13 COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

Página 355

Resuelve

Tres ganaderos llevan cada uno dos de sus mejores animales a la feria de ganado. Al cruzar el río, el barquero les avisa de que solo puede embarcar a tres animales por trayecto. Cada uno coloca en la barca a uno de los dos que lleva.

¿Qué es más probable: que haya dos animales del mismo tipo o que los tres sean distintos?

Si Mario, que llevaba un cerdo y un cordero, hubiese llevado al cerdo y a un pavo, ¿en este caso qué sería más probable, que hubiese tres animales distintos en la barca o que no todos fueran distintos?

En el primer caso: P[dos animales del mismo tipo] = P[dos cerdos] + P[dos corderos] + P[dos cabras]

Vamos a poner los datos en una tabla:

GANADERA	GANADERO	MARIO
Cabra	Cordero	Cerdo
Cabra	Cordero	Cordero
Cabra	Cabra	Cerdo
Cabra	Cabra	Cordero
Cerdo	Cordero	Cerdo
Cerdo	Cordero	Cordero
Cerdo	Cabra	Cerdo
Cerdo	Cabra	Cordero

Vemos que lo más probable es que haya dos animales del mismo tipo. De ocho posibilidades, las únicas en las que todos los animales son diferentes son:

Cabra-Cordero-Cerdo

Cerdo-Cabra-Cordero

Si Mario hubiese llevado un pavo:

GANADERA	GANADERO	MARIO
Cabra	Cordero	Cerdo
Cabra	Cordero	Pavo
Cabra	Cabra	Cerdo
Cabra	Cabra	Pavo
Cerdo	Cordero	Cerdo
Cerdo	Cordero	Pavo
Cerdo	Cabra	Cerdo
Cerdo	Cabra	Pavo

Es igual de probable que haya dos animales iguales a que todos los animales sean distintos. Por ejemplo, hay cuatro casos en los que dos animales son iguales:

Cabra-Cabra-Cerdo

Cabra-Cabra-Pavo

Cerdo-Cordero-Cerdo

Cerdo-Cabra-Cerdo

1 ▶ DIAGRAMA EN ÁRBOL

Página 356

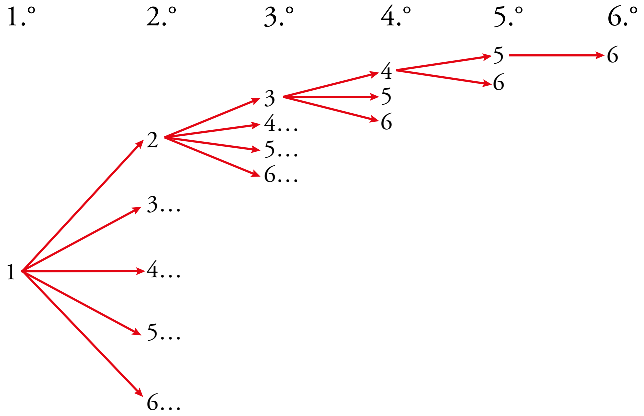
1 Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les muestra diez libros distintos y les dice «escoged cada uno el libro que queráis».

¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

Hay $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ posibilidades, ya que Alberto puede elegir entre los 10 libros, Beatriz podrá elegir entre los 9 restantes y Claudia tendrá 8 libros posibles que elegir.

2 ¿De cuántas formas diferentes pueden llegar a la meta los seis corredores que participan en una carrera?

Veamos qué ocurre con cada corredor:



Si gana el corredor 1, hay 5 posibilidades para el segundo puesto, 4 para el tercero, 3 para el cuarto, 2 para el quinto y 1 para el sexto. Por tanto, para cada corredor hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ posibilidades.

Como hay seis corredores, en total hay $6 \cdot 120 = 720$ posibilidades.

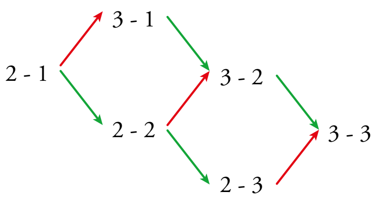
Página 357

3 Siguiendo con el partido del ejemplo 5, responde:

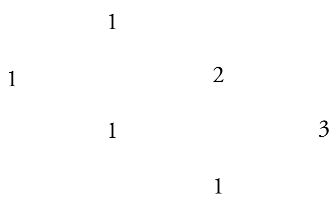
a) Si en el descanso el resultado era 2 - 1, ¿de cuántas formas posibles pudo ir variando el marcador hasta llegar al resultado final 3 - 3?

b) Repite el problema para un resultado final 4 - 3 y un 2 - 2 en el descanso.

a)

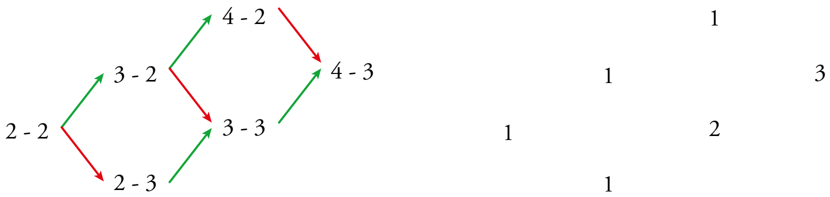


Por tanto:



Es decir, se puede llegar de 3 formas diferentes.

b)



Se puede llegar de 3 formas diferentes.

2 VARIACIONES Y PERMUTACIONES (IMPORTA EL ORDEN)

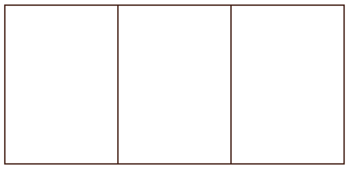
Página 359

1 **¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con las cifras impares?**

Las cifras impares son 1, 3, 5, 7 y 9.

Como las cifras de los números pueden repetirse la solución es: $VR_{5,4} = 5^4 = 625$

2 **Disponemos de siete colores con los que hemos de pintar las siguientes franjas. ¿Cuántas banderas salen?**

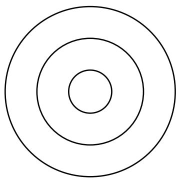


Ten en cuenta que:

- **Cada franja de la bandera hay que llenarla con un solo color.**
- **Dos o las tres franjas se pueden pintar del mismo color.**
- **Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.**

Como importa el orden y los colores pueden repetirse, salen $VR_{7,\,3} = 7^3 = 343$ banderas.

3 **Hemos de pintar esta diana con tres colores distintos. Disponemos de siete latas de pintura con colores variados. ¿De cuántas formas podremos hacerlo si no podemos repetir los colores?**



Importa el orden y los colores no pueden repetirse, por tanto, la diana puede pintarse de $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ formas diferentes.

4 **En un aula hay seis ventanas que pueden estar abiertas (*A*) o cerradas (*C*), indistintamente. Esta mañana su posición era esta: *ACAACA*, es decir, estaban abiertas la 1.ª, la 3.ª, la 4.ª y la 6.ª; y estaban cerradas, la 2.ª y la 5.ª. ¿Cuántas posiciones distintas pueden tener las ventanas?**

De $VR_{2,\,6} = 64$ formas.

5 **La asociación de libreros va a entregar los premios «Pluma de Oro» y «Pluma de Plata». Para ello, ha seleccionado diez libros entre los publicados este año. ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos premios entre esos libros?**

El orden importa y los libros no pueden repetirse, por tanto, los premios pueden repartirse de $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$ formas distintas.

6 **En el alfabeto morse se utilizan dos símbolos: el punto (.) y la raya (–) para representar letras y números. Por ejemplo, las vocales se representan así:**

A · – E · I · · O – – – U · · –

a) ¿Cuántas tiras de tres símbolos de estos (entre puntos y rayas) se pueden formar?

b) Si utilizamos tiras de 1, 2, 3 o 4 símbolos, ¿cuántas letras o números podemos representar en total?

a) Como los símbolos se pueden repetir e importa el orden, se pueden formar $VR_{2,\,3} = 2^3 = 8$ tiras.

b) Tiras de 1 símbolo: 2 tiras

Tiras de 2 símbolos: $VR_{2,\,2} = 2^2 = 4$

Tiras de 4 símbolos: $VR_{2,\,4} = 2^4 = 16$

Por tanto, si utilizamos tiras de 1, 2, 3 o 4 símbolos, se pueden representar $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ letras o números.

7 **¿Cuántos números capicúa de tres cifras existen? ¿Y de cuatro cifras? ¿Y de cinco?**

- Los números capicúa de tres cifras son de la forma: xyx (x puede ser igual que y pero no puede ser cero).

  Por tanto, el número de números capicúa de tres cifras es el mismo que el número de grupos de dos cifras xy restando los casos en los que la primera cifra sea un cero: $VR_{10,2} - 10 = 90$

- Los números capicúa de cuatro cifras son de la forma: $xyyx$ (x puede ser igual que y pero no puede ser cero)

  De nuevo, el número de números capicúa de cuatro cifras coincide con el número de grupos de dos cifras xy exceptuando los que empiezan por cero: 90

- Los números capicúa de cinco cifras son de la forma: $xyzyx$ (donde x, y, z pueden coincidir, pero x no puede ser cero)

  En este caso, el total es igual al número de grupos xy que pueden formarse por cada cifra z. Por tanto, el total es $90 \cdot 10 = 900$.

8 **¿De cuántas formas pueden ponerse en fila ocho amigos?**

De $P_8 = 8! = 40\,320$ formas.

