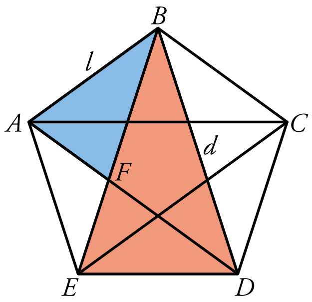
1 LOS NÚMEROS REALES

Página 33

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado de la derecha.

1 **Demuestra que los triángulos *ABF* y *EBD* son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).**

2 **Si llamamos *l* al lado del pentágono y *d* a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación *d/l* y comprueba que es el número áureo:**

$$\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo *EBD*. Por otra parte los triángulos *DAB* y *EBD* son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo *ABF*, y $\hat{D}$ en el triángulo *EBD* son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos *ABF* y *EBD*; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

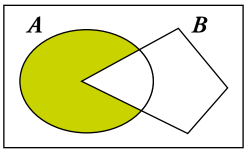
Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

Página 35

1 **¿Verdadero o falso?**



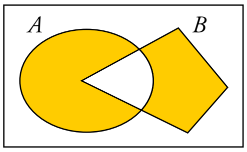
a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:



$(A - B) \cup (B - A)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A \cup B) - (A \cap B)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ **y** $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ **es el conjunto de los múltiplos de** n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ **es lo mismo que decir** $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ **y** $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero**

$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0{,}5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \ / -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(*x* es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ▶ NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

Página 37

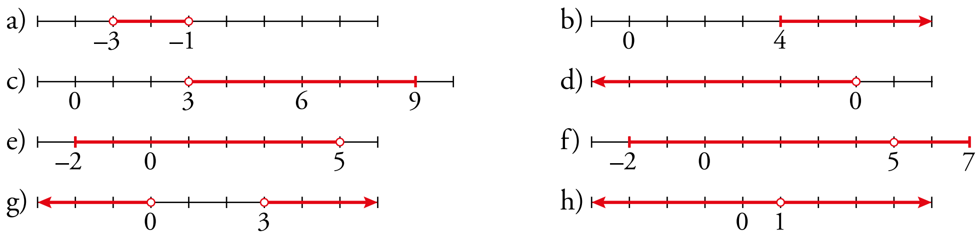
1 **Representa sobre la recta real estos conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 **Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.**

a) $|x| = 5$ **b)** $|x - 4| \le 2$ **c)** $|x| \le 5$

d) $|x - 4| > 2$ **e)** $|x - 4| = 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

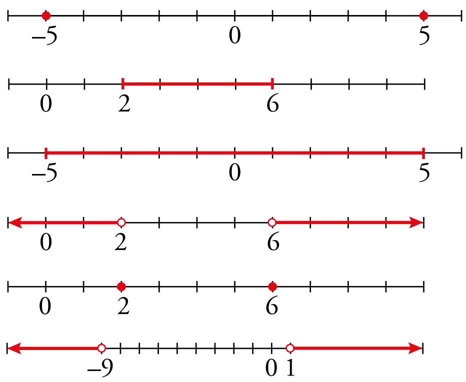
b) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

c) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

e) 6 y 2

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 LOGARITMOS

Página 38

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0{,}25$

c) $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0{,}1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$

g) $\log_7 7$ **h)** $\log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)$

i) $\log_5 0{,}04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ b) $\log_2 0{,}25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$ d) $\log_{10} 0{,}1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$ f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\log_7 7 = 1$ h) $\log_\pi \frac{1}{\pi} = \log_\pi \pi^{-1} = -1$

i) $\log_5 0{,}04 = \log_5 5^{-2} = -2$ j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$ **b)** $\log_5 700$

c) $\log_{10} 43\,000$ **d)** $\log_{10} 0{,}084$

e) $\log_9 60$ **f)** $\log_7 14$

g) $\log_{20} 450\,000$ **h)** $\log_{5,4} 900$

i) $\log_2 3$ **j)** $\log_5 0{,}1$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-1} = 0{,}1$; $0{,}01 < 0{,}084 < 0{,}1$

$-2 < \log_{10} 0{,}084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0{,}084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.

Con la calculadora: $\log_7 14 = 1{,}3562$)

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4{,}0337$

$5{,}4^4 = 850{,}31$; $5{,}4^5 = 4\,591{,}7$

Como $5{,}4^4 = 850{,}31 < 900 < 4\,591{,}7 = 5{,}4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

i) $log_2\, 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $log_2\, 3 = 1{,}58496$

j) $log_5\, 0{,}1$ es un número decimal entre –1 y –2 ya que $5^{-1} = 0{,}2$ y $5^{-2} = 0{,}04$.

Con la calculadora: $log_5\, 0{,}1 = -1{,}4307$

Página 39

3 Si $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula.

a) $log_5\, 125AB^2$ **b)** $log_5 \dfrac{A}{25}$ **c)** $log_5 \dfrac{25A}{B}$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **e)** $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ **f)** $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $log_5\, 125AB^2 = log_5\, 125 + log_5 A + log_5 B^2 = 3 + 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$

b) $log_5 \dfrac{A}{25} = log_5 A - log_5 25 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

c) $log_5 \dfrac{25A}{B} = log_5 25A - log_5 B = log_5 25 + log_5 A - 2{,}4 = 2 + 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}2$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\, log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

e) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\, log_5 A - 2\, log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

f) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \dfrac{1}{3}\, log_5 \dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \dfrac{1}{3}\left(log_5 \sqrt[3]{A^4} - log_5 (5B)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3} log_5 A - 2\, log_5 5B\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}8 - 2\,(log_5 5 + log_5 B)\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3} - 2\,(1 + 2{,}4)\right] = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7{,}2 - 3 \cdot 6{,}8}{3}\right) = \dfrac{-13{,}2}{9}$

Página 40

4 Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$ln\, y = 2x - ln\, 5$

$ln\, y = 2x - ln\, 5 \;\rightarrow\; ln\, y = ln\, e^{2x} - ln\, 5$

$ln\, y = ln \dfrac{e^{2x}}{5} \;\rightarrow\; y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con ayuda de la tecla ln de la calculadora:

a) $log_2\, 1\,500$ **b)** $log_5\, 200$

c) $log_{100}\, 200$ **d)** $log_{100}\, 40$

Para los ejercicios con calculadora, las explicaciones del libro han tomado como referencia el modelo fx-991spx II Iberia de Casio.

a) $\dfrac{log\, 1500}{log\, 2} = 10{,}55;\; 2^{10{,}55} \approx 1\,500$ b) $\dfrac{log\, 200}{log\, 5} = 3{,}29;\; 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{log\, 200}{log\, 100} = 1{,}15;\; 100^{1{,}15} \approx 200$ d) $\dfrac{log\, 40}{log\, 100} = 0{,}80;\; 100^{0{,}80} \approx 40$

6 **Si $log\, A = 1{,}45$; $log\, B = 2{,}3$ y $log\, C = 0{,}52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:**

a) $log\, \frac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $log\, \frac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}$

c) $log \left(\frac{A}{10} \sqrt[5]{\frac{B^2}{0{,}001C}} \right)$

d) $log\, \frac{A \cdot \sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2}$

e) $log \left(10 \cdot \sqrt[3]{\frac{0{,}1A^2}{10B}} \right)$

f) $\frac{1}{2} log \left(\frac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2} \right)^2$

a) $log \frac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = log\, AB^2 - log \sqrt[3]{C} = log\, A + log\, B^2 - \frac{1}{3} log\, C = 1{,}45 + 2 \cdot 2{,}3 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}52 = 5{,}87\widehat{6}$

b) $log \frac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}} = log\, 100A - \left(log\, B^2 + \frac{1}{3} log\, 10C^4 \right) = log\, 100 + log\, A - 2\, log\, B - \frac{1}{3}(log\, 10 + log\, C^4) =$

$= 2 + 1{,}45 - 2 \cdot 2{,}3 - \frac{1}{3}(1 + 4 \cdot log\, C) = -1{,}15 - \frac{1}{3}(1 + 2{,}8) = -2{,}17\widehat{6}$

c) $log \left(\frac{A}{10} \sqrt[5]{\frac{B^2}{0{,}001C}} \right) = log \frac{A}{10} + log \left(\sqrt[5]{\frac{B^2}{0{,}001C}} \right) = log\, A - log\, 10 + \frac{1}{5}(2\, log\, B - log\; 0{,}001C) =$

$= 1{,}45 - 1 + \frac{1}{5}\left[2 \cdot 2{,}3 - (log\, 0{,}001 + log\, C) \right] = 0{,}45 + \frac{1}{5}\left[4{,}6 - (log\, 10^{-3} + 0{,}52) \right] =$

$= 0{,}45 + \frac{1}{5}(4{,}6 + 3 - 0{,}52) = 1{,}866$

d) $log \frac{A\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2} = log\, A + log \sqrt[3]{0{,}1C^4} - log\left[(1\,000B)^2 \right] = 1{,}45 + \frac{1}{3} log\, 0{,}1C^4 - 2\left(log\, 1\,000 + log\, B \right) =$

$= 1{,}45 + \frac{1}{3}(log\, 0{,}1 + 4\, log\, C) - 2\,(3 + 2{,}3) = 1{,}45 + \frac{1}{3}(-1 + 4 \cdot 0{,}52) - 2\,(3 + 2{,}3) = -8{,}79$

e) $log\, 10 \sqrt[3]{\frac{0{,}1A^2}{10B}} = log\, 10 + \frac{1}{3}(log\, 0{,}1A^2 - log\, 10B) = 1 + \frac{1}{3}(log\, 0{,}1 + 2\, log\, A - log\, 10 - log\, B) =$

$= 1 + \frac{1}{3}(-1 + 2 \cdot 1{,}45 - 1 - 2{,}3) = 0{,}5\widehat{3}$

f) $\frac{1}{2} log \left(\frac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2} \right)^2 = log \sqrt[3]{C^4} - log\,[(100A)^2] = \frac{4}{3} log\, C - 2\left(log\, 100 + log\, A \right) = \frac{4}{3} \cdot 0{,}52 - 2\,(2 + 1{,}45) =$

