x^3) = 3\, log\,(x+2)$

d) $ln\, 6 + (x^2 - 5x + 7)\, ln\, 2 = ln\, 12$

e) $(2x^2 + x - 3)\, log\, 5 = 2\, log\, \dfrac{1}{5}$

f) $log\,(3^{1-x})^{1+x} + log\, 2700 = 2$

a) $2\, log_2 x = log_2 \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; 2\, log_2 x = log_2 x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; 2\, log_2 x = log_2 x - 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; log_2 x = -1 \;\rightarrow\; x = 2^{-1} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

Solución: $x = \dfrac{1}{2}$

b) $log\,(x+1)^5 + log\,(3x+2)^5 = 5$

$log\,(x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = log\,100\,000 \to (x+1)^5 \cdot (3x+2)^5 = 10^5 \to$

$\to (x+1)(3x+2) = 10 \to x = 1,\ x = -\dfrac{8}{3}$ no válida

Solución: $x = 1$

c) $log\,(8+x^3) = 3log\,(x+2) \to log\,(8+x^3) = log\,(x+2)^3 \to (8+x^3) = (x+2)^3 \to$

$\to (8+x^3) - (x+2)^3 = 0 \to -6x^2 - 12x = 0 \to$

$\to x = -2$ (no válida), $x = 0$

Solución: $x = 0$

d) $ln\,6 + (x^2 - 5x + 7)\,ln\,2 = ln\,12$

$ln\,6 \cdot 2^{x^2-5x+7} = ln\,12 \to 6 \cdot 2^{x^2-5x+7} = 6 \cdot 2 \to x^2 - 5x + 7 = 1 \to x = 3,\ x = 2$

Soluciones: $x = 3,\ x = 2$

e) $(2x^2 + x - 3)\,log\,5 = 2\,log\,\dfrac{1}{5} \to log\,5^{2x^2+x-3} = log\,5^{-2} \to 2x^2 + x - 3 = -2 \to x = \dfrac{1}{2},\ x = -1$

Soluciones: $x = \dfrac{1}{2},\ x = -1$

f) $log\,(3^{1-x})^{1+x} + log\,2\,700 = 2$

$log\,(3^{(1-x)(1+x)}) + log\,27 + log\,100 = 2 \to log\,(3^{(1-x)(1+x)}) + log\,3^3 = 0 \to$

$\to log\,(3^{(1-x)(1+x)+3}) = log\,1 \to 3^{(1-x)(1+x)+3} = 1 \to$

$\to (1-x)(1+x) + 3 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

Soluciones: $x = -2,\ x = 2$

66 Resuelve las siguientes ecuaciones mediante un cambio de variable:

a) $\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3} = -2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

b) $e^{3x^2-3} - 3e^{2x^2-2} + 3e^{x^2-1} - 1 = 0$

c) $\sqrt{\left(log\,\dfrac{2}{x}\right)^2 + 3} = -1 + 3\,log\,\dfrac{2}{x}$

a) $\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2 + 3} = -2\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$

Hacemos $2 + \dfrac{1}{x} = y \to \sqrt{y^2+3} = -2y \to y^2 + 3 = 4y^2 \to 3y^2 - 3 = 0 \to y = 1,\ y = -1$

$y = 1 \to 2 + \dfrac{1}{x} = 1 \to x = -1$ (no es válida).

$y = -1 \to 2 + \dfrac{1}{x} = -1 \to x = -\dfrac{1}{3}$

Solución: $x = -\dfrac{1}{3}$

b) $e^{3x^2-3} - 3e^{2x^2-2} + 3e^{x^2-1} - 1 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $x^2 - 1 = y$

$e^{3y} - 3e^{2y} + 3e^{y} - 1 = 0$

Hacemos el cambio de variable: $e^y = t$

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \to t = 1$

Deshacemos los cambios de variable:

$e^y = 1 \to y = 0$

$x^2 - 1 = 0 \to x = 1,\ x = -1$

Soluciones: $x = 1,\ x = -1$

c) $\sqrt{\left(log\dfrac{2}{x}\right)^2 + 3} = -1 + 3\,log\dfrac{2}{x}$

Hacemos $log\dfrac{2}{x} = y$

$\sqrt{y^2+3} = -1 + 3y \to y^2 + 3 = (-1+3y)^2 = 9y^2 - 6y + 1 \to$

$\to y^2 + 3 = 9y^2 - 6y + 1 \to y = 1,\ y = -\dfrac{1}{4}$ no válida.