9 **¿De cuántas formas pueden sentarse alrededor de una mesa circular ocho amigos?**

De nuevo son ocho amigos e importa el orden en el que se colocan, pero la mesa es circular, por tanto, si numeramos los amigos del 1 al 8, los siguientes casos son iguales:

1-2-3-4-5-6-7-8

2-3-4-5-6-7-8-1

…

8-1-2-3-4-5-6-7

Es decir, estos 8 casos se reducen a 1. Esto ocurrirá con todas las permutaciones de los 8 elementos (los amigos).

Por tanto, se podrán colocar de $P_8 / 8 = 8! / 8 = 7! = 5\,040$ formas distintas alrededor de la mesa.

3 ▸ CUANDO NO INFLUYE EL ORDEN. COMBINACIONES

Página 360

1 **En una carrera con ocho corredoras se clasifican para la final las tres primeras. ¿De cuántas formas puede efectuarse la clasificación?**

$$C_{8,\,3} = \frac{V_{8,3}}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

La clasificación puede efectuarse de 56 formas.

2 **Vera quiere regalarle a Zoe tres vinilos y los quiere elegir entre los diez que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacer la elección?**

$$C_{10,\,3} = \frac{V_{10,3}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

Puede hacer la selección de 120 formas distintas.

3 **En un monte hay cinco refugios y cada uno está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos hay?**

Si llamamos A, B, C, D, E a los refugios, por ejemplo, el camino AA no existe, y los caminos AB y BA son el mismo, así que no influye el orden y los elementos no pueden repetirse:

$$C_{5,\,2} = \frac{V_{5,2}}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Hay diez caminos.

4 **Tenemos seis puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro sobre el mismo plano. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Y cuántos planos que se apoyen en tres de ellos?**

El caso de las rectas es análogo a la de los caminos de la actividad anterior:

$$C_{6,\,2} = \frac{V_{6,2}}{2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ rectas}$$

Lo mismo con el caso de los planos, aunque en este caso necesitamos tres puntos:

$$C_{6,\,3} = \frac{V_{6,3}}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20 \text{ planos}$$

3 CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Página 364

1 **Lanzamos dos monedas. Calcula:**

a) $\boldsymbol{P}$**[dos C]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[dos +]** **c)** $\boldsymbol{P}$**[una C y una +]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[\text{Cara y Cara}] = P[\text{Cara}] \cdot P[\text{Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{Cruz y Cruz}] = P[\text{Cruz}] \cdot P[\text{Cruz}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

c) $P[\text{Cara y Cruz}] = P[1.^{\text{a}}\ \text{Cara}] \cdot P[2.^{\text{a}}\ \text{Cruz}] + P[1.^{\text{a}}\ \text{Cruz}] \cdot P[2.^{\text{a}}\ \text{Cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 **Lanzamos tres monedas. Calcula:**

a) $\boldsymbol{P}$**[C en 1.ª, + en 2.ª y C en 3.ª]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[dos C]**

Experimento compuesto independiente.

a) $P[1.^{\text{a}}\ C, 2.^{\text{a}} +, 3.^{\text{a}}\ C] = P[1.^{\text{a}}\ C] \cdot P[2.^{\text{a}} +] \cdot P[3.^{\text{a}}\ C] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) Hay $\binom{3}{2} = 3$ formas de obtener dos caras y una cruz.

$P[\text{dos C}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

3 **Lanzamos cuatro monedas. Calcula:**

a) $\boldsymbol{P}$**[tres C y una +]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[dos C y dos +]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3} = 4$ formas de obtener tres caras y una cruz.

$P[\text{tres C y una} +] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) Hay $\binom{4}{2} = 6$ formas de obtener dos caras y dos cruces.

$P[\text{dos C y dos} +] = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

4 **Lanzamos cuatro dados. Calcula:**

a) $\boldsymbol{P}$**[tres PAR y un 5]** **b)** $\boldsymbol{P}$**[un 1, un 3, un 5 y un PAR]**

Experimento compuesto independiente.

a) Hay $\binom{4}{3}$ formas de obtener tres pares y un 5: $\binom{4}{3} = 4$

$P[\text{tres PAR y un 5}] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

b) Hay 4! formas de obtener un 1, un 3, un 5 y un PAR: 4! = 24

$P[\text{un 1, un 3, un 5 y un PAR}] = 24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Página 365

5 **Extraemos tres naipes de una baraja de 40. Calcula:**

a) P**[tres ASES]** **b)** P**[un AS, un CABALLO y un REY]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[3 \text{ ASES}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

b) Hay 3! formas de obtener un AS, un CABALLO y un REY: 3! = 6

$P[\text{un AS, un CABALLO y un REY}] = 6 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{8}{1235}$

6 **Extraemos tres bolas de la urna descrita arriba. Calcula:**

a) P**[alguna de ellas sea la negra]** **b)** P**[la negra y alguna roja]**

Experimento compuesto dependiente.

a) $P[\text{alguna de ellas sea la negra}] = 1 - P[\text{ninguna negra}] = 1 - \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$

b) Hay 9 formas de conseguir la negra y alguna roja:

	Probabilidad
NRR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NRV	$\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
NVR	$\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
RNR	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RNV	$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{20}$
RRN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
RVN	$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$
VNR	$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$
VRN	$\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

$P[\text{la negra y alguna roja}] = 9 \cdot \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 366

1. Combinatoria

Hazlo tú

- **¿Cuántos números de siete cifras se pueden formar con los dígitos 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1? ¿Cuánto suman todos?**

Las cifras 8 se pueden colocar de $C_{7,3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ formas y, por tanto, este es el número de números de siete cifras que se pueden formar con los dígitos 8, 8, 8, 1, 1, 1, 1.

Para sumarlos, por tanto, si los pusiéramos en filas, tendríamos columnas de 35 dígitos en los que las tres séptimas partes (15 columnas) serían «8» y cuatro séptimas partes (20 columnas) serían «1».

Cada columna, por tanto, sumaría $15 \cdot 8 + 20 \cdot 1 = 140$

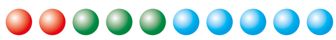
La suma total sería:

$140 \cdot (1\,000\,000 + 100\,000 + 10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1) = 140 \cdot 1\,111\,111 = 155\,555\,540$

2. Cálculo de probabilidades compuestas

Hazlo tú

- **Realiza la misma actividad suponiendo que en la urna hay estas bolas:**



a) $P[\text{1R y 2V}] = \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{2}{8} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{20}$

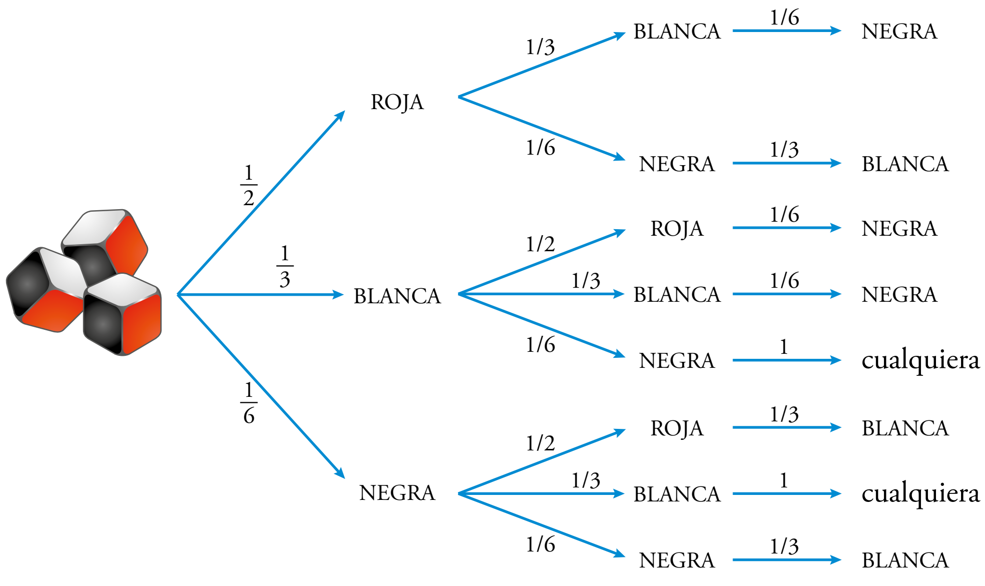
b) $P[\text{R, A, V}] = 6 \cdot P[1.^{\text{a}}\ \text{R}, 2.^{\text{a}}\ \text{A}, 3.^{\text{a}}\ \text{V}] = 6 \cdot \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$

3. Cálculo de probabilidades. Diagrama en árbol

Hazlo tú

- **Un dado tiene 3 caras rojas, 2 blancas y 1 negra. Lanzamos tres dados con esas características. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cara blanca y alguna negra?**

  Construimos un diagrama en *árbol:*



$$P\,[\text{alguna blanca y alguna negra}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+$$

$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

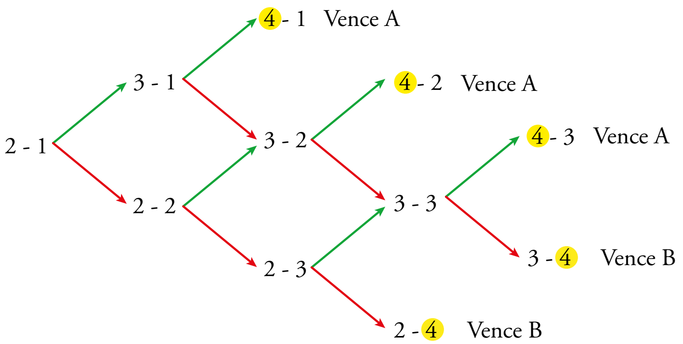
Página 367

1. Diagrama en árbol y cálculo de probabilidades

- **a) Dos jugadoras, A y B, apuestan un dinero que conseguirá la que gane cuatro partidas a cierto juego de azar. En un momento dado A va ganando 2 - 1. Escribe todos los recorridos que puede seguir la partida a partir de ese momento.**

  b) Supongamos que se juegan 40 € (han puesto 20 € cada una). Y la partida se interrumpe cuando A va ganando 2 - 1. ¿Cómo deberán repartirse los 40 €?

a)



b) Veamos las probabilidades de los diferentes posibilidades desde que están 2-1:

Gana A:

RESULTADO	PROBABILIDAD
4-1	1/4
4-2	1/8 + 1/8
4-3	1/16 + 1/16 + 1/16

La probabilidad de que gane A es 11/16. Por tanto, debería llevarse $11 \cdot 40/16 = 27{,}50$ euros.