$= -6{,}20\widehat{6}$

4 EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

Página 42

1 ¿Verdadero o falso?

a) El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

b) El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En a) el error absoluto es mucho mayor que en b), pero el error relativo es menor.

a) E.R. $< \frac{10000}{390000} = 2,5641 \cdot 10^{-2} = 0,025641 \to$ E.R. $< 2,6\,\%$

b) E.R. $< \frac{1}{12} = 8,3333 \cdot 10^{-2} = 0,08333 \to$ E.R. $< 8,3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en a) que en b). Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 25 000 € al año.

a) E.A. $< 0,05$ m^2; E.R. $< \frac{0,05}{96,4} = 5,1867 \cdot 10^{-4} = 0,00051867 \to$ E.R. $< 0,05\,\%$

b) E.A. $< 0,5$ millones de horas $= 500\,000$ horas

E.R. $< \frac{0,5}{37} < 0,014 \to 1,4\,\%$

c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

E.A. $< 0,5$ miles de € $= 500$ €; E.R. $< \frac{0,5}{25} < 0,02 \to 2\,\%$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

E.A. $< 0,5$ €; E.R. $< \frac{0,5}{25\,000} < 0,00002 \to 0,002\,\%$

Página 43

3 Calcula en notación científica sin usar la calculadora.

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6}$

4 Opera con la calculadora:

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$

5 CONCEPTO DE SUCESIÓN

Página 45

1 **Obtén los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:**

$a_n = n^2 + 2n$ $\qquad b_n = (-1)^{n+1} n^2$

$c_n = (-1)^n (2n + 1)$ $\qquad d_n = (-2)^n$

$e_1 = 3, \ e_2 = -1, e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1}$

$f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ $\qquad g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$

$h_n = n! - (n-1)!$ $\qquad i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$a_n = n^2 + 2n \ \to \ a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3, \ a_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8, \ a_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15,$
$a_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24, \ a_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35, \ a_6 = 6^2 + 2 \cdot 6 = 48$

$b_n = (-1)^{n+1} n^2 \ \to \ b_1 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1, \ b_2 = (-1)^{1+2} \cdot 2^2 = -4, \ b_3 = (-1)^{1+3} \cdot 3^2 = 9,$
$b_4 = (-1)^{1+4} \cdot 4^2 = -16, \ b_5 = (-1)^{1+5} \cdot 5^2 = 25, \ b_6 = (-1)^{1+6} \cdot 6^2 = -36$

$c_n = (-1)^n(2n+1) \ \to \ c_1 = (-1)^1(2 \cdot 1 + 1) = -3, \ c_2 = (-1)^2(2 \cdot 2 + 1) = 5, \ c_3 = (-1)^3(2 \cdot 3 + 1) = -7,$
$c_4 = (-1)^4(2 \cdot 4 + 1) = 9, \ c_5 = (-1)^5(2 \cdot 5 + 1) = -11, \ c_6 = (-1)^6(2 \cdot 6 + 1) = 13$

$d_n = (-2)^n \ \to \ d_1 = (-2)^1 = -2, \ d_2 = (-2)^2 = 4, \ d_3 = (-2)^3 = -8,$
$d_4 = (-2)^4 = 16, \ d_5 = (-2)^5 = -32, \ d_6 = (-2)^6 = 64$

$e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1} \ \to \ e_1 = 3, \ e_2 = -1, \ e_3 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1, \ e_4 = -1 + 2 \cdot 1 = 1, \ e_5 = 1 + 2 \cdot 1 = 3,$
$e_6 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \ \to \ f_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1, \ f_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}, \ f_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5},$$
$$f_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}, \ f_5 = \frac{(-1)^5}{2 \cdot 5 - 1} = -\frac{1}{9}, \ f_6 = \frac{(-1)^6}{2 \cdot 6 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$g_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n} \ \to \ g_1 = \frac{1^2+1}{1^2+2 \cdot 1} = \frac{2}{3}, \ g_2 = \frac{2^2+1}{2^2+2 \cdot 2} = \frac{5}{8}, \ g_3 = \frac{3^2+1}{3^2+2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$
$$g_4 = \frac{4^2+1}{4^2+2 \cdot 4} = \frac{17}{24}, \ g_5 = \frac{5^2+1}{5^2+2 \cdot 5} = \frac{26}{35}, \ g_6 = \frac{6^2+1}{6^2+2 \cdot 6} = \frac{37}{48}$$

$h_n = n! - (n-1)! \ \to \ h_1 = 1! - (1-1)! = 0, \ h_2 = 2! - (2-1)! = 1, \ h_3 = 3! - (3-1)! = 4,$
$h_4 = 4! - (4-1)! = 18, \ h_5 = 5! - (5-1)! = 96, \ h_6 = 6! - (6-1)! = 600$

$$i_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \to \ i_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2, \ i_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \ i_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27},$$
$$i_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}, \ i_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125}, \ i_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656}$$

2 **Da el término general o el criterio de recurrencia (o ambas cosas) de las siguientes sucesiones:**

a) **3, 8, 13, 18, 23, …** $\qquad$ **b)** **1, 8, 27, 64, 125, …**

c) **0, 3, 8, 15, 24, …** $\qquad$ **d)** **1, –3, 5, –7, 9, …**

e) **1, –2, 6, –24, 120, …** $\qquad$ **f)** **1, 4, 8, 11, 22, 25, …**

g) $\dfrac{2}{4}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{8}{16}, \dfrac{11}{25}, \dfrac{14}{36}, \dots$ $\qquad$ **h)** $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots$

i) **1, 3, 4, 7, 11, 18, …** $\qquad$ **j)** $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, -\dfrac{1}{6}, \dots$

a) Cada término es 5 unidades mayor que el término anterior de la sucesión. $a_n = 5n - 2$

Por recurrencia: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa en la sucesión. $b_n = n^3$

c) Cada término es una unidad menor que el cuadrado del lugar que ocupa. $c_n = n^2 - 1$

d) Son los números impares con los signos + y – alternativamente. $d_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$

e) Son los números factoriales con los signos + y – alternativamente. $e_n = (-1)^{n+1}n!$

Por recurrencia: $e_1 = 1$, $e_n = e_{n-1} \cdot (-n)$.

f) El primer término impar es 1 y los demás términos impares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

El primer término par es 4 y los demás términos pares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

$f_1 = 1$, $f_2 = 4$. Para $n > 1$ impar, $f_n = f_1 + 7(n - 2)$. Para $n > 2$ par, $f_n = f_2 + 7(n - 3)$.

g) Cada numerador es 3 unidades mayor que el numerador anterior. Cada denominador es el cuadrado del número natural siguiente al lugar que ocupa. $g_n = \dfrac{3n-1}{(n+1)^2}$

h) Los denominadores son los números naturales. Cada numerador es una unidad inferior a su denominador. $h_n = \dfrac{n-1}{n}$

i) Por recurrencia: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_n = i_{n-1} + i_{n-2}$.

j) Son los inversos de los números naturales con los signos + y – alternativamente. $j_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

6 ALGUNAS SUCESIONES ESPECIALMENTE INTERESANTES

Página 47

1 En las siguientes sucesiones identifica las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Añade dos términos y escribe su término general:

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, …

d) 1, 3, 9, 27, 81, …

e) 5, –5, 5, –5, 5, …

f) 10, 7, 4, 1, –2, …

g) 100; 50; 25; 12,5; …

h) 12, 12, 12, 12, …

i) 3, –5, 7, –9, 11, …

j) 2 840; 284; 28,4; …

k) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

l) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; …

a) Progresión aritmética en la que $a_1 = 3$ y $d = 4$.

$a_6 = 23$, $a_7 = 27$. Término general: $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión.

$b_7 = 24$, $b_8 = 31$. Término general: $b_n = 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

c) Progresión geométrica en la que $c_1 = 3$ y $r = 2$.

$c_6 = 96$, $c_7 = 192$. Término general: $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) Progresión geométrica en la que $d_1 = 1$ y $r = 3$.

$d_6 = 243$, $d_7 = 729$. Término general: $d_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

e) Progresión geométrica en la que $e_1 = 5$ y $r = -1$.

$e_6 = -5$, $e_7 = 5$. Término general: $e_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

f) Progresión aritmética en la que $f_1 = 10$ y $d = -3$.

$f_6 = -5$, $f_7 = -8$. Término general: $f_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 13$

g) Progresión geométrica en la que $g_1 = 100$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$g_5 = 6{,}25$, $g_6 = 3{,}125$. Término general: $g_n = 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

h) Es a la vez una progresión aritmética de diferencia $d = 0$ y una progresión geométrica de razón $r = 1$.

$h_5 = 12$, $h_6 = 12$. Término general: $h_n = 12$

i) No es una progresión.

$i_6 = -13$, $i_7 = 15$. Término general: $i_n = (-1)^{n+1}(2n + 1)$

j) Progresión geométrica en la que $j_1 = 2\,840$ y $r = \dfrac{1}{10}$.

$j_4 = 2{,}84$, $j_5 = 0{,}284$. Término general: $j_n = 2\,840 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

k) Progresión geométrica en la que $k_1 = 90$ y $r = -\dfrac{1}{3}$.

$k_6 = \dfrac{-10}{27}$, $k_7 = \dfrac{10}{81}$. Término general: $k_n = 90 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

l) Progresión aritmética en la que $l_1 = 17{,}4$ y $d = -1{,}6$.