$log\dfrac{2}{x} = 1 = log\,10 \to \dfrac{2}{x} = 10 \to x = \dfrac{1}{5}$

Solución: $x = \dfrac{1}{5}$

67 Resuelve.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 5y = 17 \\ 5x - 2y = 32 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ x - y = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x + y = 5 \\ 2x - 5y = 17 \\ 5x - 2y = 32 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) - 5\cdot(1.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} x + y = 5 \\ -7y = 7 \\ -7y = 7 \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x + y = 5 \\ -7y = 7 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x = 6 \\ y = -1 \end{matrix}$

b) $\left.\begin{matrix} 2x - y = 7 \\ 5x + 2y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + 2\cdot(1.^a) \\ (3.^a) + 3\cdot(1.^a) \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} 2x - y = 7 \\ 9x = 15 \\ 9x = 21 \end{matrix}\right\}$

Hay dos ecuaciones que se contradicen. No hay solución.

c) $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) - 3.^a \\ (1.^a) - 2\cdot(2.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} -4z = -8 \to z = 2 \\ 5y - 5z = -5 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases} \to \begin{cases} z = 2 \\ y - 2 = -1 \to y = 1 \\ 2x + 1 + 6 = 5 \to x = -1 \end{cases}$

La solución es $x = -1,\ y = 1,\ z = 2$.

d) $\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ x - y = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{matrix}$ $\begin{cases} -2y + 7z = 8 \\ z = 4 \\ -x + y + z = 2 \end{cases} \to \begin{cases} -2y + 28 = 8 \to y = 10 \\ z = 4 \\ x = 12 \end{cases}$

La solución es $x = 12,\ y = 10,\ z = 4$.

68 Resuelve.

a) $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=\sqrt{2y}\\ x+y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{4y+2x}=\sqrt{3y+x}-1\\ y+x=-5\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x+3)(y-5)=0\\ (x-2)(y-1)=0\end{cases}$ d) $\begin{cases}(x^3-3x^2+4)(y+1)=0\\ \sqrt{24-x^3}=y+6\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5\\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5\end{cases}$ f) $\begin{cases}x^2y+xy^2=6\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

a) $\begin{cases}\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}=\sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y}-\sqrt{8}=\sqrt{2y} \to \sqrt{8-2y}=\sqrt{8}+\sqrt{2y} \to 8-2y=(\sqrt{8}+\sqrt{2y})^2 \to\\ x+y=8 \to x=8-y\end{cases}$

$\to 8-2y=2y+8\sqrt{y}+8 \to 8\sqrt{y}=-4y \to 64y=16y^2 \to y=4,\ y=0$

$y=4 \to x=4$

$y=0 \to x=8$

Soluciones: $x_1=4,\ y_1=4;\ x_2=8,\ y_2=0$

b) $\begin{cases}\sqrt{4x+2y}=\sqrt{3y+x}-1 \to \sqrt{-20-4y+2y}=\sqrt{3y-5-y}-1 \to \sqrt{-20-2y}=\sqrt{2y-5}-1 \to\\ y+x=-5 \to x=-5-y\end{cases}$

$\to -20-2y=(\sqrt{2y-5}-1)^2 \to -20-2y=2y-2\sqrt{2y-5}-4 \to$

$\to \dfrac{-16-4y}{-2}=\sqrt{2y-5} \to (8+2y)^2=2y-5 \to 64+32y+4y^2=2y-5 \to$

$\to 4y^2+30y+59=0$ no tiene solución.