B debería llevarse el resto, es decir, $40 - 27{,}50 = 12{,}50$ euros.

2. Cálculo de probabilidades al reiterar una prueba

- **Un jugador juvenil de baloncesto acierta el 70 % de sus lanzamientos a canasta desde la línea de personal.**

  Si lanza cinco veces calcula la probabilidad de:

  a) cinco aciertos.

  b) ningún acierto.

  c) algún acierto.

a) $P[\text{5 aciertos}] = 0{,}7^5 = 0{,}16807$

b) $P[\text{ningún acierto}] = 0{,}3^5 = 0{,}00243$

c) $P[\text{algún acierto}] = 1 - 0{,}002434 = 0{,}99757$

Página 368

Para practicar

Conteo sin fórmulas

1 **¿Cuántos partidos de Primera División se juegan en una temporada de la Liga española de fútbol? (Son 20 equipos que juegan todos contra todos dos veces).**

Cada equipo juega 19 partidos de ida y 19 partidos de vuelta. En total juegan 38 partidos.

Como hay 20 equipos, se jugarán 20 · 38 partidos. Pero estamos contando dos veces cada partido, por lo tanto se jugarán 10 · 38 = 380 partidos de fútbol.

2 **¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener al lanzar un dado y dos monedas diferentes? ¿Y si las dos monedas son iguales?**

Al lanzar dos monedas tenemos 4 posibles resultados:

CC CX XC XX

Por cada una de estas 4 posibilidades, hay 6 resultados al lanzar un dado.

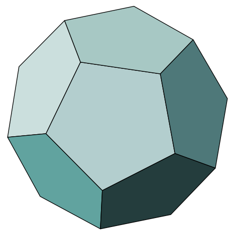
En total hay 6 · 4 = 24 posibles resultados.

Si las monedas son iguales, los posibles resultados son CC, CX y XX, ya que CX es igual que XC. Por tanto, tenemos tres resultados por cada uno de los resultados del dado, es decir, 3 · 6 = 18 posibles resultados.

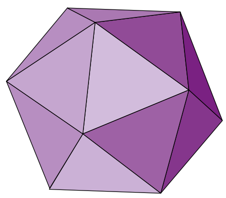
3 **Un dodecaedro regular tiene 12 caras pentagonales. ¿Cuántas aristas tiene?**

Las contamos así: 12 · 5 = 60 lados de los pentágonos. Cada dos caras se juntan en una arista. Por tanto, tendrá $\frac{60}{2}$ = 30 aristas.

a) Averigua cuántos vértices tiene, sabiendo que en cada vértice concurren 3 caras.



b) ¿Cuántas aristas y cuántos vértices tiene un icosaedro regular sabiendo que tiene 20 caras triangulares y que en cada vértice concurren 5 caras?



c) Haz lo mismo con los demás poliedros regulares.

a) Tiene 5 vértices en cada cara, es decir, 12 · 5 = 60. Sin embargo, en cada vértice concurren 3 caras, por lo que en total tiene 60 : 3 = 20 vértices.

b) Como cada cara tiene 3 aristas, habrá 20 · 3 = 60 aristas, pero como se cuentan dos veces, porque en cada arista concurren dos caras, tendrá 30 aristas.

Como cada cara tiene 3 vértices, habrá 20 · 3 = 60 vértices, pero como en cada vértice concurren 5 caras, se está contando 5 veces cada una, es decir, hay 60 : 5 = 12 vértices.

c) **Tetraedro:** 4 caras con tres aristas cada una, es decir, 12 aristas que se cuentan dos veces cada una, por lo que tiene 6 aristas.

Si tiene 3 vértices cada una de las 4 caras, habrá 12 vértices, pero como en cada vértice concurren 3 caras, se están contando 3 veces cada uno, por lo que habrá 12 : 3 = 4 vértices.

Octaedro: 8 caras con tres aristas cada una, es decir, 24 aristas que se cuentan dos veces cada una, por lo que tiene 12 aristas.

Si tiene 3 vértices cada una de las 8 caras, habrá 24 vértices, pero como en cada vértice concurren 4 caras, se están contando 4 veces cada uno, por lo que habrá 24 : 4 = 6 vértices.

Hexaedro: 6 caras con cuatro aristas cada una, es decir, 24 aristas que se cuentan dos veces cada una, por lo que tiene 12 aristas. Si tiene 4 vértices cada una de las 6 caras, habrá 24 vértices, pero como en cada vértice concurren 3 caras, se están contando 3 veces cada uno, por lo que habrá 24 : 3 = 8 vértices.

4 En el bar Chica son especialistas en combinados de zumos y en café. Tienen 5 tipos de zumos de frutas y 3 tipos de cafés.

¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer eligiendo un zumo y una taza de café?

Si, además, se añade a cada combinación un bombón de chocolate blanco o negro, ¿cuántas se podrán preparar de esta forma?

Por cada zumo se pueden hacer tres combinaciones con café.

En total habrá $5 \cdot 3 = 15$ combinaciones de zumo y café.

A cada una de estas 15 combinaciones se le puede añadir un bombón a elegir entre dos tipos. Luego ahora habrá $15 \cdot 2 = 30$ combinaciones distintas.

5 Describe todas las formas en que puedes pagar un chicle de 50 céntimos con monedas de 20, 10 y 5 céntimos.

20 + 20 + 10

20 + 20 + 5 + 5

20 + 10 + 10 + 10

20 + 10 + 10 + 5 + 5

20 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5

20 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

10 + 10 + 10 + 10 + 10

10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5

10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5

10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

6 El dominó es un juego de mesa cuyas fichas rectangulares están formadas por dos cuadrados con puntos como los dados; desde 0-0, 0-1, 0-2, … 0-6, 1-1, 1-2, … hasta el 6-6. ¿Cuántas fichas tiene un dominó?

¿Cuántas tendría un dominó gigante cuyos valores fueran desde 0-0 hasta 10-10?

- En el dominó normal, hay siete fichas con el 0: 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6

  Hay seis fichas con el 1 (en realidad son siete, pero la ficha 1-0 ya la hemos contado en el caso anterior): 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6

  Por tanto, hay cinco fichas con el 2, cuatro con el 3, tres con el 4, dos con el 5, 1 con el 6.

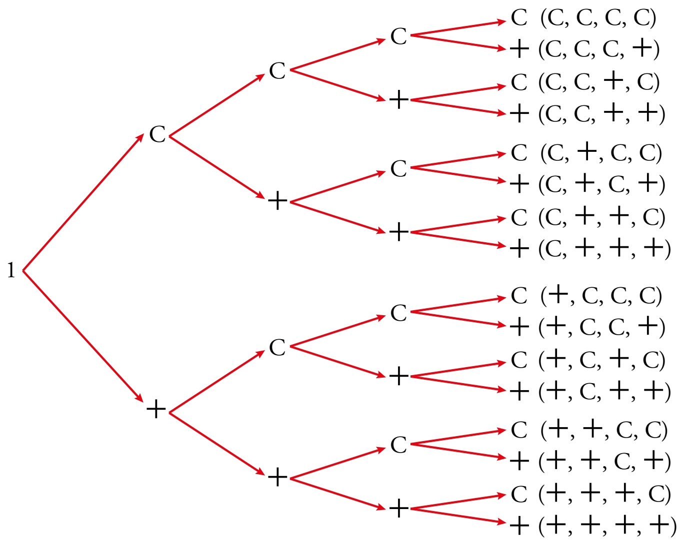
  En total: 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 fichas

- En el caso del domino gigante el cálculo es análogo al del caso anterior, por tanto, habría once fichas con el 0, diez fichas con el 1…

  En total serían: 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 66 fichas

Diagrama en árbol

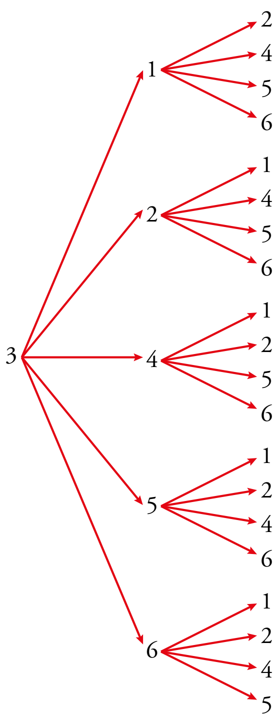
7 **Describe en un diagrama en árbol los distintos resultados que se pueden obtener al lanzar una moneda cuatro veces.**



8 **Utiliza un diagrama en árbol para saber cuántos números de tres cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que sean mayores que 300 y menores que 500.**

Los números que buscamos empiezan por 3 y 4.