$l_5 = 11$, $l_6 = 10{,}4$. Término general: $l_n = 17{,}4 + (n - 1) \cdot (-1{,}6) = -1{,}6n + 19$

2 En 1a) halla S_{20}.

$a_{20} = 4 \cdot 20 - 1 = 79$; $S_{20} = \dfrac{(3+79)\cdot 20}{2} = 820$

3 **En 1f) halla S_{15}.**

$f_{15} = -3 \cdot 15 + 13 = -32;\ S_{15} = \dfrac{(10+(-32))\cdot 15}{2} = -165$

4 **En 1d) halla S_{10}.**

$d_{10} = 3^9 = 19\,683;\ S_{10} = \dfrac{19\,683\cdot 3 - 1}{3-1} = 29\,524$

5 **En 1k) halla S_{10}.**

$$k_{10} = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{10}{2187};\ S_{10} = \frac{-\dfrac{10}{2187}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 90}{-\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{147\,620}{2187}$$

6 **¿En cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 puedes hallar la suma de los infinitos términos? Hazlo.**

En las de los apartados g), j) y k) porque las razones son, en valor absoluto, menores que 1.

En el caso del apartado g), $S_\infty = \dfrac{100}{1-\dfrac{1}{2}} = 200$.

En el caso del apartado j), $S_\infty = \dfrac{2\,840}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{28\,400}{9}$.

En el caso del apartado k), $S_\infty = \dfrac{90}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{135}{2}$.

7 **Calcula.**

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3$

a) $\dfrac{30\cdot(30+1)\cdot(60+1)}{6} = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} = 9\,455$

b) $\dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 14\,400$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 19^2) = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} - \dfrac{19\cdot 20\cdot 39}{6} = 6985$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3) = \dfrac{30^2\cdot 31^2}{4} - \dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 201825$

8 **Calcula.**

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$

Ten en cuenta que, por ejemplo, $6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 8 \cdot 3^3$ y que $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3$.

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$

$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$

$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) = 8 \cdot \dfrac{10^2\cdot 11^2}{4} = 8\cdot 3025 = 24\,200$

Página 48

9 **Calcula el 6.º término de la sucesión de Fibonacci, $f_6 = 8$, aplicando la fórmula.**

$$f_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5})\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 8\sqrt{5} = 8$$

10 **Observa que como $\phi^{-n} < 1$, para valores «grandes» de n, el número ϕ^{-n} es «muy pequeño». Por tanto, podemos hallar los términos avanzados de la sucesión de Fibonacci, de forma aproximada, prescindiendo del sustraendo:**

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi^{-n}) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$$

Por ejemplo, para calcular $f_{13} = 233$ procederíamos así: $f_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{13}$. Hazlo y comprueba que el error cometido es menor que 0,001. Calcula de este modo f_{20}.

Calculamos f_{13} mediante la fórmula:

$\phi^{13} \approx 521{,}0019193787$; $\phi^{-13} \approx 0{,}0019193787$:

$$f_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{13} - \phi^{-13}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(521{,}0019 - 0{,}0019) = \frac{521}{\sqrt{5}} \approx 232{,}99828325$$

Pero también:

$$f_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13} \approx 232{,}99914162$$

$E = 232{,}99914162 - 232 = 0{,}99828325 = 0{,}0008537 < 0{,}001$

$$f_{20} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

11 **La *sucesión de Lucas* también tiene relación con el mundo vegetal. Se define así:**

$l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_n = l_{n-2} + l_{n-1}$

Como ves, es muy parecida a la de Fibonacci.

a) Halla sus 11 primeros términos.

b) $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l_{n+2} - 3$. Compruébalo para $n = 6$.

c) Esta sucesión se relaciona con la de Fibonacci así:

$$f_n = \frac{l_{n-1} + l_{n+1}}{5}$$

Compruébalo hallando los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci a partir de la de Lucas.

a) $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$, $l_4 = 7$, $l_5 = 11$, $l_6 = 18$, $l_7 = 29$, $l_8 = 47$, $l_9 = 76$, $l_{10} = 123$, $l_{11} = 199$

b) $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 = 44$

$47 - 3 = 44$

c) $f_2 = \frac{l_1 + l_3}{5} = \frac{1+4}{5} = 1$, $f_3 = \frac{3+7}{5} = 2$, $f_4 = \frac{4+11}{5} = 3$, $f_5 = \frac{7+18}{5} = 5$, $f_6 = \frac{11+29}{5} = 8$,

$f_7 = \frac{18+47}{5} = 13$, $f_8 = \frac{29+76}{5} = 21$, $f_9 = \frac{47+123}{5} = 34$, $f_{10} = \frac{76+199}{5} = 55$

Página 49

12 **a) Calcula $\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}$ y comprueba que «se parece mucho» a $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Haz lo mismo con $\left(1-\frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000}$.**

¿Podemos suponer que $\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$?

b) Calcula $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$ y comprueba que es aproximadamente igual a e^{-1}.

¿Podemos suponer también que la sucesión $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ tiende a e^{-1}?

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

$a_{80}=\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}=\left(\frac{79}{80}\right)^{80}\approx 0{,}36557$

$a_{1\,000}=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1\,000}=\left(\frac{999}{1000}\right)^{1\,000}\approx 0{,}36770$

$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}36788$

Observamos que los resultados se acercan cada vez más a $\frac{1}{e}$.

Comprobándolo con algún término más avanzado, sí podríamos suponerlo.

b) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{16\,481}{44\,800}\approx 0{,}3678795$

Sí podemos suponerlo. Además, esta sucesión se acerca mucho más rápido a $\frac{1}{e}$ que la del apartado a), puesto que el término décimo de la sucesión ya es casi $\frac{1}{e}$.

13 **Teniendo en cuenta que el término general de la sucesión de Fibonacci para n «grande» es $f_n=\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$, demuestra que $\lim \frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.**

Para n «grande», $\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\,\phi^{n+1}}{\sqrt{5}\,\phi^n}=\phi$, luego $\lim \frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 50

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

- **¿Para qué valores de x se verifica $|3x - 7| < 5$?**

Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

$3x - 7 < 5 \;\to\; x < 4$

$3x - 7 > -5;\; 3x > -2 \;\to\; x > \dfrac{2}{3}$

Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, 4\right)$.

2. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\boldsymbol{\log_7 x = -2}$

b) $\boldsymbol{\ln 3^{x-1} = 5}$

c) $\boldsymbol{2 \log x - \log 4 = 2 \log 3}$

a) $\log_7 x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: –2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x:

$x = 7^{-2};\; x = \dfrac{1}{49}$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n\log_a m$.

$(x-1)\ln 3 = 5 \;\to\; x - 1 = \dfrac{5}{\ln 3} \;\to\; x = \dfrac{5}{\ln 3} + 1 \;\to\; x = 5{,}5512$

c) $2\log x - \log 4 = 2\log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$

$\log \dfrac{x^2}{4} = \log 9;\; \dfrac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6,\; x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

3. Logaritmos. Demostración de propiedades

Hazlo tú

- **Demuestra:** $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

Llamamos $\log_a P = x$; $\log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostración:

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a P - \log_a Q$$

Página 51

5. Suma de infinitos términos de una progresión geométrica

Hazlo tú

- **La suma de los términos de una progresión geométrica, $a_1 + a_2 + + a_3 + \ldots$, con $r < 1$ es 4.**

  La suma de los términos de lugar impar, $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$, es $\frac{8}{3}$.

  Calcula a_1 y r.

Como nos dice el enunciado:

$S = 4$; $S_{\text{impar}} = \frac{8}{3}$; $r < 1$

Sabemos que por ser progresión geométrica, la suma también es igual a $S = \frac{a_1}{1-r} = 4^{(*)}$.

Además, los términos impares forman una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y su razón es r^2. Por tanto:

$$S_{\text{impar}} = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{8}{3}^{(**)}$$

Dividiendo (*) entre (**):

$$\frac{a_1}{1-r} : \frac{a_1}{1-r^2} = 4 : \left(\frac{8}{3}\right) \to \frac{a_1(1-r^2)}{a_1(1-r)} = \frac{4 \cdot 3}{8} \to \frac{a_1(1-r)(1+r)}{a_1(1-r)} = \frac{3}{2} \to 1 + r = \frac{3}{2} \to r = \frac{1}{2}$$

Volviendo a (*):

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1/2} = 4 \to a_1 = 2$$

6. Dos progresiones aritméticas

Hazlo tú

- **Escribe en función de S la suma, S_{IMPAR}, de los diez primeros términos de lugar impar de la progresión aritmética anterior.**

$S_{\text{impar}} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{19}$

$S_{\text{par}} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{20}$

$a_n = a_{n-1} + 5$

Así: $S_{\text{par}} = (a_1 + 5) + (a_3 + 5) + \ldots + (a_{17} + 5) + (a_{19} + 5) = S_{\text{IMPAR}} + 50$

Y sabemos que $S = S_{\text{IMPAR}} + S_{\text{PAR}} \to S = S_{\text{IMPAR}} + 50 + S_{\text{IMPAR}} \to S_{\text{IMPAR}} = \frac{S}{2} - \frac{50}{2} = \frac{S}{2} - 25$.

Página 52

7. Los cuadrados van a contracorriente

Hazlo tú

- **Halla la suma:**

$-1 + 2 + \ldots + 7 - 8 + 9 + \ldots + 26 - 27 + 28 + \ldots + 63 - 64 + 65 + \ldots + 999 - 1\,000$

(suma de los 1 000 primeros naturales pero con los cubos perfectos con signo menos).

Calculamos la suma de los mil primeros números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética.

$$S_{1\,000} = \frac{(1+1000)\cdot 1000}{2} = 500\,500$$

Ahora debemos restar dos veces la suma de los primeros 10 cubos perfectos:

$$Sc_{10} = 1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3 = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 3025$$

Por tanto, la suma pedida es $S_{1\,000} - 2 \cdot Sc_{10} = 500\,500 - 2 \cdot 3\,025 = 494\,450$.

8. Término general

Hazlo tú

- **Halla el término general de estas sucesiones:**

a) $\frac{2}{-1}, \frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \ldots$

b) 5,23; 5,2323; 5,232323; …

c) $\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \ldots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica.