c) $\begin{cases}(x+3)(y-5)=0\\ (x-2)(y-1)=0\end{cases} \to \begin{cases}(x+3)(y-5)=0 \to x=-3 \text{ o } y=5\\ (x-2)(y-1)=0 \to x=2 \text{ o } y=1\end{cases}$

Por tanto, las soluciones son: $x_1=2,\ y_1=5;\ x_2=-3,\ y_2=1$.

d) $\begin{cases}(x^3-3x^2+4)(y+1)=0 \to (x^3-3x^2+4)(\sqrt{24-x^3}-6+1)=0 \to (x^3-3x^2+4)(\sqrt{24-x^3}-5)=0\\ \sqrt{24-x^3}=y+6 \to y=\sqrt{24-x^3}-6\end{cases}$

Cada factor se iguala a cero.

$(x^3-3x^2+4)=0 \to x=2, x=-1$

$\sqrt{24-x^3}-5=0 \to x=-1$

$x=2 \to y=-2$

$x=-1 \to y=-1$

Soluciones: $x_1=2,\ y_1=-2;\ x_2=-1,\ y_2=-1$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=5 \\ -\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -\dfrac{(x+y)(x-y)}{xyxy}=5 \end{cases} \to \begin{cases} x+y=5xy \\ -5\dfrac{(x-y)}{xy}=5 \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} x+y=5xy \to x+y=-5(x-y) \to 6x-4y=0 \to x=\dfrac{4y}{6} \\ -(x-y)=xy \to -\dfrac{4y}{6}+y=\dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y}{6}y \to \dfrac{1}{3}y=\dfrac{4y^2}{6} \to y=2y^2 \to y=\dfrac{1}{2},\ y=0 \text{ no válida} \end{cases}$

$y=\dfrac{1}{2} \to x=\dfrac{1}{3}$

Solución: $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{2}$

f) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \to \begin{cases} xy(x+y)=6 \\ \dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Multiplicamos las ecuaciones y nos queda: $(x+y)^2=9$

De la segunda ecuación:

$y+x=\dfrac{3}{2}xy \to y-\dfrac{3}{2}xy=-x \to y\left(1-\dfrac{3}{2}x\right)=-x \to y=\dfrac{-x}{1-\dfrac{3}{2}x} \to y=\dfrac{-2x}{2-3x}$

Nos queda el siguiente sistema:

$\begin{cases} (x+y)^2=9 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases}$

Obtenemos los dos sistemas siguientes:

$\begin{cases} x+y=3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to [x=1,\ y=2];\ [x=2,\ y=1]$

$\begin{cases} x+y=-3 \\ y=\dfrac{-2x}{2-3x} \end{cases} \to \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

Soluciones: $[x=1,\ y=2],\ [x=2,\ y=1],\ \left[x=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right];\ \left[x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},\ y=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]$

69 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log_y \sqrt{x}=\dfrac{1}{2} \\ \log_x y^2=2 \end{cases} \to \begin{cases} y^{1/2}=\sqrt{x} \\ x^2=y^2 \end{cases} \to y=x,\ y\ge 0,\ x\ge 0$

b) $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 5 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=e \end{cases} \to \begin{cases} \log(x+y)(x-y)=\log 5 \\ e^x=ee^y \end{cases} \to \begin{cases} (x+y)(x-y)=5 \to \\ x=y+1 \end{cases}$