Los ponemos en forma de diagrama de árbol. Veamos los que empiezan por 3:

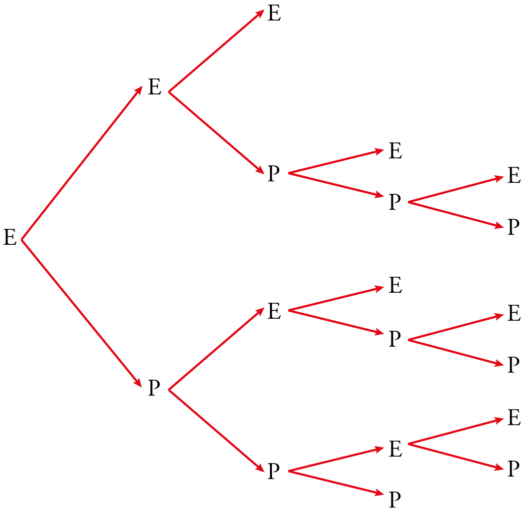


Podemos formar 20 números que empiecen por 3.

El mismo número sale para los que empiezan por 4, por tanto, se pueden formar $2 \cdot 20 = 40$ números.

9 **Eva y Pedro juegan un torneo de ajedrez en el que será vencedor el primero que logre ganar tres partidas (no se tienen en cuenta las partidas que terminan en tablas). ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?**

Construimos un diagrama en árbol con las distintas posibilidades teniendo en cuenta que terminamos cuando uno de los dos ha conseguido 3 victorias. Empezamos suponiendo que ha ganado Eva:

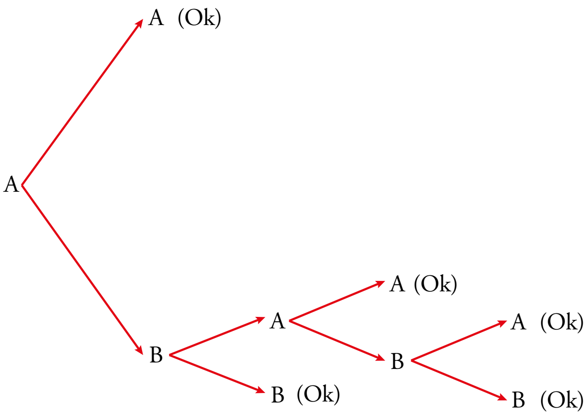


Por tanto se puede desarrollar de 10 formas distintas si empieza ganando Eva.

Si empieza ganando Álvaro tendremos 10 formas distintas más de que se desarrolle el encuentro. En total habrá 20 desarrollos distintos.

10 **Ane y Berta juegan un torneo de tenis que ganará el que consiga dos sets seguidos o tres alternos. ¿Cuáles son los posibles desarrollos del torneo?**

Hacemos el desarrollo en árbol suponiendo que empieza ganando Ane:



Por tanto, hay 5 maneras distintas de que se desarrolle el torneo si empieza ganando Ane, y abrá otras 5 si suponemos que empieza ganando Berta. Por tanto en total hay 10 maneras distintas posibles.

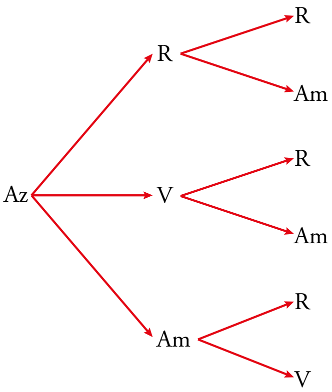
11 **Sacamos, una tras otra, tres bolas de esta caja y las dejamos fuera en fila. Describe todos los resultados posibles que puedes obtener.**

Llamamos: Az = «Azul»; R = «Rojo»; V = «Verde»; Am = «Amarillo»

Az-R-V	Az-V-R	Az-Am-R
Az-R-Am	Az-V-Am	Az-Am-V

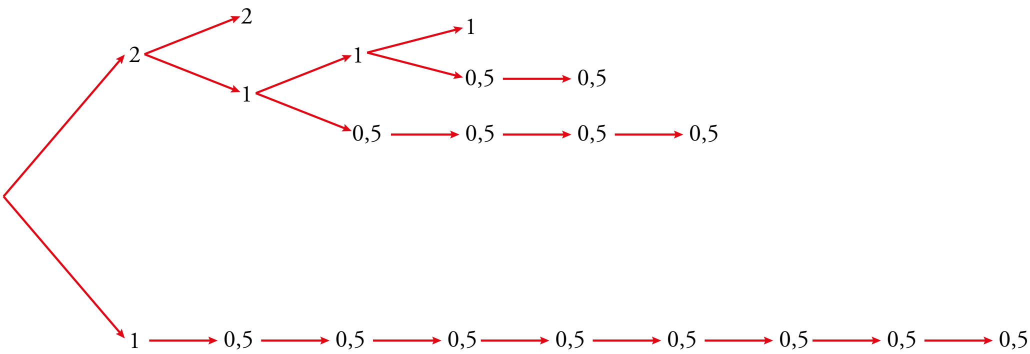
Hay 6 resultados posibles por cada color, por tanto, hay un total de $6 \cdot 4 = 24$ resultados.

Si lo hacemos mediante un diagrama en árbol:



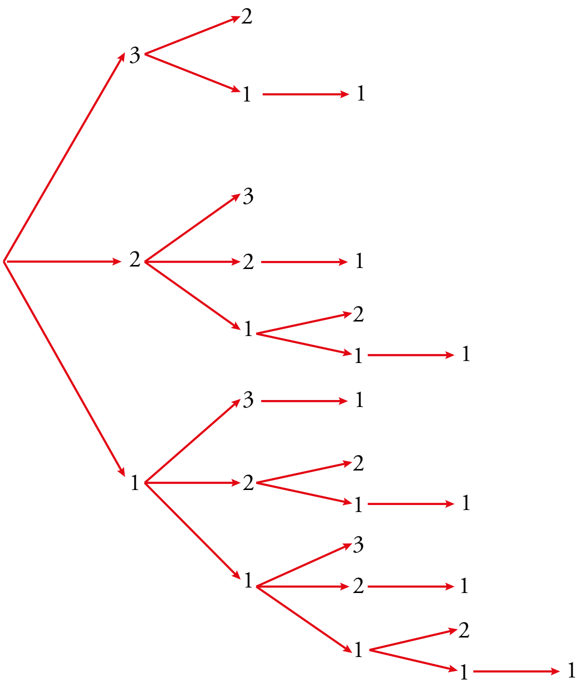
12 **Describe mediante un diagrama en árbol todas las formas en que puedes pagar 5 euros con monedas de 2 €, 1 € y 0,50 €, si tienes muchas monedas de 2 € y de 1 €; pero solo cuatro de 0,50 €.**

Hay 5 maneras posibles:



13 **Hace cuatro minutos comenzó un partido de baloncesto y nuestro equipo lleva cinco puntos. Describe en un diagrama en árbol todas las posibilidades que pudieran darse para alcanzar esta puntuación. Recuerda que en baloncesto hay canastas de tres puntos, de dos puntos y de un punto.**

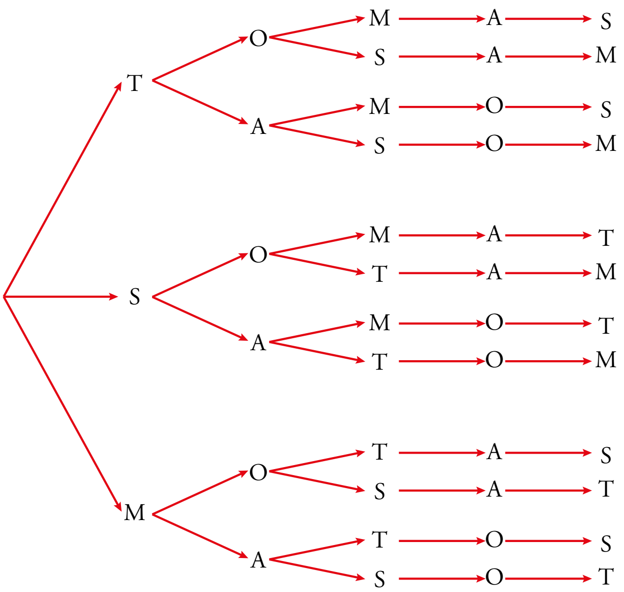
Empezamos viendo qué ocurre si la primera canasta es de 3 puntos, de 2 o de 1 punto, para llegar a sumar 5 puntos en total y teniendo en cuenta que el orden a la hora de conseguir los puntos nos importa:



Hay 13 posibilidades distintas.

14 **Con las letras de la palabra TOMÁS queremos escribir todas las palabras, tengan o no tengan sentido, en las que las vocales y consonantes aparezcan alternadas. Utiliza un diagrama en árbol para ver cuántas posibilidades hay.**

Para que las vocales y consonantes aparezcan alternadas debemos empezar por una consonante:



Hay 12 posibilidades.

Página 369

Para practicar

Combinatoria

15 **Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números.**

¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

a) Hay 6 posibilidades en cada tirada, lo que significa que, fijado el primer lanzamiento, hay 6 posibilidades para el segundo, y así sucesivamente.

En total habrá $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ resultados.

b) Hay 6 posibilidades en cada tirada. Puede repetirse el resultado e influye el orden. Hemos de hacer grupos de 4.

Son $VR_{6,\,4} = 6^4 = 1\,296$ resultados.

16 **¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?**

¿Cuántas mezclas de tres colores? ¿Y de cuatro colores?