Los numeradores son una unidad mayor que los cuadrados perfectos.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 2$.

$$a_n = \frac{n^2+1}{-1+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2+1}{2n-3}$$

b) Podemos escribir así los términos de la sucesión:

$$b_1 = 5 + \frac{23}{100},\quad b_2 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000},\quad b_3 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000}$$

Luego $b_n = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \ldots + \frac{23}{100^n} = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^n}\right) =$

$$= 5 + 23 \cdot \left(\frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{100^n}}{100 - 1}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{99 \cdot 100^n}\right) = 5 + \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}$$

c) Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-3}{5}$.

$$c_n = \frac{7}{5} + (n-1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10-3n}{5}$$

9. Sucesiones de potencias de ϕ

Hazlo tú

- **Demuestra que $\phi^5 = 3 + 5\phi$. Escribe de forma análoga ϕ^6 y ϕ^7.**

$\phi^5 = \phi^4 \cdot \phi = (2 + 3\phi)\phi = 2\phi + 3\phi^2 = 2\phi + 3(1 + \phi) = 3 + 5\phi$

$\phi^6 = \phi^5 \cdot \phi = (3 + 5\phi)\phi = 3\phi + 5\phi^2 = 3\phi + 5(1 + \phi) = 5 + 8\phi$

$\phi^7 = \phi^6 \cdot \phi = (5 + 8\phi)\phi = 5\phi + 8\phi^2 = 5\phi + 8(1 + \phi) = 8 + 13\phi$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 53

1. Notación científica

- **Calcular en notación científica sin usar la calculadora y expresar el resultado con tres cifras significativas.**

$$\mathbf{\frac{13{,}3\cdot 10^3 - 0{,}072\cdot 10^5}{0{,}85\cdot 10^{-3} - 3{,}2\cdot 10^{-4} - 4{,}5\cdot 10^{-5}}}$$

$$\frac{13{,}3\cdot 10^3 - 0{,}072\cdot 10^5}{0{,}85\cdot 10^{-3} - 3{,}2\cdot 10^{-4} - 4{,}5\cdot 10^{-5}} = \frac{10^3}{10^{-4}}\left(\frac{13{,}3-7{,}2}{8{,}5-3{,}2-0{,}45}\right) = 10^7\,\frac{6{,}1}{4{,}85} = 1{,}26\cdot 10^7$$

2. Propiedades de los logaritmos

- **Simplificar esta expresión y hallar su parte entera:** $\mathbf{\dfrac{1}{log_{1/3}\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{log_{1/5}\frac{1}{2}}}$

Usando la propiedad indicada transformamos las fracciones, y luego aplicamos la propiedad 4:

$$\frac{1}{log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}} + \frac{1}{log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}} = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right) = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15}$$

Como $log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$ y $log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} = 4$, la parte entera que buscamos es 3.

3. Intereses bancarios

- **Se hace un depósito de 5 000 € en un banco que paga un interés del 4 % anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8 000 €?**

- En n años el capital se multiplicará por $1{,}04^n$.
- $8\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}04^n \to \dfrac{8\,000}{5\,000} = 1{,}04^n \to 1{,}6 = 1{,}04^n \to$

$$\to log\,1{,}6 = n\cdot log\,1{,}04 \to n = \frac{log\,1{,}6}{log\,1{,}04} \approx 11{,}984$$

Por tanto, superará los 8 000 € a los 12 años.

4. Paso de decimal periódico a fracción

- **Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico $5{,}4\widehat{7}$ a fracción.**

- $5{,}477\ldots = 5{,}4 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$
- $a_1 = \dfrac{7}{100},\; a_2 = \dfrac{7}{1000},\; a_3 = \dfrac{7}{10\,000};\; r = \dfrac{1}{10};\; S_\infty = \dfrac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{7}{90}$
- $5{,}4 = \dfrac{54}{10} = \dfrac{27}{5}$
- $5{,}477\ldots = \dfrac{27}{5} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{493}{90}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 55

1. Notación científica

- **Calcular en notación científica sin usar la calculadora y expresar el resultado con tres cifras significativas.**

$$\frac{\mathbf{13{,}3 \cdot 10^3 - 0{,}072 \cdot 10^5}}{\mathbf{0{,}85 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-4} - 4{,}5 \cdot 10^{-5}}}$$

Dar una cota del error absoluto y del error relativo cometido.

$$\frac{13{,}3 \cdot 10^3 - 0{,}072 \cdot 10^5}{0{,}85 \cdot 10^{-3} - 3{,}2 \cdot 10^{-4} - 4{,}5 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^3}{10^{-4}}\left(\frac{13{,}3 - 7{,}2}{8{,}5 - 3{,}2 - 0{,}45}\right) = 10^7\,\frac{6{,}1}{4{,}85} = 1{,}26 \cdot 10^7$$

2. Propiedades de los logaritmos

- **Simplificar esta expresión y hallar su parte entera:** $\dfrac{1}{\log_{1/3}\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\log_{1/5}\frac{1}{2}}$

Usando la propiedad indicada transformamos las fracciones, y luego aplicamos la propiedad 4:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15}$$

Como $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$ y $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} = 4$, la parte entera que buscamos es 3.

3. Intereses bancarios

- **Se hace un depósito de 5 000 € en un banco que paga un interés del 4 % anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8 000 €?**

• En n años el capital se multiplicará por $1{,}04^n$.

• $8\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}04^n \to \dfrac{8\,000}{5\,000} = 1{,}04^n \to 1{,}6 = 1{,}04^n \to$

$$\to \log 1{,}6 = n \cdot \log 1{,}04 \to n = \frac{\log 1{,}6}{\log 1{,}04} \approx 11{,}984$$

Por tanto, superará los 8 000 € a los 12 años.

4. Paso de decimal periódico a fracción

- **Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico $5{,}4\widehat{7}$ a fracción.**

• $5{,}477\ldots = 5{,}4 + 0{,}07 + 0{,}007 + 0{,}0007 + \ldots$

• $a_1 = \dfrac{7}{100}$, $a_2 = \dfrac{7}{1000}$, $a_3 = \dfrac{7}{10\,000}$; $r = \dfrac{1}{10}$; $S_\infty = \dfrac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{7}{90}$

• $5{,}4 = \dfrac{54}{10} = \dfrac{27}{5}$

• $5{,}477\ldots = \dfrac{27}{5} + \dfrac{7}{90} = \dfrac{493}{90}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 54

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen y si son irracionales:**

$$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}$$

$5,\ \sqrt{\dfrac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5,\ \sqrt{\dfrac{18}{2}},\ -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5;\ \sqrt{\dfrac{18}{2}};\ -7;\ \dfrac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5;\ \sqrt{\dfrac{18}{2}};\ -7;\ \dfrac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

Intervalos, semirrectas y valor absoluto

2 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) $x < 5$ **b)** $-5 < x < 1$ **c)** $-3 \geq x$

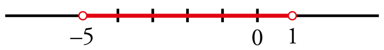
d) $-2 \leq x \leq 0$ **e)** $6 > x > -3$ **f)** $x > -2$

a) $x < 5$

$(-\infty, 5)$

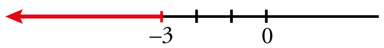
b) $-5 < x < 1$

$(-5, 1)$



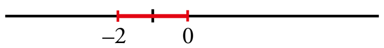
c) $-3 \geq x$

$(-\infty, -3]$



d) $-2 \leq x \leq 0$

$[-2, 0]$



e) $6 > x > -3$

$(-3, 6)$

f) $x > -2$

$(-2, +\infty)$

3 **Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) **[–2, 7]** **b)** **[13, +∞)** **c)** **(–∞, 0)**

d) **(–3, 0]** **e)** **[3/2, 6)** **f)** **(0, +∞)**

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

d) $-3 < x \le 0$ e) $\frac{3}{2} \le x < 6$ f) $x > 0$

4 **Expresa como un único intervalo.**

a) **$[-3, 2] \cap [0, 5]$** **b)** **$[2, +\infty) \cap (0, 10)$**

c) **$(1, 6] \cap [2, 7)$** **d)** **$[-1, 3) \cap (0, 4)$**

a) [0, 2] b) [2, 10)

c) [2, 6] d) (0, 3)

5 **Expresa en cada caso $A \cap B$ y $A \cup B$.**

a) **A =[–3, 6]** **B = (2, +∞)**

b) **A = [0; 2,5)** **B = (–∞, 4)**

c) **A = (–∞, –2)** **B = (–2, +∞)**

a) $A \cap B = (2, 6]$ $A \cup B = (-3, +\infty)$

b) $A \cup B = (-\infty, 4)$ $A \cup B = (-\infty; 2,5)$

c) $A \cap B = \varnothing$ $A \cup B = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

6 **Expresa estos conjuntos en forma de intervalo:**

a) **$|x| < 7$** **b)** **$|x| \ge 5$** **c)** **$|2x| < 8$**

d) **$|x - 1| \le 6$** **e)** **$|x + 2| > 9$** **f)** **$|x - 5| \ge 1$**

a) (–7, 7) b) [–∞, –5] ∪ [5, +∞] c) (–4, 4)

d) [–5, 7] e) $A \cup B = (-\infty, -11) \cup (7, +\infty)$ f) (–∞, 4] ∪ [6, +∞)

7 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ **f)** $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \ge 0 \ \Rightarrow\ x \ge 4;\ [4, +\infty)$

b) $2x + 1 \ge 0 \ \Rightarrow\ 2x \ge -1 \ \Rightarrow\ x \ge -\frac{1}{2};\ \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \ge 0 \ \Rightarrow\ x \le 0;\ (-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \ge 0 \ \Rightarrow\ 3 \ge 2x \ \Rightarrow\ x \le \frac{3}{2};\ \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \ge 0 \ \Rightarrow\ -1 \ge x;\ (-\infty, -1]$

f) $1 + \frac{x}{2} \ge 0 \ \Rightarrow\ 2 + x \ge 0 \ \Rightarrow\ x \ge -2;\ [-2, +\infty)$

Errores y notación científica

8 **Acota el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número áureo ϕ.**