$\to (y+1)^2-y^2=2y+1=5 \to 2y+1=5 \to y=2$

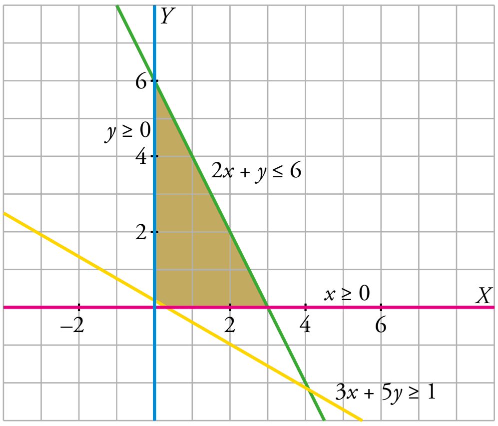
$y=2 \to x=3$

Solución: $x=3,\ y=2$

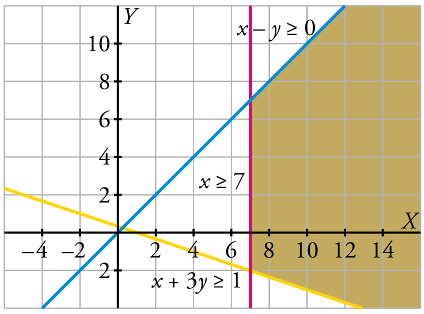
70 **Representa gráficamente el conjunto de soluciones de estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 6 \\ 3x + 5y \ge 1 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y \ge 1 \\ x \ge 7 \\ x - y \ge 0 \end{cases}$

a) El recinto intersección es:



b)



71 **Resuelve:** $\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$

Después, deduce la solución de estas otras inecuaciones:

a) $\dfrac{2x+4}{x-1} < 0$ b) $\dfrac{2x+4}{x-1} \le 0$

* ***Ver ejercicio resuelto 6.***

	$(-\infty, -2]$	$[-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$2x + 4$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
$\dfrac{2x+4}{x-1}$	+	–	+

$\dfrac{2x+4}{x-1} \ge 0$ en $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

a) *Solución:* $(-2, 1)$

b) *Solución:* $[-2, 1)$

72 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $x^4 - 4x^2 < 0$ b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\dfrac{4 - x^2}{(x-3)^2} > 0$ d) $\dfrac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2-4)<0 \Rightarrow x^2-4<0$

$x \neq 0$

$(-2, 0) \cup (0, 2)$

b) $x(x^2-x-6)<0$

$x(x-3)(x+2)<0$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left.\begin{array}{r} x \neq 3 \\ 4-x^2>0 \end{array}\right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1$; $(1, +\infty)$

Página 83

Cuestiones teóricas

73 Halla m para que al dividir el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ entre $x + 4$, el resto sea igual a 12.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ -4 & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \boxed{m-8} \end{array}$$

$m - 8 = 12 \rightarrow m = 20$

74 Escribe un polinomio de grado 4 que solo tenga por raíces 0 y 1.

Por ejemplo: $P(x) = x^3(x-1)$; $Q(x) = x^2(x-1)$

75 Inventa ecuaciones que tengan por soluciones los valores siguientes:

a) 3, –3, $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

b) 5; 0,3 y –2

c) 0, $\frac{1}{2}$ y 0,7

d) 0, 1, –1 y $\frac{1}{3}$

a) $(x-3)(x+3)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) = (x^2-9)(x^2-7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x-5)(x-0,3)(x+2) = x^3 - 3,3x^2 - 9,1x + 3$

c) $x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-0,7) = x(x-0,5)(x-0,7) = x^3 - 1,2x^2 + 0,35x$

d) $x(x-1)(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x$

76 ¿Verdadero o falso? Explícalo y pon ejemplos.

a) La inecuación $x^2 \geq 2x$ es equivalente a $x \geq 2$.

b) Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas puede ser incompatible.

c) Si $-4 \leq m \leq 4$, la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$ tiene solución única.

a) Falso. $x^2 \geq 2x \rightarrow x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.

b) Verdadero, por ejemplo $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases}$

c) Falso. Si $m = 0$ la ecuación queda $x^2 + 4 = 0$, que no tiene solución.