No importa el orden en que se mezclen los colores:

DOS COLORES: $C_{8,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mezclas.

TRES COLORES: $C_{8,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ mezclas.

CUATRO COLORES: $C_{8,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ mezclas.

17 **Si en un pentágono pintamos de rojo todos sus lados y todas sus diagonales, ¿cuántos segmentos habremos pintado?**

Si A, B, C, D, E son los vértices del pentágono, cada lado o diagonal es de la forma, AB, AC, AD… es decir, está determinado por dos vértices diferentes sin importar el orden.

$C_{5,\,2} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!}$

Se habrán pintado 10 segmentos.

18 **Además de la locomotora, que va delante, un tren lleva 5 vagones: 3 de segunda clase y 2 de primera clase, que pueden ordenarse de cualquier forma.**

Un día, su posición era así: 21122; otro día, así: 11222.

¿De cuántas formas pueden ordenarse los vagones?

Si se empieza con 1, hay 4 formas de colocar el segundo 1; si se empieza con 21, hay 3 formas de colocar el segundo 1; si se empieza con 221, hay dos formas de colocar el segundo 1, y solo hay una forma de colocar el segundo 1 cuando empieza por 2221. Por tanto:

Se pueden ordenar de 4 + 3 + 2 + 1 = 10 formas distintas.

19 **Cinco amigas, Ali, Bea, Carme, Diana y Eva, juegan la fase final de un campeonato de pádel en la cada una juega contra todas las demás. Se entregará una copa a la campeona y una medalla a la subcampeona.**

a) ¿De cuántas formas pueden adjudicarse los trofeos?

b) ¿Cuántas posibles clasificaciones puede haber de las tres primeras?

a) Como importa el orden y no puede haber repetición: $V_{5,\,2} = 5 \cdot 4 = 20$

b) $V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

20 **Antía es la mediana de cinco hermanos. ¿Qué posibles distribuciones puede haber en esa familia si solo la conocemos a ella? Por ejemplo, puede ser chico-chica–chica-chico--chico.**

Como ella es la mediana, la distribución es

$$x - x - \text{chica} - x - x$$

Hay cuatro posibles distribuciones de los más pequeños:

chico-chico

chica-chica

chico-chica

chica-chico

Para cada uno de los cuatro casos anteriores hay los mismos casos, para los hermanos y hermanas más mayores.

Por tanto, hay un total de 4 · 4 = 16 distribuciones posibles.

21 **Lanzamos tres monedas: una de 2 €, una de 1 € y una de 0,20 €. ¿De cuántas formas diferentes se pueden obtener una o dos caras?**

Una cara se puede obtener de tres formas diferentes, una por cada moneda.

Lo mismo pasa con una cruz, que es lo mismo que obtener dos caras.

Por tanto, hay 3 + 3 = 6 formas de obtener una o dos caras.

22 **A un grupo de cinco amigos les han regalado tres entradas para un partido de fútbol de máxima rivalidad. ¿Cuántas formas distintas tienen de repartirse las entradas?**

No hay repetición y no importa el orden, por tanto, hay $C_{5,\,3} = \frac{5 \cdot 4}{2}$ formas distintas.

23 **Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?**

A cada jugador le corresponden 28 : 4 = 7 fichas, por tanto:

Posibilidades de coger las fichas del primer jugador:

$$C_{28,\,7} = \frac{28!}{7! \cdot 21!} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$$

Al siguiente jugador le quedan 21 fichas, por tanto:

$$C_{21,\,7} = \frac{21!}{7! \cdot 14!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 116\,280$$

Procedemos de forma análoga para concluir que al tercer jugador tiene 3 432 posibilidades y el último, 1.

Por tanto, el total es:

$1\,184\,040 \cdot 116\,280 \cdot 3\,432 \cdot 1 = 472\,518\,347\,558\,400$

24 **Calcula.**

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$ **b)** $\frac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$ **c)** $\frac{P_4}{V_{4,\,3}}$

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3} = 5 \cdot 4 - \frac{V_{5,3}}{P_3} = 20 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\frac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}} = \frac{6^2}{\frac{V_{4,\,2}}{P_2}} = \frac{36}{\frac{12}{2}} = \frac{36}{6} = 6$

c) $\frac{P_4}{V_{4,\,3}} = \frac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

Probabilidad

25 **Lanzamos tres monedas. Calcula la probabilidad de que:**

a) las tres sean cara.

b) se obtengan dos caras y una cruz.

c) haya al menos una cara.

a) $P[\text{3 caras}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[\text{2 caras y 1 cruz}] = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{al menos 1 cara}] = 1 - P[\text{3 cruces}] = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

26 **a) En un juego de dominó, tenemos sobre la mesa la ficha 3-5. ¿Qué probabilidad hay de que otra extraída al azar engrane con ella?**

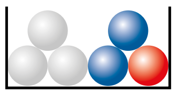
b) ¿Y si tuviésemos la 5-5?

a) Sin contar la que está sobre la mesa, hay 6 fichas más con un 3 y 6 fichas más con un 5 y quedan 27 fichas.

$P[\text{salga 3 o 5}] = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

b) $P[\text{salga 5}] = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

27 **Extraemos tres bolas con reemplazamiento de esta urna. Calcula la probabilidad de que:**



a) cada una sea de un color.

b) no haya ninguna blanca.

c) se obtengan dos azules.

Repite la actividad si la extracción fuera sin reemplazamiento.

Con reemplazamiento:

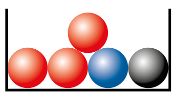
a) $P[\text{R, B, A}] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{ninguna BLANCA}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) $P[\text{2A}] = P[\text{R, 2A}] + P[\text{B, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$

Sin reemplazamiento:

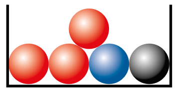
a) $P[\text{R, B, A}] = 3! \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$



b) $P[\text{R, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) $P[\text{2A}] = P[\text{R, 2A}] + P[\text{B, 2A}] = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

28 **Extraemos dos bolas de la siguiente urna:**



a) ¿Qué es más probable, sacar dos bolas rojas con o sin reemplazamiento?

b) ¿Qué es más probable, sacar una bola roja y otra azul con o sin reemplazamiento?

a) Con reemplazamiento: $P[2R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

Sin reemplazamiento: $P[2R] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable con reemplazamiento.

b) Con reemplazamiento: $P[R, A] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$

Sin reemplazamiento: $P[R, A] = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

Es más probable sin reemplazamiento.

29 **Se lanzan dos monedas y un dado. Calcula las siguientes probabilidades:**

a) Obtener dos caras y cinco.

b) Obtener alguna cruz y seis.

c) Obtener al menos una cara y par en el dado.

a) $P[\text{dos CARAS}] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Por tanto, $P[\text{dos CARAS y CINCO}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

b) $P[\text{alguna CRUZ}] = 1 - P[\text{dos CARAS}] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Por tanto, $P[\text{alguna CRUZ y SEIS}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$

c) $P[\text{al menos una CARA}] = 1 - P[\text{dos CRUCES}] = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P[\text{al menos una CARA y PAR}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

30 **Extraemos dos cartas de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de que:**

a) sean dos ases.

b) sean dos figuras (FIGURAS: SOTA, CABALLO, REY).

c) sean dos cartas de oros.

a) $P[\text{dos ASES}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $P[\text{dos FIGURAS}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$

c) $P[\text{dos cartas de OROS}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{11}{130}$

31 **Recuerda las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Llamamos S a la suma de los puntos de las dos mitades y D a la diferencia entre la puntuación mayor y la menor. Si extraemos una ficha, calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[S = 2]$ **b)** $P[S = 6]$

c) $P[S \neq 11]$ **d)** $P[S > 8]$

e) $P[D > 2]$ **f)** $P[\text{OBTENER ALGÚN } 1]$

a) $P[S = 2] = P[1, 1] + P[0, 2] = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$

b) $P[S = 6] = P[0, 6] + P[1, 5] + P[2, 4] + P[3, 3] = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

c) $P[S \neq 11] = 1 - P[S = 11] = 1 - P[5, 6] = \frac{27}{28}$

d) $P[S > 8] = P[3, 6] + P[4, 5] + P[4, 6] + P[5, 5] + P[5, 6] + P[6, 6] = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

e) $P[D > 2] = 1 - P[D \leq 2] = 1 - P[D = 2] - P[D = 1] - P[D = 0]$

$P[D = 2] = P[0, 2] + P[1, 3] + P[2, 4] + P[3, 5] + P[4, 6] = \frac{5}{28}$

$P[D = 1] = P[0, 1] + P[1, 2] + \ldots + P[5, 6] = \frac{6}{28}$

$P[D = 0] = P[0, 0] + P[1, 1] + \ldots + P[6, 6] = \frac{7}{28}$

Por tanto: $P[D > 2] = 1 - P[D \leq 2] = 1 - \frac{5}{28} - \frac{6}{28} - \frac{7}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$

f) $P[\text{OBTENER ALGÚN } 1] = P[0, 1] + P[1, 1] + \ldots + P[6, 1] = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

32 **En un libro que tiene 4 capítulos, el 5 % de las páginas del primer capítulo, el 4 % del segundo y el 2 % del tercero tienen algún error. En el cuarto capítulo no hay errores. ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir una página al azar, tenga algún error si todos los capítulos tienen el mismo número de páginas?**

P[algún error] = P[primer capítulo] · P[errores primer capítulo] + P[segundo capítulo] · P[errores segundo capítulo] + P[tercer capítulo] · P[errores tercer capítulo] + P[cuarto capítulo] · P[errores cuarto capítulo] $= \frac{1}{4} \cdot 0{,}05 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}04 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}02 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0{,}0275$

Página 370

Para resolver

33 **¿Cuántos números podemos formar con tres unos y dos ochos? Escríbelos y calcula su suma.**

Disponemos cinco lugares en los que podemos colocar los «8» de $C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ formas diferentes:

88111	18181
81811	18118
81181	11881
81118	11818
18811	11188

Si ponemos todos los números en columna para sumarlos obtenemos 5 columnas de 10 dígitos en las que hay $2 \cdot \frac{10}{5} = 4$ ochos y $3 \cdot \frac{10}{5} = 6$ unos.