E.A. = |1,618033… – 1,62| < 0,005

E.R. < 0,003/1,62 = 0,0019

9 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4})\, 8,3 \cdot 10^{8}}{4,32 \cdot 10^{3}}$

b) $\sqrt{\dfrac{(60\,000^{3} \cdot 0,00002^{4})}{100^{2} \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^{5}}}$

a) $1,41 \cdot 10^2$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $3,87$; E.A. $< 0,005$

E.R. $< \dfrac{0,005}{15} = \dfrac{0,001}{3} = 0,33 \cdot 10^{-2} = 0,0033$

Logaritmos

10 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $\log_2 1\,024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10} = 10$ b) $\log 10^{-3} = -3$ c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$ e) $\log_3 3^{1/2} = \dfrac{1}{2}$ f) $\ln e^{-1/3} = -\dfrac{1}{3}$

11 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \dfrac{1}{9} = -2$

c) $\log_x \dfrac{1}{4} = 2$ d) $\log_x 2 = \dfrac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \rightarrow x = 5$ b) $x^{-2} = \dfrac{1}{9} \rightarrow x = 3$

c) $x^2 = \dfrac{1}{4} \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ d) $x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$

12 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ b) $\log x^2 = -2$ c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ e) $\log_7 3x = 0,5$ f) $3^{2+x} = 172$

a) $x = \dfrac{2}{\log 3} = 4,19$ b) $2\log x = -2 \rightarrow x = \dfrac{1}{10}$ c) $x = \dfrac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\dfrac{\log 3}{\log 5} = -0,683$ e) $7^{0,5} = 3x \rightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \rightarrow x = \log_3 172 - 2$

13 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$ b) $\log \dfrac{k}{1\,000}$

c) $\log k^3$ d) $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \dfrac{1}{k}$ f) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$ b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$ d) $\dfrac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \dfrac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$ f) $\sqrt{x}$

14 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2}\log y$

b) $\log z = 1 - \frac{1}{2}(\log x - \log y)$

a) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}$; $\log z = \log \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$; $z = \dfrac{100}{x\sqrt{y}}$

b) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2}\log \dfrac{x}{y}$; $\log z = \log 10 - \log \sqrt{\dfrac{x}{y}}$; $\log z = \log \dfrac{10}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}}$; $z = \dfrac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

15 **Calcula x en cada caso.**

a) $35 = 21 \cdot 1{,}04^x$ **b)** $1{,}5 \cdot 10^{12} = 2^{-10x}$

c) $\log_x 0{,}3 = 2 - \log_x 2$ **d)** $\ln 5x + \ln \frac{x}{2} = 1$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$\dfrac{35}{21} = 1{,}04^x \to \dfrac{5}{3} = 1{,}04^x$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x, y luego sus propiedades:

$\log \dfrac{5}{3} = \log(1{,}04^x) = x \log 1{,}04 \to \dfrac{\log \dfrac{5}{3}}{\log 1{,}04} = x$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13{,}02$.

b) $\log 1{,}5 + \log 10^{12} = -10x \log 2 \to x = \dfrac{\log 1{,}5 + \log 10^{12}}{-10 \log 2} = 4{,}04$

c) $\log_x 0{,}3 + \log_x 2 = 2 \to \log_x (0{,}3 \cdot 2) = 2 \to \log_x 0{,}6 = 2 \to x^2 = 0{,}6 \to x = \sqrt{0{,}6} = 0{,}77$

d) $\ln \dfrac{5x^2}{2} = 1 \to e^1 = \dfrac{5x^2}{2} \to x = \sqrt{(2e)/5} = 1{,}04$

16 **Calcula la parte entera de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{1}{\log_{18} 20} + \dfrac{1}{\log_{25} 20}$ **b)** $\dfrac{1}{\log_{1/2} \frac{1}{3}} + \dfrac{1}{\log_{1/5} \frac{1}{3}}$

* ***Fíjate en el ejercicio guiado 2.***

a) $\dfrac{1}{\log_{18} 20} + \dfrac{1}{\log_{25} 20} = \log_{20} 18 + \log_{20} 25 = \log_{20} 450$

Dado que $20^2 = 400$, la parte entera es 2.

b) $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}} + \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}} = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{10}$

Dado que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$, la parte entera es 2

17 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $\log \sqrt{148}$ **b)** $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42{,}9$ **e)** $\log_5 1{,}95$ **f)** $\log_2 0{,}034$

a) $1{,}085 \to 10^{1{,}085} \approx 12{,}16 \approx \sqrt{148}$

b) $\ln (2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \to e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \to e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \to 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \to 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \to 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

18 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $\log \dfrac{a^2\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $\ln \dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $\log a^2\sqrt[5]{b^3} - \log 100c^4 = \log a^2 + \log\sqrt[5]{b^3} - \log 10^2 - \log c^4 = 2\log a + \dfrac{3}{5}\log b - 2 - 4\log c$

b) $\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}e^5}{\sqrt{y}} = \ln\sqrt[4]{x^3}e^5 - \ln\sqrt{y} = \ln\sqrt[4]{x^3} + \ln e^5 - \ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}\ln x + 5 - \dfrac{1}{2}\ln y$

Página 55

Criterio para formar sucesiones

19 **Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:**

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

d) $d_n = 2^{-n}$ **e)** $e_n = n!$ **f)** $f_n = \dfrac{(-1)^n\cdot n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2;\ a_2 = 3{,}02;\ a_3 = 3{,}002;\ a_4 = 3{,}0002;\ a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0;\ b_2 = \dfrac{3}{2};\ b_3 = \dfrac{8}{3};\ b_4 = \dfrac{15}{4};\ b_5 = \dfrac{24}{5}$

c) $c_1 = 1;\ c_2 = \dfrac{5}{3};\ c_3 = 2;\ c_4 = \dfrac{11}{5};\ c_5 = \dfrac{7}{3}$

d) $d_1 = \dfrac{1}{2};\ d_2 = \dfrac{1}{4};\ d_3 = \dfrac{1}{8};\ d_4 = \dfrac{1}{16};\ d_5 = \dfrac{1}{32}$

e) $e_1 = 1;\ e_2 = 2;\ e_3 = 6;\ e_4 = 24;\ e_5 = 120$

f) $f_1 = -1;\ f_2 = 0;\ f_3 = -3;\ f_4 = 0;\ f_5 = -5$

20 **Escribe el término general de estas sucesiones:**

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ **b)** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$

c) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{9}, \dfrac{16}{11}, \ldots$ **d)** $0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}, \ldots$

e) 2, 5, 10, 17, 26, … **f)** 1, 3, 6, 10, 15, …

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $b_n = \dfrac{1}{n}$

c) Los numeradores son cuadrados perfectos y los denominadores forman una progresión aritmética.

$c_n = \dfrac{n^2}{5+(n-1)\cdot 2} = \dfrac{n^2}{2n+3}$

d) $d_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

e) $e_n = n^2 + 1$

f) $f_1 = 1;\ f_2 = 1 + 2;\ f_3 = 1 + 2 + 3;\ f_4 = 1 + 2 + 3 + 4;\ \ldots;\ f_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

21 **Escribe los 8 primeros términos de estas dos sucesiones cuyas leyes de recurrencia son:**

a) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ **b)** $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{11}{8}, \dfrac{21}{16}, \dfrac{43}{32}, \ldots$ b) $1, 2, 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{128}, \ldots$

22 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones. Halla tres términos más de cada una.**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$ **b)** $2, 3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

$a_6 = -3;\ a_7 = 4;\ a_8 = 7$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

$b_6 = \dfrac{2}{3};\ b_7 = 2;\ b_8 = 3$

Progresiones aritméticas

23 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; … **b)** 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …

c) 1, 2, 4, 7, 11, … **d)** 14, 13, 11, 8, 4, …

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

24 **Di cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$ **b)** $b_n = 5n - 4$ **c)** $c_n = \dfrac{1}{n}$

d) $d_n = \dfrac{8-3n}{4}$ **e)** $e_n = 5 + \dfrac{n}{2}$ **f)** $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \dfrac{1}{3}, c_4 = \dfrac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \dfrac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \dfrac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \dfrac{8-3n}{4} - \dfrac{8-3(n-1)}{4} = \dfrac{8-3n-8+3n-3}{4} = \dfrac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \dfrac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \dfrac{n}{2} - \left(5 + \dfrac{n-1}{2}\right) = 5 + \dfrac{n}{2} - 5 - \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \dfrac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = 8,\ f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

25 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas y comprueba los resultados con la calculadora:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $c_n = 4n - 2$ **d)** $d_n = \dfrac{1-2n}{2}$

a) $a_1 = 3;\ a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3+75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5;\ b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5+2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2;\ c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d) $d_1 = \dfrac{-1}{2};\ d_{25} = \dfrac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

Progresiones geométricas

26 **De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y su término general.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d)** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_5 = 0{,}0001;\ c_6 = 0{,}00001;\ c_7 = 0{,}000001;\ c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-2} = 0{,}1^{n-2}$

c) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36,\ b_7 = 49,\ b_8 = 64,\ b_n = n^2$.

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8;\ d_7 = 8\sqrt{2};\ d_8 = 16;\ d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

27 **Calcula la suma de los 25 primeros términos de estas progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:**

a) $a_1 = 32,\ r = 1/2$ **b)** $a_1 = 10,\ r = 1/10$

c) $a_1 = 2^{-10},\ r = 2$ **d)** $a_1 = -5,\ r = -1/4$

Comprueba los primeros resultados con la calculadora.

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1},\quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $$S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{2} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9}$ $\qquad S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{10}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es menor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$ $\qquad S_\infty = \dfrac{-5}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

28 **Halla la suma de los términos a_{10} hasta a_{20}, ambos inclusive, de la progresión geométrica de $a_1 = 1/512$ y $r = -2$. Comprueba el resultado con la calculadora.**

$a_{10} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^9 = -1$

$a_{20} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^{19} = -1024$

La suma es $\dfrac{(-2) \cdot (-1024) - (-1)}{-2-1} = -683$.