Para profundizar

77 **Resuelve estas ecuaciones de segundo grado en las que la incógnita es x:**

a) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$

b) $(x - a)^2 - 2x(x + a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a + b)x^2 + bx - a = 0$

a) $x = \dfrac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2ab} = \dfrac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}}{2ab} =$

$$= \frac{a + b \pm (a - b)}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a + b + a - b}{2ab} = \dfrac{2a}{2ab} = \dfrac{1}{b} \\[2ex] \dfrac{a + b - a + b}{2ab} = \dfrac{2b}{2ab} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{a};\ x_2 = \dfrac{1}{b}$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

$x = \dfrac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \dfrac{-4a \pm 2a}{2} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4 + 2a}{2} = \dfrac{-2a}{2} = -a \\[2ex] \dfrac{-4a - 2a}{2} = \dfrac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$x_1 = -a;\ x_2 = -3a$

c) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b - a)}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a - b)^2}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b + 2a - b}{2a} = \dfrac{2a - 2b}{2a} = \dfrac{a - b}{a} \\[2ex] \dfrac{-b - 2a + b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a - b}{a}$

d) $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a + b)}}{2(a + b)} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a + b)} = \dfrac{-b \pm (2a + b)}{2(a + b)} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{-b + 2a + b}{2(a + b)} = \dfrac{a}{a + b} \\[2ex] \dfrac{-b - 2a - b}{2(a + b)} = \dfrac{-(2a + 2b)}{2(a + b)} = -1 \end{cases}$$

$x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{a}{a + b}$

78 **Resuelve.**

a) $|x| + 1 = |3x - 5|$

b) $|x^2 - 1| = |x| - 1$

a)

	$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x\| + 1$	$-x + 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|3x - 5\|$	$-3x + 5$	$-3x + 5$	$3x - 5$

$x < 0$	$0 \le x < \frac{5}{3}$	$x \ge \frac{5}{3}$
$-x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = -3x + 5$	$x + 1 = 3x - 5$
$x = 2 \notin (-\infty, 0)$	$x = 1 \in \left[0, \frac{5}{3}\right)$	$x = 3 \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$

Soluciones: $x = 1$, $x = 3$

b)

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$\|x^2 - 1\|$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$\|x\| - 1$	$-x - 1$	$-x - 1$	$x - 1$	$x - 1$

$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$x^2 - 1 = -x - 1$	$1 - x^2 = -x - 1$	$1 - x^2 = x - 1$	$x^2 - 1 = x - 1$
$x = -1 \notin (-\infty, -1)$	$x = -1 \in [-1, 0)$	$x = 1 \notin [0, 1)$	$x = 1 \in [1, +\infty)$
$x = 0 \notin (-\infty, -1)$	$x = 2 \notin [-1, 0)$	$x = -2 \notin [0, 1)$	$x = 0 \notin [1, +\infty)$

Soluciones: $x = -1$, $x = 1$

79 **Resuelve las siguientes inecuaciones:**

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1$

b) $\frac{x-1}{x+3} \ge x$

c) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{x-1}{x+1}$

d) $\frac{1}{x+2} \le \frac{x}{x+2}$

a) $\frac{2x+1}{x+1} > 1 \rightarrow \frac{2x+1}{x+1} - 1 > 0 \rightarrow \frac{x}{x+1} > 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0]$	$[0, +\infty)$
x	–	–	+
$x + 1$	–	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

b) $\frac{x-1}{x+3} \ge x \rightarrow \frac{x-1}{x+3} - x \ge 0 \rightarrow -\frac{(x+1)^2}{x+3} \ge 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{x+3} \le 0$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1]$	$[-1, +\infty)$
$(x + 1)^2$	+	+	+
$x + 3$	–	+	+
$\frac{(x+1)^2}{x+3}$	–	+	+

Solución: $(-\infty, -3)$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < \dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} < 0 \rightarrow 4\dfrac{x}{x^2-1} < 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	–	–	+	+
x^2-1	+	–	–	+
$\dfrac{x}{x^2-1}$	–	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

d) $\dfrac{1}{x+2} \le \dfrac{x}{x+2} \rightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x}{x+2} \le 0 \rightarrow \dfrac{1-x}{x+2} \le 0$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1]$	$[1, +\infty)$
$1-x$	+	+	–
$x+2$	–	+	+
$\dfrac{1-x}{x+2}$	–	+	–

Solución: $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

80 Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre $x-1$ es -1 y entre $x+1$ es -3, ¿cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre (x^2-1)?