Por tanto, cada columna suma $4 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 38$.

Como los números son de 5 dígitos, la suma total será:

$38 \cdot (10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1) = 422\,218$

34 **a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 2 y 5. ¿Cuántos son?**

b) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 2? Ten en cuenta que, por ejemplo, 02002 no es un número de cinco cifras.

a) Con cuatro «doses»: 2222

Con tres «doses»: 2225, 2252, 2522, 5222

Con dos «doses»: 2255, 2525, 2552, 5522, 5252, 5225

Con un «dos»: 5552, 5525, 5255, 2555

Sin «doses»: 5555

En total son 16 números.

Utilizando la combinatoria, son variaciones con repetición de 2 elementos en grupos de 4.

$VR_{4,\,2} = 4^2 = 16$

b) El número tiene que empezar por 2, por tanto, quedan 4 dígitos y estamos en el mismo caso que el apartado anterior. Se pueden formar 16 números.

35 **Fernando y Julia tienen dos barajas de cartas. Cada uno extrae una carta de su baraja al azar.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea la misma carta?

b) ¿Qué probabilidad hay de que sea el mismo número aunque tenga distinto palo?

c) ¿Qué probabilidad hay de que obtengan el mismo palo?

a) Se trata de un experimento compuesto en el que hay $40 \times 40 = 1\,600$ casos posibles, y en 40 de ellos coinciden las dos cartas.

$P[\text{misma carta}] = \dfrac{40}{1600} = \dfrac{1}{40}$.

De hecho, es lo mismo que ver la probabilidad de que la segunda carta coincida con la primera, siendo esta cualquier carta. Uno de ellos saca una carta y habrá una sola posibilidad que el otro saque la misma carta de su baraja de 40 cartas. Por tanto se puede decir directamente que la probabilidad es:

$P[\text{misma carta}] = \dfrac{1}{40}$

b) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 160 casos favorables.

$P[\text{tengan el mismo número}] = \dfrac{160}{1600} = \dfrac{1}{10}$

La segunda forma de razonarlo, teniendo en cuenta solamente la segunda carta, será que hay 4 cartas de las 40 de la baraja que tienen el mismo número que la primera carta. Por tanto la probabilidad será $\dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.

$P[\text{tengan el mismo número}] = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.

c) Con el mismo razonamiento del apartado a), ahora hay 400 casos favorables.

$P[\text{mismo palo}] = \dfrac{400}{1600} = \dfrac{1}{4}$

Pueden tener el mismo palo 10 de las 40 cartas de la segunda baraja, por tanto:

$P[\text{mismo palo}] = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$.

36 **Se extrae un naipe de una baraja y luego se tira un dado. Si sale el 5 o el 6, se devuelve la carta al mazo; si no, esta se retira. Se baraja y se vuelve a extraer una carta. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases?**

$P[2 \text{ ASES}] = P[\text{AS}] \cdot P[5, 6 \text{ y AS}] + P[\text{AS}] \cdot P[1, \ldots, 4 \text{ y AS}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{40} + \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{39} = \frac{11}{1300} = 0{,}0085$

37 **Se extrae una bola al azar de una urna que tiene 50 bolas numeradas así: 00, 01, …, 48, 49. Llamamos X a la primera cifra del número extraído e Y a la segunda. Calcula las siguientes probabilidades:**

a) $X = 3$ **b)** $Y \neq 5$ **c)** $X \neq Y$

d) $X + Y = 9$ **e)** $X + Y \neq 10$

a) $P[X = 3] = P[30 \text{ a } 39] = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

b) $P[Y \neq 5] = 1 - P[Y = 5] = 1 - P[05, 15, 25, 35, 45] = 1 - \frac{5}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$

c) $P[X \neq Y] = 1 - P[X = Y] = 1 - P[00, 11, 22, 33, 44] = 1 - \frac{5}{50} = \frac{45}{50} = \frac{9}{10}$

d) $P[X + Y = 9] = P[09, 18, 27, 36, 45] = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$

e) $P[X + Y \neq 10] = 1 - P[X + Y = 10] = 1 - P[19, 28, 37, 46] = 1 - \frac{4}{50} = \frac{46}{50} = \frac{23}{25}$

38 **Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse para estar alternados?**

¿Y si se quieren sentar juntos los tres chicos y al lado las tres chicas?

Si enumeramos los puestos de las butacas del 1 al 6, entonces las chicas pueden ocupar los puestos 1, 3, 5 o los puestos 2, 4, 6.

Si ocupan los puestos 1, 3 y 5 debemos considerar el orden en que se sientan, por lo que tendremos una permutación de 3 en 3, pueden sentarse de 6 formas:

$$P_3 = 3! = 6$$

Pero los chicos también son 3 y pueden cambiar sus posiciones en los puestos 2, 4 y 6 de la misma forma, por lo que podrán sentarse de 6 formas distintas por cada posición que ocupen las 3 chicas.

Por tanto, si las chicas ocupan los puestos 1, 3 y 5 y los chicos ocupan los puestos 2, 4 y 6 habrá $6 \cdot 6 = 36$ formas de sentarse.

Y como pueden sentarse también los chicos en los puestos 1, 3, y 5 y las chicas en los puestos 2, 4 y 6 de 36 formas distintas más, en total habrá 72 maneras de sentarse distintas si se alternan chicos y chicas.

Si se quieren sentar juntos los 3 chicos y las 3 chicas será el mismo razonamiento, ya que las chicas podrían ocupar las butacas 1, 2, 3 y los chicos las butacas 4, 5, 6 de 36 formas distintas, o intercambiar los asientos y tener 36 formas más de sentarse. Habrá 72 maneras distintas de colocarse igualmente.

39 **Las probabilidades de que un estudiante apruebe las tres asignaturas más difíciles, durante el primer año de carrera, son de 2/7, 4/9, y 1/3 respectivamente.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender las tres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de suspender solo una de las tres asignaturas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar al menos una?

a) $P[\text{suspender las tres}] = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{189} = 0{,}11$

b) $P[\text{suspender solo 1}] = P[\text{suspender solo la primera}] + P[\text{suspender solo la segunda}] + P[\text{suspender solo la tercera}] = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{46}{189}$

c) $P[\text{aprobar al menos 1}] = 1 - P[\text{suspender las tres}] = 1 - \frac{20}{189} = \frac{169}{189}$

40 **Observa cómo resolvemos esta ecuación:**

$$V_{x,\,2} = 7x \to x(x-1) = 7x \to x^2 - x = 7x \to$$
$$\to x = 0 \text{ (no vale)},\ x = 8$$

Ahora, resuelve tú estas otras:

a) $VR_{x,\,2} - V_{x,\,2} = 9$

b) $2 \cdot \binom{x}{2} = VR_{x,\,2} - 6$

a) $VR_{x,\,2} - V_{x,\,2} = 9$

$$\left.\begin{array}{l} VR_{x,2} = x^2 \\ V_{x,2} = x(x-1) = x^2 - x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - (x^2 - x) = 9 \\ x^2 - x^2 + x = 9 \end{array}$$

$x = 9$

b) $2 \cdot \binom{x}{2} = VR_{x,\,2} - 6$

$$\binom{x}{2} = \frac{x!}{2!(x-2)!} = \frac{x \cdot (x-1)\cancel{(x-2)!}}{2!\cancel{(x-2)!}} = \frac{x^2 - x}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\binom{x}{2} = 2 \cdot \frac{x^2 - x}{2} = x^2 - x \\ VR_{x,2} - 6 = x^2 - 6 \end{array}\right\} x^2 - x = x^2 - 6$$

$x = 6$

41 **Una alumna ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en un examen. Se eligen 2 temas al azar.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le toquen dos que no ha estudiado?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, al menos uno de los temas, sea de los que ha estudiado?

a) $P[\text{dos que no ha estudiado}] = \frac{28}{40} \cdot \frac{27}{39} = \frac{63}{130}$

b) $P[\text{al menos ha estudiado uno}] = 1 - P[\text{dos que no ha estudiado}] = 1 - \frac{63}{130} = \frac{67}{130}$

42 **En el departamento de ofertas de unos grandes almacenes se ponen a la venta 100 camisetas de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que una camiseta tenga tara es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Elegimos una camiseta al azar.**

a) Calcula la probabilidad de que tenga tara.

b) Calcula la probabilidad de que sea de la marca C y no tenga tara.