Para comprobarlo con la calculadora, escribimos los términos de a_{10} hasta a_{20}:

–1, 2, –4, 8, –16, 32, –64, 128, –256, 512, –1 024

Si los sumamos vemos que nos da –683.

Suma de potencias

29 **Calcula.**

a) $\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2}$

b) $\mathbf{2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2}$

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2 = \dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42\,925$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) = 2^2\,\dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

30 **Calcula.**

$\mathbf{21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3}$

$21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 60^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3) =$

$= \dfrac{60^2 \cdot 61^2}{4} - \dfrac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 3\,304\,800$

31 **Comprueba con la calculadora los resultados de las dos actividades anteriores.**

En el ejercicio 29a) tecleamos SHIFT, x e introducimos los datos teniendo en cuenta que el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es x^2. El resultado es 42 925.

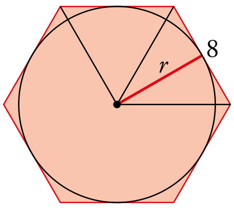
En el ejercicio 29b), el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es $(2x)^2$. El resultado es 171 700.

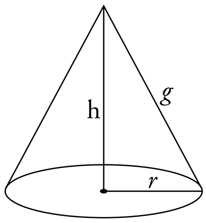
En el ejercicio 30, el primer término es 21, el último es 60 y la sucesión es x^3. El resultado es 3 304 800.

Para resolver

32 En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, $h = 12$ dm

La generatriz del cono es $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

La superficie lateral del cono es:

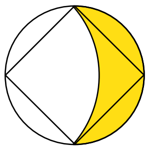
$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59$ dm^2

$A_{Lateral} = 301{,}6$ dm^2

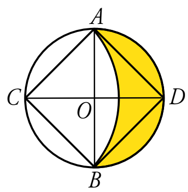
E.A. $< 0{,}05$ dm^2

E.R. $< \dfrac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equivale a un 0,02 %.

33 Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos r al radio de la circunferencia dibujada, D a su diámetro, O al centro de la circunferencia.



- Calculemos el diámetro, D, y el radio, r.

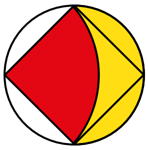
  Como el área del cuadrado $ABCD$ es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo ABC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Así $A_1 = \dfrac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

  $$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{D \cdot r}{2} = \frac{D \cdot \left(\dfrac{D}{2}\right)}{2} = \frac{D^2}{4}$$

  Entonces $\dfrac{D^2}{2} = 1$ y de aquí deducimos que $D = \sqrt{2}$ y $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es r: $A_2 = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

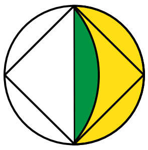
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



$A_3 = \pi r^2 = \pi$ (área de la circunferencia completa)

$A_4 = \dfrac{\pi}{4}$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

$A_6 = \dfrac{A_2}{2} - A_5 = \dfrac{\pi}{4} - \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

34 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. $< 5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. $< 5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. $< \dfrac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

35 **La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$.**

¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

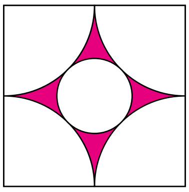
Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\dfrac{5}{2}$:

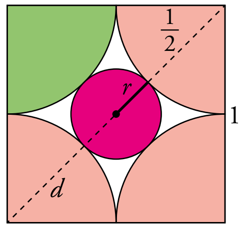
$$f(t) = 5e^{\frac{-t}{10}} = \frac{5}{2} \to e^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{2}$$

Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = ln\left(\frac{1}{2}\right) \to t = -10\,ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}93$$

36 **Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el resultado con números irracionales.**





El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.

Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{\text{VERDE}} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$$A_{\text{ROJA}} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$\text{Área pedida} = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right) = 1 - \pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \text{ u}^2$$

Página 56

37 **Calcula la suma de:**

a) Los números impares de tres cifras.

b) Los cuadrados de los números impares de tres cifras.

a) Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

b) Primero calcularemos:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$$

$$= \frac{999 \cdot 1\,000 \cdot 1\,999}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 332\,495\,150$$

Ahora bien:

$$101^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2) - (102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2)$$

Por otra parte:

$$102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2 = (2 \cdot 51)^2 + (2 \cdot 52)^2 + (2 \cdot 53)^2 + \ldots + (2 \cdot 499)^2 =$$

$$= 4 \cdot (51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2)$$

Y de la misma forma que al principio,

$$51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 499^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2) =$$

$$= \frac{499 \cdot 500 \cdot 999}{6} - \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 41\,498\,825$$

Finalmente,

$$101^2 + 103^2 + 105^2 + \ldots + 999^2 = 332\,495\,150 - 4 \cdot 41\,498\,825 = 166\,499\,850$$

38 **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35350$$

39 **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_k = 34$ y $S_k = 133$. Calcula k y a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \ \to \ 34 = a_1 + (k-1) \cdot 3 \\ S_k = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} \ \to \ 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot k}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3k - 3 \ \to \ a_1 = 37 - 3k$

$$133 = \frac{(37 - 3k + 34) \cdot k}{2} \ \to \ 266 = (71 - 3k)\, k$$

$266 = 71k - 3k^2 \ \to \ 3k^2 - 71k + 266 = 0$

$$k = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} k = 14/3 \text{ (no vale)} \\ k = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \ \to \ a_1 = -20$

40 **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728 a_1}{2} = 364 a_1 = 1\,456 \ \to \ a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$

41 **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \ \to \ a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{1/r}{1 - r} = \dfrac{1}{r - r^2} = 4 \ \to \ 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \ \to \ r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \ \to \ r = \frac{1}{2} \ \to \ a_1 = 2$$

42 **Sabemos que la suma de 138 números naturales consecutivos es 30 291. ¿Cuáles son el primero y el último?**

Supongamos que el primer término es k. Entonces el último será $k + 137$, luego:

$30\,291 = \dfrac{(k + k + 137) \cdot 138}{2} \ \to \ k = 151$ es el primer número natural y $k + 137 = 288$ es el último

43 **Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:**

a) $a_1 = 20$, $a_n = a_{n-1} + 4$

b) $b_1 = 7$, $b_2 = 13$, $b_n = b_{n-2} + 12$

c) $c_1 = 0{,}625$, $c_n = 2c_{n-1}$

d) $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_n = d_{n-2} \cdot \dfrac{9}{4}$

a) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $a_1 = 20$ y $d = 4$.

$a_{10} = 20 + 9 \cdot 4 = 56$; $a_{20} = 20 + 19 \cdot 4 = 96$

La suma es: $\dfrac{(56 + 96) \cdot 11}{2} = 836$

b) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $b_1 = 7$ y $d = 6$.

$b_{10} = 7 + 9 \cdot 6 = 61$; $b_{20} = 7 + 19 \cdot 6 = 121$

La suma es: $\dfrac{(61+121)\cdot 11}{2} = 1001$

c) En esta ocasión tenemos una progresión geométrica en la que $c_1 = 0{,}625$ y $r = 2$.

$c_{10} = 0{,}625 \cdot 2^9 = 320$; $c_{20} = 0{,}625 \cdot 2^{19} = 327\,680$

La suma es: $\dfrac{2 \cdot 327\,680 - 320}{2-1} = 655\,040$

d) Esta sucesión es una progresión geométrica en la que $d_1 = 4$ y $r = \dfrac{3}{2}$.

$d_{10} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^9 = \dfrac{19\,683}{128}$; $d_{20} = 4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{19} = \dfrac{1162\,261\,467}{131072}$

La suma es: $\dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1162\,261\,467}{131072} - \dfrac{19\,683}{128}}{\dfrac{3}{2} - 1} \approx 26\,294{,}5$

44 **Halla la suma de todos los términos a partir del décimo de esta sucesión: $a_1 = 6\,144$, $a_2 = 3\,072$, $a_n = \dfrac{1}{4}\,a_{n-2}$**

La sucesión dada es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, se puede calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión.

$a_{10} = 6\,144 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 12$

La suma pedida es $\dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}} = 24$.

45 **Una célula alcanza la madurez y se reproduce por mitosis (se divide en dos) al cabo de 40 min. Partiendo de un cultivo de 625 células, ¿cuántas tendremos al cabo de 4 horas?**

Observemos la sucesión:

$a_1 = 625$ (cultivo de partida)

$a_2 = 625 \cdot 2 = 1\,250$ (40 min)

$a_3 = 1\,250 \cdot 2 = 625 \cdot 2^2 = 2\,500$ (80 min)

Vemos que los términos forman una progresión geométrica de razón $r = 2$.

El término general es $a_n = 625 \cdot 2^{n-1}$.

Por otro lado, 4 h = 4 · 60 min = 240 min se corresponden con $n = 7$.

El número de células es $a_7 = 625 \cdot 2^6 = 40\,000$.

46 **En la primera década del siglo XXI la población de Angola creció un 2,5 % anualmente. Si a finales de 2010 había 23 millones de habitantes, ¿cuántos había a comienzos del año 2001?**

Si llamamos P a la población a comienzos de 2001, la población evolucionará de la siguiente forma:

- Finales de 2001: $P\left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right)$
- Finales de 2002: $P\left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right)^2$

…

- Finales de 2010: $P\left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right)^{10}$

Por tanto, $P\left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right)^{10} = 23 \to P \cdot 1{,}025^{10} = 23 \to P = \dfrac{23}{1{,}025^{10}} \approx 17\,967\,563$ habitantes.

47 **Se sabe que los ángulos de cierto pentágono están en progresión aritmética. Si el menor mide 50°, halla los demás.**

* ***Recuerda la suma de los ángulos de un pentágono.***

La suma de los ángulos de un pentágono es: 180° · (5 – 2) = 540°

Si d es la diferencia de dicha progresión, tenemos que: $\frac{(50+50+4d)\cdot 5}{2}=540$

de donde se obtiene que $d = 29$ y los demás ángulos son: 79°, 108°, 137° y 166°.