Si $C(x)$ y $R(x)$ son el cociente y el resto que se obtiene al dividr $P(x)$ entre x^2-1:

$P(x) = C(x)(x^2-1) + R(x)$

De $R(x)$ sabemos que es un polinomio de grado 1. Podemos llamarle $R(x) = ax + b$.

También sabemos que $R(1) = -1$ y que $R(-1) = -3$ porque:

$P(1) = C(1)\,(1^2-1) + R(1) = R(1) = -1$

$P(-1) = C(-1)\,((-1)^2-1) + R(-1) = R(-1) = -3$

Por tanto: $\begin{cases} -1 = a + b \\ -3 = -a + b \end{cases} \rightarrow a = 1,\ b = -2$

El resto que buscamos es $R(x) = x - 2$.

81 Halla el intervalo de los valores de a para los que se cumpla la desigualdad $ax^2 - 3x + a < 0$ para cualquier número real, x.

La representación gráfica de $ax^2 - 3x + a$ es una parábola, y buscamos los valores de a para los que siempre es negativa. Se deben cumplir, por tanto, dos condiciones:

- a debe ser un número negativo, es decir, el vértice de la parábola debe ser un máximo, no un mínimo: $a < 0$
- La gráfica no debe cortar el eje de abscisas, es decir, $ax^2 - 3x + a = 0$ no debe tener solución:

  $ax^2 - 3x + a = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4a^2}}{2a}$

  Para que la ecuación no tenga solución se debe cumplir $9 - 4a^2 < 0 \rightarrow \dfrac{9}{4} < a^2$

  Es decir, $a \in (-\infty, -3/2) \cup (3/2, +\infty)$.

  Por tanto, la solución es $(-\infty, -3/2)$.

AUTOEVALUACIÓN

Página 83

1 **Resuelve factorizando previamente.**

$\mathbf{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2 **Opera y simplifica el resultado.**

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} = \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} = \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)3x} = \frac{1}{3(x+1)}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{x^4 - 3x^2 + 2 = 0}$

b) $\mathbf{\sqrt{8+2x} - x = x + 6}$

c) $\mathbf{\dfrac{3x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{3}}$

d) $\mathbf{3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

e) $\mathbf{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

f) $\mathbf{\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x+1)}$

g) $\mathbf{|3x + 1| = |x - 3|}$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8+2x}-x=x+6 \rightarrow \sqrt{8+2x}=2x+6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{8+2x})^2=(2x+6)^2 \rightarrow 8+2x=4x^2+36+24x \rightarrow$

$\rightarrow 4x^2+22x+28=0 \rightarrow 2x^2+11x+14=0$

$x=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-112}}{4}=\dfrac{-11\pm 3}{4}= \begin{cases} -2 \\ -7/2 \end{cases}$

Comprobada la ecuación inicial, el resultado $-\dfrac{7}{2}$ resulta no ser válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x=-2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2-4}=\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{4}{3} \rightarrow \dfrac{9x}{3(x^2-4)}=\dfrac{3x(x-2)-4(x^2-4)}{3(x^2-4)} \rightarrow$

$\rightarrow 9x=3x^2-6x-4x^2+16 \rightarrow x^2+15x-16=0 \rightarrow$

$\rightarrow x=\dfrac{-15\pm\sqrt{225+64}}{2}=\dfrac{-15\pm 17}{2}= \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=-16$

d) $3^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 3^{x-1}=3^{-1/2} \rightarrow x-1=-\dfrac{1}{2} \rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0 \rightarrow (2^x)^2-6\cdot 2^x+8=0$

Hacemos el cambio $y=2^x$, con lo que obtenemos:

$y^2-6y+8=0 \rightarrow y=\dfrac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\dfrac{6\pm 2}{2}= \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$y=4 \rightarrow 2^x=4 \rightarrow 2^x=2^2 \rightarrow x=2$

$y=2 \rightarrow 2^x=2 \rightarrow 2^x=2^1 \rightarrow x=1$

Soluciones: $x_1=1;\ x_2=2$

f) $\ln x+\ln 4=2\ln(x+1) \rightarrow \ln 4x=\ln(x+1)^2 \rightarrow 4x=(x+1)^2 \rightarrow$

$\rightarrow x^2-2x+1=0 \rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1$

Solución: $x=1$

g) $|3x+1|=|x-3| \begin{cases} 3x+1=x-3 \rightarrow 2x=-4 \rightarrow x=-2 \\ 3x+1=-(x-3) \rightarrow 4x=2 \rightarrow x=1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1=-2,\ x_2=\dfrac{1}{2}$

4 Resuelve estos sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \\ x+y=7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2-y^2-xy=2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2=6 \rightarrow x(7-x)-x^2-6=0 \rightarrow -2x^2+7x-6=0 \rightarrow x=2,\ x=\dfrac{3}{2} \\ x+y=7 \rightarrow y=7-x \end{cases}$

$x=2 \rightarrow y=5$

$x=\dfrac{3}{2} \rightarrow y=\dfrac{11}{2}$

Soluciones: $x_1=2,\ y_1=5;\ x_2=\dfrac{3}{2},\ y_2=\dfrac{11}{2}$

b) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+xy=1 \\ 2x^2-y^2-xy=2 \end{matrix}\right\}$ (1.ª) / (1.ª) + (2.ª) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2+xy=1 \\ 3x^2 \qquad\quad =3 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=\pm 1$

$x=1 \rightarrow y^2+y=0 \rightarrow y=0,\ y=-1 \rightarrow$ *Soluciones:* $x_1=1,\ y_1=-1;\ x_2=1,\ y_2=0$

$x=-1 \rightarrow y^2-y=0 \rightarrow y=1,\ y=0 \rightarrow$ *Soluciones:* $x_3=-1,\ y_3=1;\ x_4=-1,\ y_4=0$

5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{y - 2x = 0} \\ \boldsymbol{3^y - 6 \cdot 3^x = -9} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{x^2+5} = y+2} \\ \boldsymbol{log\ 5x - log\ y = 1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{x - z = 1} \\ \boldsymbol{2y + 3z = -1} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{x + y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{-2x + 3y + 3z = 1} \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\}$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z^2 - 6z + 9 = 0 \to z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

$3^x = 3 \to x = 1$

$x = 1 \to y = 2$

Solución: $x = 1,\ y = 2$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+5} = y+2 \\ log\ 5x - log\ y = 1 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+5 = (y+2)^2 \\ log\ \dfrac{5x}{y} = log\ 10 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+5 = y^2+4y+4 \to 4y^2+5 = y^2+4y+4 \to y=1,\ y=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5x}{y} = 10 \to x = 2y \end{cases}$

$y = 1 \to x = 2$

$y = \dfrac{1}{3} \to x = \dfrac{2}{3}$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{2}{3},\ y_2 = \dfrac{1}{3}$

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 1 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = 2 - y \\ 2 - y - z = 1 \to y = 1 - z \\ 2 - 2z + 3z = -1 \to z = -3 \end{cases} \to \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{cases}$

Solución: $x = -2,\ y = 4,\ z = -3$

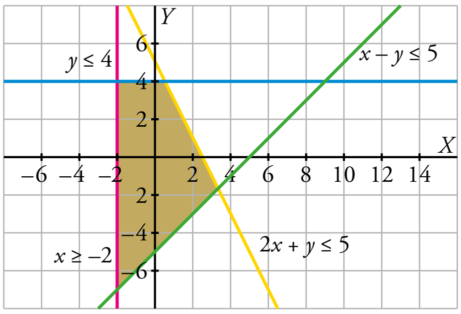
d) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \to \begin{cases} y - z = 3 \to y = 3 + z \\ x + y + 3z = 0 \\ 5y + 9z = 1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 3 + z \\ x + 3 + z + 3z = 0 \\ 15 + 5z + 9z = 1 \to z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$