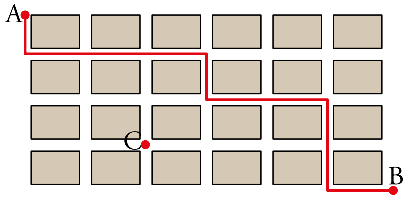
a) $P[\text{tara}] = \dfrac{(100 \cdot 0{,}01 + 60 \cdot 0{,}02 + 40 \cdot 0{,}03)}{200} = 0{,}017$

b) $P[\text{no tenga tara siendo de C}] = 1 - P[\text{tiene tara siendo de C}] = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

43 **En una urna hay 4 bolas blancas y 3 negras. En otra urna hay 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera y se introduce en la segunda. A continuación, se saca una bola de la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea negra?**

P[negra] = P[la segunda es negra si la primera es blanca] + P[la segunda es negra si la primera es negra] $= \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{5}{9} + \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{6}{9} = \dfrac{38}{63}$

44 **Observa esta cuadrícula:**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a B?

b) ¿Cuántos hay para ir de A a B, pasando por C?

a) Hay que ir seis veces a la derecha (D) y cuatro veces hacia abajo (I).

Los caminos serán de la forma DDDIIDIDID, es decir, se trata de colocar cuatro I en diez lugares.

Para ir de A a B hay: $C_{10,\,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ caminos

b) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares. Es decir: $C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ caminos

Análogamente, hay: $C_{5,\,1} = \dfrac{5}{1} = 5$ caminos para ir de C a B.

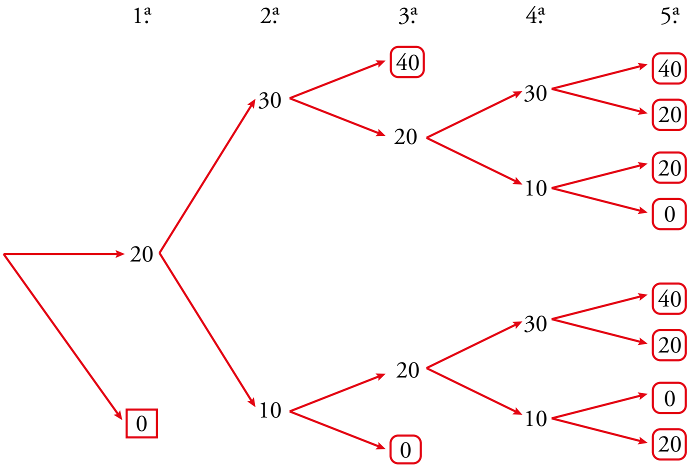
Para ir de A a B, pasando por C, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

45 **Javier tiene 10 fichas. Va a jugar, como máximo, cinco veces a la ruleta. En cada apuesta, gana o pierde 10 fichas, y dejará de jugar si se queda sin fichas o si gana 30 fichas.**

Describe en un diagrama en árbol todos los resultados posibles que pueden ir dándose.

Si pierde la primera partida, se queda sin fichas y no puede seguir jugando. Ganar 30 € es lo mismo que llegar a tener 40 €.

El árbol es el siguiente:



Hay 11 caminos distintos, en 4 de ellos terminará la partida con 0 €, en otros 4 terminará con 20 €, y en los tres que quedan terminará con 40 €.

46 **Simplifica y calcula el valor de** ***n*****:**

a) $3\binom{n+2}{3} = 5\binom{n+1}{2}$ **b)** $\dfrac{2n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-3)!}$

a) $3\binom{n+2}{3} = 5\binom{n+1}{2} \;\to\; 3\dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3 \cdot 2} = 5\dfrac{(n+1)\,n}{2}$ (1)

- Si $n = -1$ o bien $n = 0$, ambos miembros de la ecuación son nulos. Por tanto, son soluciones de la ecuación.
- Si $n \neq -1$, $n \neq 0$ podemos simplificar en (1) dividiendo entre n y $n + 1$ y nos queda:

  $\dfrac{(n+2)}{2} = \dfrac{5}{2} \;\to\; n = 3$

La única solución válida es $n = 6$, porque estamos trabajando con números combinatorios.

b) $\dfrac{2n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-3)!} \;\to\; \dfrac{2}{n+1} = \dfrac{1}{n-3} \;\to\; 2(n-3) = n+1 \;\to\; 2n-6 = n+1 \;\to\; n = 7$

Página 371

Cuestiones teóricas

47 **¿Verdadero o falso?**

a) Hay menos de una posibilidad entre mil de obtener 10 caras al lanzar una moneda 10 veces.

b) Hay más números capicúa de seis cifras que de cinco cifras.

c) En las $VR_{m,\,n}$ puede ser $m \le n$ o bien $m \ge n$.

d) Si $C_{x,2} = 10$, entonces $x = -4$.

e) Si $P[B] = 1 - P[A]$ entonces A y B son sucesos contrarios.

a) Verdadero.

Una posibilidad entre 1 000 = $\dfrac{1}{1000}$ = 0,001

P[obtener 10 caras]= 0,0098

b) Falso.

En el ejercicio 7 de la página 359 vimos que había 900 números capicúa de 5 cifras.

Recordemos que los números capicúa de seis cifras son de la forma: $xyzzyx$ (donde x, y, z pueden coincidir, pero x no puede ser cero). Por tanto, el total es igual al número de grupos xy que pueden formarse por cada cifra z. Es decir, también hay 900.

c) Verdadero.

En las variaciones con repetición cogemos m elementos y los agrupamos de n en n, pero puede haber repetición así que puede ocurrir que $n \ge m$, y es obvio que podemos agruparlos si $m \ge n$.

d) Falso, porque no podemos usar valores negativos en números combinatorios. No se pueden tomar «–4» elementos combinados de 2 en 2.

Veamos si hay una solución válida:

$$C_{x,\,2} = \frac{x(x-1)}{2} = 10 \;\to x^2 - x - 20 = 0 \;\to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2}$$

Las dos soluciones son $x = 5$ y $x = -4$, pero descartamos $x = -4$ por ser negativa.

e) Verdadero, por definición de suceso contrario o complementario.

48 **Una caja contiene cuatro tarjetas marcadas con las letras A A A N. Se extraen dos tarjetas al azar y se colocan una al lado de la otra.**

a) ¿Cuántos resultados podemos obtener?

b) ¿Son equiprobables?

a) Podemos extraer tres resultados: AA, AN, NA

b) No son equiprobables:

P[AA] = P[A en la primera carta] · P[A en la segunda carta] = $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}$

P[NA] = P[N en la primera carta] · P[A en la segunda carta] = $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{4}$

P[AN] = P[A en la primera carta] · P[N en la segunda carta] = $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

49 **Si lanzas al aire 5 monedas, ¿qué es más probable, sacar 3 caras y 2 cruces o 1 cara y 4 cruces?**

Casos totales: $2^5 = 32$

Casos posibles de «3 caras y 2 cruces» son $C_{5,\,2} = 10$:

++CCC	+C+CC	+CC+C	+CCC+	CC++C
CCC++	CC+C+	C+CC+	C+C+C	C++CC

Casos posibles de «1 cara y 4 cruces» son $C_{5,\,1} = 5$:

+CCCC	C+CCC	CC+CC	CCC+C	CCCC+

Por tanto es más probable sacar 3 caras y dos cruces, P = 10/32, que 1 cara y 4 cruces,

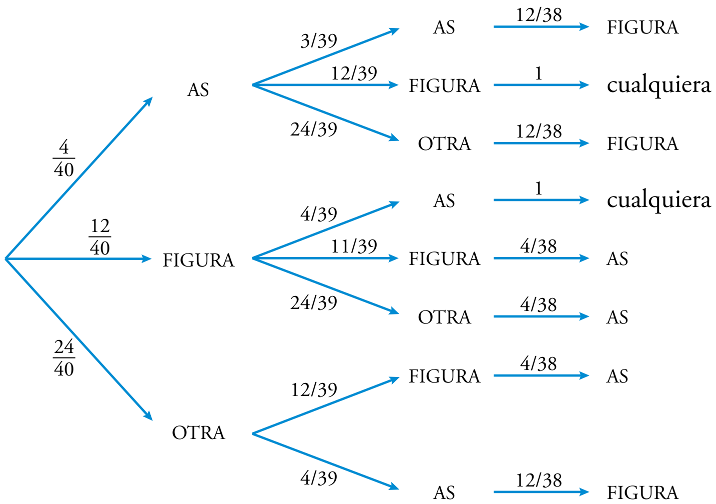
$P = \dfrac{5}{32}$.

Para profundizar

50 **a) Extraemos tres cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener algún AS y alguna FIGURAS?**

b) Extraemos dos cartas de una baraja de 40 cartas. ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna FIGURA y algún OROS? (*FIGURA de OROS vale como FIGURA y como OROS*).

a) Utilizando el siguiente diagrama,

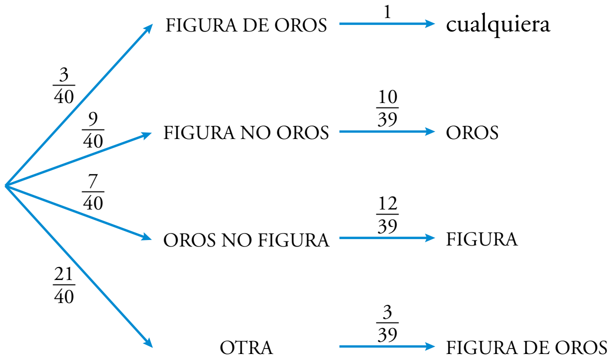


obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{4}{40}\cdot\frac{12}{39}\cdot 1+\frac{4}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{12}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot 1+\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{12}{40}\cdot\frac{24}{39}\cdot\frac{4}{38}+$$

$$+\frac{24}{40}\cdot\frac{12}{39}\cdot\frac{4}{38}+\frac{24}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{12}{38}\approx 0{,}12$$

b) Utilizando el siguiente diagrama.



obtenemos la probabilidad pedida:

$$\frac{3}{40}+\frac{9}{40}\cdot\frac{10}{39}+\frac{7}{40}\cdot\frac{12}{39}+\frac{21}{40}\cdot\frac{3}{39}=0{,}23$$

51 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda. Luego sacamos una bola de la segunda urna.**

a) ¿Qué probabilidad hay de obtener C en la segunda extracción?

b) Calcula: P[1.ª B y 2.ª B]; P[1.ª C y 2.ª B]

c) Calcula: P[1.ª A y 2.ª A]; P[1.ª B y 2.ª A];
P[1.ª C y 2.ª A] y, en consecuencia, P[2.ª A].

a) La única forma de sacar C en la segunda extracción es: sacar C en la primera extracción y sacar C en la segunda extracción. Si hemos sacado C en la primera extracción, la composición de la urna B es 3A, 1B, 1C.