48 **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que su perímetro es de 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \;\to\; 13 = a_1 + 5d \;\to\; a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \frac{(a_1 + a_6)\cdot 6}{2} \;\to\; 48 = (13 - 5d + 13)\cdot 3 \;\to\; 48 = (26 - 5d)\cdot 3 \end{cases}$$

$48 = 78 - 15d \;\to\; 15d = 30 \;\to\; d = \frac{30}{15} = 2 \;\to\; d = 2$

$a_1 = 13 - 5\cdot 2 = 13 - 10 = 3 \;\to\; a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

49 **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \;\to\; a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \;\to\; d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 8{,}8 + (n-1)\cdot 1{,}2 = 28 \;\to\; 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28 \;\to\; 1{,}2n = 20{,}4 \;\to\; n = 17$

La fila 17 está a 28 metros.

50 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\to$ $(4\cdot 10^6)\cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\to$ $(4\cdot 10^6)\cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\to$ $(4\cdot 10^6)\cdot 0{,}8^{10} \approx 429496{,}73$ €

51 **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6 % con abono mensual de intereses. ¿Cuánto dinero tendremos un año después si no hemos sacado nada en ese tiempo?**

* ***Un 6 % anual corresponde a $\frac{6}{12}$ = 0,5 % mensual.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\to$ $5\,000\cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\to$ $5\,000\cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\to$ $5\,000\cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

52 **Utiliza las sumas de una progresión geométrica para obtener las fracciones generatrices de estos decimales periódicos:**

a) $2,\widehat{4}$ **b)** $1,\widehat{72}$ **c)** $0,3\widehat{5}$ **d)** $3,75\widehat{923}$

* *Ten en cuenta el ejercicio guiado 4.*

a) $2,444\ldots = 2+\frac{4}{10}+\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\ldots = 2+4\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots\right)=$

$$= 2+4\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 2+4\cdot\frac{1}{9}=\frac{22}{9}$$

b) $1,727272\ldots = 1+\frac{72}{100}+\frac{72}{10\,000}+\frac{72}{100\,000}+\ldots = 1+72\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{10\,000}+\frac{1}{10\,000\,000}+\ldots\right)=$

$$= 1+72\cdot\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1+72\cdot\frac{1}{99}=\frac{19}{11}$$

c) $0,35555\ldots = \frac{3}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10\,000}+\ldots = \frac{3}{10}+5\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10\,000}+\ldots\right)=$

$$= \frac{3}{10}+5\cdot\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10}+5\cdot\frac{1}{90}=\frac{16}{45}$$

d) $3,75923923923\ldots = 3+\frac{75}{100}+\frac{923}{100\,000}+\frac{923}{100\,000\,000}+\ldots=$

$$=\frac{375}{100}+923\cdot\left(\frac{1}{100\,000}+\frac{1}{100\,000\,000}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{375}{100}+923\cdot\frac{\frac{1}{100\,000}}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{375}{100}+923\cdot\frac{1}{99900}=\frac{93887}{24975}$$

53 **Calcula el término general y el límite de estas sucesiones:**

a) $\frac{3}{-2}, \frac{5}{-7}, \frac{7}{-12}, \frac{9}{-17}, \frac{11}{-22}, \ldots$

b) $\frac{7}{1}, \frac{4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{16}, \frac{-5}{25}, \ldots$

c) $\frac{-99}{10}, \frac{-96}{20}, \frac{-91}{30}, \frac{-84}{40}, \frac{-75}{50}, \ldots$

a) Tanto las sucesiones de los numeradores como las de los denominadores son progresiones aritméticas.

$$a_n=\frac{3+(n-1)\cdot 2}{-2+(n-1)\cdot(-5)}=\frac{2n+1}{-5n+3} \qquad \text{lím } a_n=-\frac{2}{5}$$

b) La sucesión de los numeradores es una progresión aritmética y la de los denominadores es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$$b_n=\frac{7+(n-1)\cdot(-3)}{n^2}=\frac{-3n+10}{n^2} \qquad \text{lím } b_n=0$$

c) La sucesión de los numeradores se obtiene restando a 100 los cuadrados de los números naturales. Los denominadores son los múltiplos de 10.

$$c_n=\frac{100-n^2}{10n} \qquad \text{lím } c_n=-\infty$$

54 Sabiendo que $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{10}$, escribe en función de S la suma $1 + a + a^2 + \dots + a^{21}$.

Llamemos T a la suma que buscamos: $T = 1 + a + a^2 + a^3 + a^{21}$

$T = 1 + \dots + a^{10} + a^{11} + \dots + a^{21} = S + a^{11} + \dots + a^{21} = S + a^{11}\ (1 + \dots + a^{10}) = S + a^{11}S$

55 Comprueba que la sucesión $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$, … es una progresión geométrica. Calcula el siguiente término.

Comprobaremos que es una progresión geométrica viendo que la división entre dos términos consecutivos es constante e igual a r:

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7^3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

Calculamos el siguiente término:

$$a_4 = a_3 \frac{1}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}} = 1$$

56 ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 1, 4, 7, … tienen menos de cinco cifras?

Tenemos la progresión aritmética 1, 4, 7, … cuyo primer término es $a_1 = 1$ y $d = 3$.

$a_2 = 4 = a_1 + 1$

$a_3 = 7 = a_1 + 2d$

Si escribimos su término general:

$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$

Queremos saber hasta qué término tenemos 4 cifras, es decir:

$a_n < 10\,000 \ \to\ 3n - 2 < 10\,000 \ \to\ 3n < 10\,002 \ \to\ n < 3\,334$

Por lo tanto si cogemos $n = 3\,333$ tenemos el término $a_{3\,333} = 3 \cdot (3\,333) - 2 = 9\,997$

Así podemos encontrar 3 333 términos con menos de cinco cifras.

57 La suma de los n primeros términos de una sucesión viene dada por $S_n = n^2 + n + 5$. Halla a_{15}.

Si $n = 15 \ \to\ S_{15} = 15^2 + 15 + 5 = 225 + 20 = 245$

Si $n = 14 \ \to\ S_{14} = 14^2 + 14 + 5 = 215$

También sabemos que:

$S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} = S_{14} + a_{15} \ \to\ a_{15} = S_{15} - S_{14} \ \to\ a_{15} = 245 - 215 = 30$

58 a) Demuestra que:

$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = 2^2\,\dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

59 **Halla la siguiente suma:**

$\mathbf{11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \dots + 33^3}$

Llamamos $S = 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3$.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \dots + 32^3 + 33^3 = \dfrac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 16^3) = 8 \cdot \dfrac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$

Por tanto:

$1^3 + 3^3 + \dots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$

$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \dots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$

60 **Calcula tres números que están en progresión aritmética de los que sabemos que su suma es 9 y la suma de sus cuadrados es 35.**

Como están en progresión aritmética cada uno es igual al anterior, más una constante.

Llamamos x al de en medio y d a la constante. Así, los números son:

$x - d;\ x;\ x + d$

Cumplen que:

- $x - d + x + x + d = 9 \ \rightarrow\ 3x = 9 \ \rightarrow\ x = 3$
- $(3 - d)^2 + 3^2 + (3 + d)^2 = 35$

  $9 - 6d + d^2 + 9 + 9 + 6d + d^2 = 35$

  $27 + d^2 = 35$

  $d^2 = 8$

  $d = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

Hay dos soluciones (los números son los mismos pero forman distintas progresiones aritméticas):

- Si $d = -2$, los números son: 5, 3, 1
- Si $d = 2$, los números son: 1, 3, 5

La suma de los cuadrados de estos números es $1 + 9 + 25 = 35$ y su suma es $1 + 3 + 5 = 9$.

61 **En una progresión geométrica el primer término es $\frac{3}{4}$ y la razón es 2.**

a) Calcula el décimo término.

b) ¿Qué lugar ocupa el término cuyo valor es 393 216?

a) En esta progresión geométrica $a_1 = \dfrac{3}{4}$ y $r = 2$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_{10} = \dfrac{3}{4} \cdot 2^{(10-1)} = \dfrac{3}{4} \cdot 2^9 = 393\,216$

$a_{10} = \dfrac{3}{4} \cdot 2^{(10-1)} = \dfrac{3}{4} \cdot 2^9 = 384$

b) De la misma forma:

$393\,216 = \dfrac{3}{4} 2^{n-1}$

$2^{n-1} = 524\,288$

$n - 1 = log_2\, 524\,288 = 19$

$n = 20$

Es el término a_{20}.

Página 57

Cuestiones teóricas

62 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\log m + \log n = \log (m + n)$ **b)** $\log m - \log n = \dfrac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \dfrac{m}{n}$ **d)** $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m + n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2 - b^2) = \log [(a + b) \cdot (a - b)] = \log (a + b) + \log (a - b)$

63 **¿Qué relación existe entre a y b en los siguientes casos?**

a) $\log a = 1 + \log b$ **b)** $\log a + \log \dfrac{1}{b} = 0$

a) $\log a = 1 + \log b$

$\log a - \log b = 1$

$\log \dfrac{a}{b} = \log 10$

$\dfrac{a}{b} = 10$

$a = 10b$

Además, $b \neq 0$.

b) $\log a + \log \dfrac{1}{b} = 0$

$\log \left(a \cdot \dfrac{1}{b}\right) = \log 1$

$\dfrac{a}{b} = 1$

$a = b$

Además, $b \neq 0$.

64 **Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 5, ¿qué podemos decir del valor de r?**

Inventa un ejemplo con r positivo en el que se verifique esto. Inventa otro ejemplo con r negativo.

Podemos decir que $|r| < 1$ porque se pueden sumar sus infinitos términos.

Con $r > 0$ tenemos, por ejemplo: $\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{5}{16}, \dots$ ya que $S_\infty = \dfrac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$.