Solución: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

6 **Resuelve estos sistemas de inecuaciones:**

a) $\begin{cases} 2x + y \le 5 \\ x - y \le 5 \\ y \le 4 \\ x \ge -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases}$

a)



La solución es el cuadrilátero señalado.

b) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{x+1}{2} - 3x \le x - 3 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \to \text{Solución } [-2, 3] \\ \dfrac{7}{2} - \dfrac{7}{2}x \le 0 \to \text{Solución } [1, \infty) \end{cases}$

Solución: $x \in [1, 3]$

7 **Resuelve.**

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \ge 0$

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1) \to x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \to$

$\to -4x - 4 < 0 \to 4x > -4 \to x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \ge 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de tener el mismo signo.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \to (x + 1)^2 \ge 0$ para cualquier valor de x.

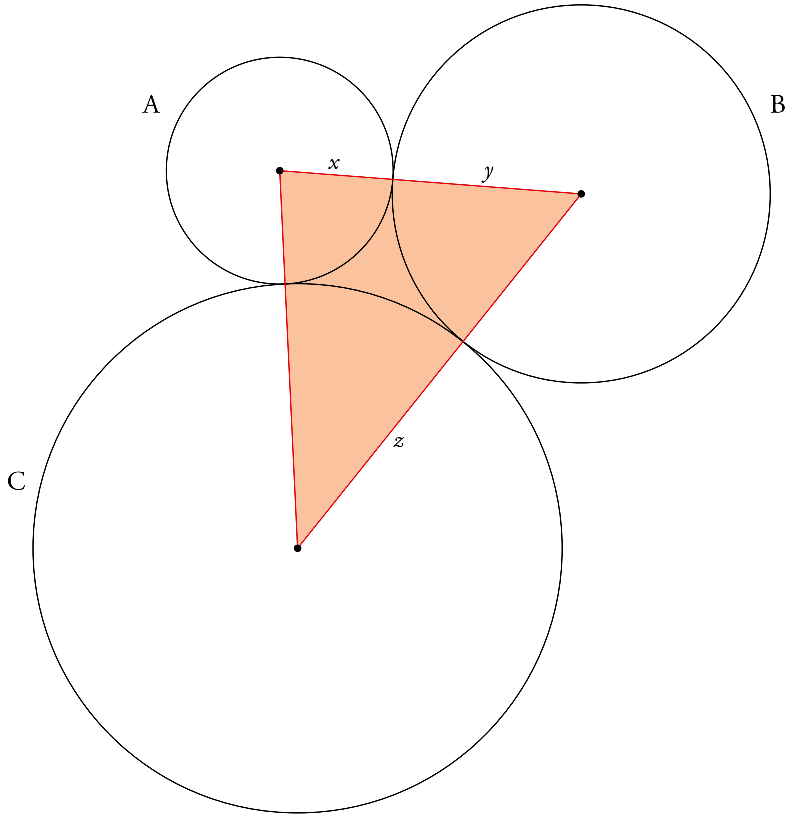
Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador se hace cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \to x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$

8 **Un circo está compuesto por tres pistas circulares tangentes dos a dos. Las distancias entre sus centros son 80, 100 y 120 metros, respectivamente. Calcula el diámetro de cada una de las pistas.**



Llamamos x al radio de la pista A.

Llamamos y al radio de la pista B.

Llamamos z al radio de la pista C.

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ x + z = 100 \\ y + z = 120 \end{cases}$$

Solución: $x = 30$, $y = 50$, $z = 70$

La pista A tiene 60 m de diámetro; la pista B tiene 100 m de diámetro y la pista C tiene 140 m de diámetro.