P[C en la 2.ª extracción] =

= P[C en la 1.ª extracción] · P[C en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] = $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=0{,}04$

b) P[1.ª B y 2.ª B] = P[B en la 1.ª extracción] · P[B en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción] =

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=0{,}08$

P[1.ª C y 2.ª B] = P[C en la 1.ª extracción] · P[B en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] =

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=0{,}04$

c) P[1.ª A y 2.ª A] =

= P[A en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ A en la 1.ª extracción] = $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=0{,}48$

P[1.ª B y 2.ª A] = P[B en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ B en la 1.ª extracción] =

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=0{,}12$

P[1.ª C y 2.ª A] = P[C en la 1.ª extracción] · P[A en la 2.ª extracción/ C en la 1.ª extracción] =

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}=0{,}12$

P[2.ª A] = P[1.ª A y 2.ª A] + P[1.ª B y 2.ª A] + P[1.ª C y 2.ª A] = 0,48 + 0,12 + 0,12 = 0,72

52 **Extraemos una bola de la primera urna y la introducimos en la segunda urna. Luego sacamos una bola de la segunda.**

¿Cuál es la probabilidad de obtener A de la segunda urna?

Seguimos el mismo razonamiento que en el apartado c) anterior.

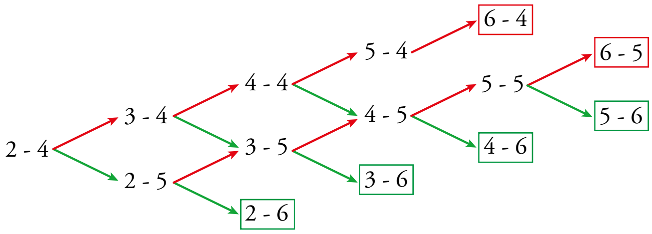
$P[2.ª\ \text{A}] = P[1.ª\ \text{A y } 2.ª\ \text{A}] + P[1.ª\ \text{B y } 2.ª\ \text{A}] + P[1.ª\ \text{C y } 2.ª\ \text{A}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = 0{,}36$

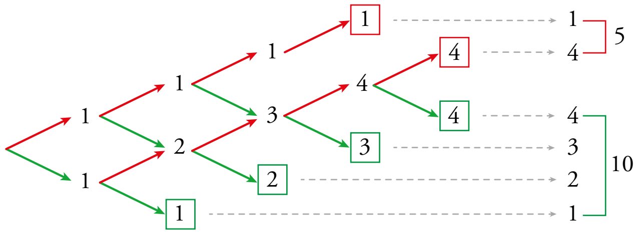
AUTOEVALUACIÓN

Página 371

1 **Antón y Berta están jugando un torneo de pimpón que ganará el primero que gane seis partidas. Berta va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa las posibles continuaciones.**

En rojo gana Antón. En verde gana Berta:





En total hay a 15 caminos. En 5 vecen Antón y en 10 vence Berta.

2 **Voy a hacer la maleta para un viaje y de las 6 camisetas que tengo, todas de colores diferentes, quiero elegir 4.**

a) ¿Cuántas elecciones distintas puedo hacer?

b) Si quiero llevarme la blanca y la negra, ¿cuántas posibilidades me quedan para las otras dos?

a) De $C_{6,\,4} = \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ formas diferentes.

b) Me quedarán $C_{4\,,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ posibilidades.

3 **a) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 3 y 7? Calcula su suma.**

b) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 3, 3, 3, 7, 7?

a) Se pueden formar $VR_{2,\,4} = 2^4 = 16$ números diferentes.

Veamos cuánto suman:

- Los números con todas sus cifras iguales son: 3 333, 7 777

  Suman 3 333 + 7777 = 11 110

- Hay cuatro números con tres 7 y un 3: 7773, 7737, 7 377, 3 777. Para encontrar su suma como solamente son 4 los podemos sumar directamente. Pero también sabemos que forman 4 filas de 4 columas, 3/4 partes de las cuales(3 filas) estan formadas por «7» y 1/4 de ellas (1 fila) está formada por «3»: $7 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 24$

  Por tanto su suma será: $24 \cdot 1\,111 = 26\,664$

- Hay cuatro números con tres 3 y un 7: 3 337, 3 373, 3 733, 7 333

  Análogamente, su suma es: $(3 \cdot 3 + 7 \cdot 1) \cdot 1\,111 = 16 \cdot 1\,111 = 17\,776$

- Hay seis números con dos 7 y dos 3: 7 733, 7 373, 7 337, 3 377, 3 737, 3 773

  Su suma es: $(3 \cdot 7 + 3 \cdot 3) \cdot 1\,111 = 20 \cdot 1\,111 = 33\,330$

La suma total es 11 110 + 26 664 + 17 776 + 33 330 = 88 800.

b) Números de cinco cifras con los dígitos 3, 3, 3, 7, 7 hay: $C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$

4 **¿De cuántas formas podemos elegir a los 3 representantes del comité de deportes, si se presentan 7 candidatos?**

No importa el orden y no pueden repetirse, por tanto, de $C_{7,\,3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$

Hay 35 formas de elegir a los 3 representantes.

5 **Con las letras de la palabra CLARA, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse que empiecen con la letra A?**

Fijamos la primera letra, será la A y vemos qué ocurre con las 4 letras restantes(CLRA).

Importa el orden, se usan todas las letras restantes, y no se repiten los elementos:

$P_4 = 4! = 24$

Podemos hacer 24 ordenaciones distintas.

6 **Calcula m en cada caso.**

a) $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!} = 30$ **b)** $\dbinom{m}{3} : \dbinom{m}{2} = 4$

a) $(m + 1) \cdot m = 30 \;\to\; m^2 + m = 30 \;\to\; m^2 + m - 30 = 0 \;\to\; m = -6,\ m = 5$

La solución negativa no sirve porque estamos trabajando con números combinatorios, por tanto, la solución es $m = 5$.

b) $\dfrac{\dfrac{m!}{3!(m-3)!}}{\dfrac{m!}{2!(m-2)!}} = 4 \;\to\; \dfrac{2!(m-2)!}{3!(m-3)!} = 4 \;\to\; m - 2 = 12 \;\to\; m = 14$

7 **Tiramos un dado. Si sale 5 o 6, extraemos una bola de la urna A y si no, de la B. Calcula las probabilidades indicadas.**

a) La probabilidad de obtener un 5 o un 6 y sacar bola roja.

b) La probabilidad de obtener 4 y bola verde.

a) Si sale 5 o 6 extraemos la bola de la urna A, luego la probabilidad de extraer bola roja en ambos casos es $\dfrac{3}{6}$.

$P[5 \text{ y ROJA}] + P[6 \text{ y ROJA}] = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{6} = 0{,}17$

b) Si sale 4 extraemos la bola de la urna B, luego la probabilidad de extraer bola verde en este caso es $\dfrac{3}{8}$.

$P[4 \text{ y VERDE}] = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{3}{8} = 0{,}0625$

8 **Loreto es saltadora de longitud, y en el 80 % de sus saltos consigue superar los 6 m. Sabiendo que en una competición tiene que saltar cuatro veces, halla la probabilidad de que:**

a) En todas supere los 6 m.

b) No los supere en ninguna.

c) Los supere en alguna de las cuatro veces.

$x \to$ número de veces que supera los 6 m.

x sigue una binomial $B(4;\ 0{,}8)$.

a) $P[x = 4] = \binom{4}{4}\, 0{,}8^4 = 0{,}41$

b) $P[x = 0] = \binom{4}{0}\, 0{,}2^4 = 0{,}0016$

c) $P[x \ge 2] = P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = \binom{4}{2}\, 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 + \binom{4}{3}\, 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 + \binom{4}{4}\, 0{,}8^4 = 0{,}97$

d) $x \to$ número de veces que supera los 6 m en los 3 saltos restantes.

x sigue una binomial $B(3;\, 0{,}8)$.

$P[x \ge 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - \binom{3}{0}\, 0{,}2^3 = 0{,}99$

9 **Tres cartas distintas van a ser enviadas a tres destinatarios diferentes cuyos nombres están escritos en los sobres. Si se introduce al azar una carta en cada sobre, calcula la probabilidad:**

a) de que las tres lleguen a su verdadero destinatario.

b) de que solo una llegue a su destinatario.

c) de que alguna llegue a su destinatario.

a) $P[\text{las 3 llegan}] = P[\text{llegue la primera}] \cdot P[\text{llegue la segunda}] \cdot P[\text{llegue la tercera}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{llega solo 1}] = P[\text{la correcta solo es la primera}] + P[\text{la correcta solo es la segunda}] + P[\text{la correcta es solo la tercera}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c) $P[\text{alguna llega}] = P[\text{llegan tres correctas}] + P[\text{llega 1 correcta}] = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$