Con $r < 0$ tenemos, por ejemplo: $\dfrac{20}{3}, -\dfrac{20}{9}, \dfrac{20}{27}, -\dfrac{20}{81}, \dots$

En este caso $S_\infty = \dfrac{\frac{20}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5$

65 **El logaritmo en base a de 100 excede en 2 unidades al logaritmo en base a de 25. Calcula a.**

$log_a 100 = log_a 25 + 2 \;\rightarrow\; log_a(25 \cdot 4) = log_a 25 + 2 \;\rightarrow\; log_a 25 + log_a 4 = log_a 25 + 2$

Por lo tanto: $log_a 4 = 2$ y $a = 2$

Para profundizar

66 **Halla el valor de esta expresión:**

$$(8^{n+1} + 8^n)^2 : (4^n - 4^{n-1})^3$$

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3} = \frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3} = \frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3} = 2^{6n-6n+6}\cdot 3 = 2^6 \cdot 3 = 192$$

67 **¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?**

$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{32-25} \cdot 10^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$, luego tiene 3 + 25 = 28 cifras.

68 **Expresa mediante intervalos o semirrectas los valores de x que cumplen las siguientes desigualdades:**

a) $x + |x - 5| > 11$ **b)** $|x| - |x + 7| < 0$

a) $(8, +\infty)$

b) Es cierta siempre y por lo tanto $(-\infty, +\infty)$ porque:

$|x| - |x+7| < |x| - |x| - |7| = -|7| < 0$

69 **a) Expresa $10^{136,24}$ en notación científica.**

b) Utiliza los logaritmos para expresar 3^{400} en notación científica.

a) $10^{136,24} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}}$

b) Buscamos un número x tal que $3^{400} = 10^x$. Aplicando logaritmos:

$log(3^{400}) = log(10^x) \;\rightarrow\; 400\, log 3 = x\, log 10 \;\rightarrow\; 400 \cdot 0{,}477 = x$

Por tanto, podemos expresar: $x = 1{,}908 \cdot 10^2$

70 **En la sucesión 4, 7, 1, 8, … para $n > 2$, el término a_n es el dígito de las unidades de la suma de los dos anteriores. ¿Cuál es el menor n para el que $S_n > 10\,000$?**

Tenemos la sucesión 4, 7, 1, 8, 9, … de la que, a simple vista, no podemos deducir un término general pero si escribimos más términos, observamos que empiezan a repetirse secuencialmente:

4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, 1, …

Los términos se repiten a partir del duodécimo.

Observamos que $S_{12} = 60$, por lo que cada 12 términos de la sucesión sumaremos 60.(*)

Veamos cuántas veces podemos hacer esta suma sin pasar de 10 000. Tenemos:

$\frac{10\,000}{60} = 166{,}\widehat{6}$; $60 \cdot 166 = 9\,960$; $166 \cdot 12 = 1\,992$

Por la igualdad (*), $S_{1992} = 9\,960 < 10\,000$. Sumamos de 1 en 1 los términos que faltan para acercarnos a 10 000:

$S_{1993} = 9\,960 + 4 = 9\,964$

$S_{1994} = 9\,964 + 7 = 9\,971$

$S_{1995} = 9\,971 + 1 = 9\,972$

$S_{1996} = 9\,972 + 8 = 9\,980$

$S_{1997} = 9\,980 + 9 = 9\,989$

$S_{1998} = 9\,989 + 7 = 9\,996$

$S_{1999} = 9\,996 + 6 = 10\,002$

Por lo tanto el término 1 999 es el primero que cumple la condición dada.

71 ¿Qué número ocupa el lugar 2 007 en la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, …?

$a_n = 1$, si $n \le 1$

$a_n = 2$, si $n \le 3$. Sabemos que $3 = 1 + 2 = \dfrac{2 \cdot 3}{2}$.

$a_n = 3$, si $n \le 6$. Sabemos que $6 = 1 + 2 + 3 = \dfrac{3 \cdot 4}{2}$.

$a_n = 4$, si $n \le 10$. Sabemos que $10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \dfrac{4 \cdot 5}{2}$.

…

En general: $a_n = k$, si k es el menor número natural que cumple $n \le \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Buscamos, por tanto, el menor natural, k', que cumpla: $2\,007 \le \dfrac{k'(k'+1)}{2}$. De esta forma, $a_{2\,007} = k'$.

Solucionamos la siguiente ecuación:

$\dfrac{k(k+1)}{2} = 2\,007 \to k^2 + k = 4\,014 \to k_1 = 62{,}8;\ k_2 = -63{,}8$ (descartamos la solución negativa).

Por tanto, $\dfrac{62(62+1)}{2} < 2\,007$, y el primer natural que cumple la condición deseada será:

$k' = 62 + 1 = 63$ y $a_{2\,007} = 63$.

AUTOEVALUACIÓN

Página 57

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:**

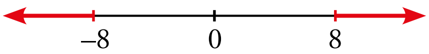
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1,0\overset{\frown}{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\overset{\frown}{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1,0\overset{\frown}{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

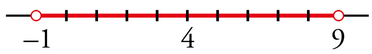
2 **Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.**

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 **Dos esferas metálicas de 1 000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8,35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:**

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \text{ donde } G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$$

Acota el error cometido.

Sustituimos en la fórmula: $8,35 \cdot 10^{-9} = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8,35 \cdot 10^{-9} = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8,35 \cdot 10^{-9} r^2 = 6,67 \cdot 10^{-5}$; $r^2 = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-5}}{8,35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89,376$ m

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

E.R. $< \dfrac{0,0005}{89,376} = 5,5943 \cdot 10^{-6} = 0,0000055943$, que corresponde al 0,00056 %.

4 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $\log_3 x = -\frac{1}{4}$ **b)** $\ln \frac{x}{3} = -1$ **c)** $\log_x 512 = 3$

a) $x = 3^{-(1/4)} \to x = 0,76$

b) $\frac{x}{3} = e^{-1} \to x = 3 \cdot e^{-1} = 1,10$

c) $x^3 = 512 \to x = 8$

5 **Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.**

$$\log A = 2 \log 3 + 0,5 \log 4 - 3 \log 2$$

$\log A = \log \dfrac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \to A = \dfrac{9 \cdot 2}{8} = \dfrac{9}{4}$

6 **Calcula x en cada caso.**

a) $2{,}5^x = 0{,}0087$ **b)** $e^{-x} = 425$

a) $x \log 2{,}5 = \log 0{,}0087 \rightarrow x = \dfrac{\log 0{,}0087}{\log 2{,}5} = -5{,}18$

b) $-x \ln e = \ln 425 \rightarrow x = -\ln 425 = -6{,}05$

7 **Determina los términos a_1, a_{97} y a_{500} de la sucesión cuyo término general es: $a_n = \dfrac{n^2 - 709}{n + 3}$ ¿Cuál es su límite?**

$a_1 = \dfrac{1^2 - 709}{1 + 3} = -177;\ a_{97} = \dfrac{97^2 - 709}{97 + 3} = 87;\ a_{500} = \dfrac{500^2 - 709}{500 + 3} = \dfrac{249\,291}{503} = 495{,}61$

Observamos que los términos independientes se hacen insignificantes comparados con los otros términos, luego:

$\lim a_n = \lim \dfrac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$

8 **Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida así: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$**

$a_1 = 4;\ a_2 = 7;\ a_3 = 2 \cdot 4 - 7 = 1;\ a_4 = 2 \cdot 7 - 1 = 13;\ a_5 = 2 \cdot 1 - 13 = -11;$

$a_6 = 2 \cdot 13 - (-11) = 37;\ a_7 = 2 \cdot (-11) - 37 = -59;\ a_8 = 2 \cdot 37 - (-59) = 133;$

$a_9 = 2 \cdot (-59) - 133 = -251;\ a_{10} = 2 \cdot 133 - (-251) = 517$

9 **Halla el término general de las siguientes sucesiones. Indica cuáles de ellas son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas:**

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, … **b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …**

c) 1 024, 512, 256, 128, … **d) 3, –9, 27, –81, 243, …**

e) 8/13, 19/52, 3/26, –7/52, …

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión. Los términos son una unidad mayor que los cuadrados perfectos, empezando por el cuadrado de 0.

$b_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

c) Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$.

$c_n = 1024 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{10} \cdot 2^{1-n} = 2^{11-n}$

d) Es una progresión geométrica de razón $r = -3$.

$d_n = 3 \cdot (-3)^{n-1}$

e) $\dfrac{8}{13} = \dfrac{32}{52},\ \dfrac{19}{52},\ \dfrac{3}{26} = \dfrac{6}{52},\ \dfrac{-7}{52},\ \dots$

Así vemos que es una progresión aritmética de diferencia $d = -\dfrac{13}{52}$.

$e_n = \dfrac{8}{13} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{13}{52}\right) = \dfrac{(45 - 13n)}{52}$

10 **Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:**

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, … **b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …**

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, … **d) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, …**

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7$ $a_2 = 8$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_3 = 1$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0$ $a_2 = 1$ $a_3 = 2$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = 1$ $a_2 = 1$ $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

11 **En una progresión aritmética, $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.**

a) Calcula S_{100}.

b) Obtén el valor de a_{220}.

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \to 85d - 14d = 42{,}6 \to d = 0{,}6$$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_{100} = 34{,}6 + 99 \cdot 0{,}6 = 94$

$$S_{100} = \frac{(34{,}6 + 94) \cdot 100}{2} = 6\,430$$

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

12 **Dados estos dos términos de una sucesión, $a_1 = 2$ y $a_3 = 8$, halla cuatro términos más y el término general suponiendo que se trata de una progresión:**

a) aritmética

b) geométrica

a) Si es una progresión aritmética, entonces:

$a_3 = a_1 + 2d \to 8 = 2 + 2d \to d = 3$

Término general: $a_n = 2 + 3(n - 1)$

Términos de esta progresión son: $a_1 = 2$; $a_2 = 5$; $a_3 = 8$; $a_4 = 11$; $a_5 = 14$; $a_6 = 17$; …

b) Si es una progresión geométrica, entonces:

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8 \to 8 = 2 \cdot r^2 \to r = 2$

Término general: $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

Términos de esta progresión son: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $a_4 = 16$; $a_5 = 32$; $a_6 = 64$