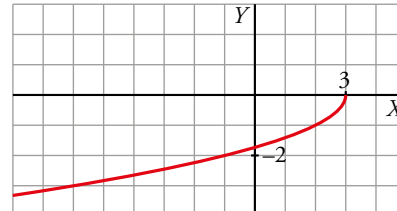


BLOQUE IV: ANÁLISIS

AUTOEVALUACIÓN

Página 328

1 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y a partir de ella responde:

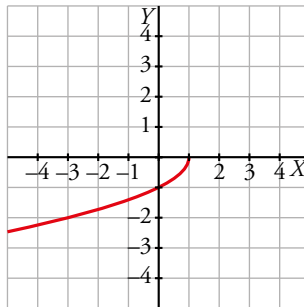


- ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?
- Representa gráficamente: $y = f(x + 2)$; $y = f(x) + 1$; $y = -f(x)$
- Representa la función inversa de $f(x)$.

a) Su dominio es el intervalo $(-\infty, 3]$.

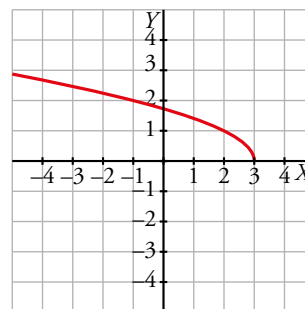
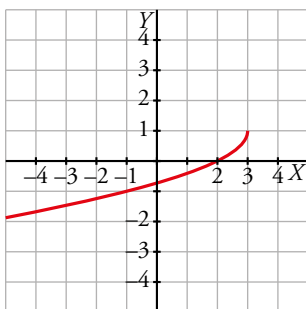
Su recorrido es $(-\infty, 0]$.

b) La gráfica de $f(x + 2)$ es la de $f(x)$ desplazada dos unidades a la izquierda.

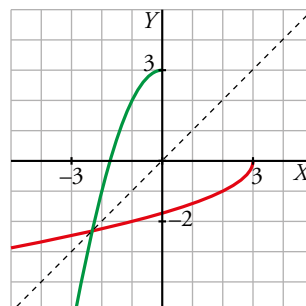


La gráfica de $f(x) + 1$ es la de $f(x)$ desplazada una unidad hacia arriba.

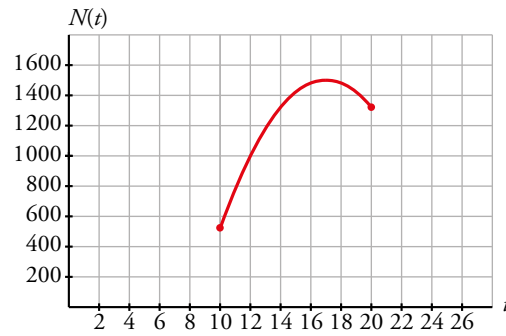
La gráfica de $-f(x)$ es la simétrica de $f(x)$ respecto del eje OX .



c) La gráfica de la función inversa de $f(x)$ es simétrica de la de $f(x)$ respecto a la recta $y = x$:



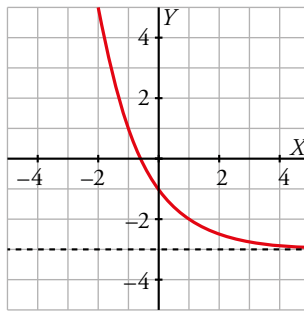
Para representar la función calculamos $N(10)$ y $N(20)$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.



4 Representa la función $y = 2^{1-x} - 3$ y halla su función inversa.

$$y = 2^{1-x} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$$

Por tanto, se trata de una función exponencial con base menor que 1. Su gráfica es como la de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ desplazada 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo.



Hallamos la inversa de la función: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1} - 3 \rightarrow x + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$

Tomamos logaritmos: $\log(x + 3) = (y - 1) \log \frac{1}{2}$

$$y = \frac{\log(x+3)}{\log \frac{1}{2}} + 1 = f^{-1}(x)$$

5 Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0,5 \cdot e^{0,4x}$ ($x =$ tiempo, en días; $y =$ número de insectos, en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 0,5 \cdot e^0 = 1,5 \rightarrow$ Población inicial: 1 500 insectos.

b) $y = 10 \rightarrow 10 = 1 + 0,5 \cdot e^{0,4x} \rightarrow \frac{9}{0,5} = e^{0,4x} \rightarrow 0,4x = \ln 18 \rightarrow x = \frac{\ln 18}{0,4} = 7,23$

Tarda entre 7 y 8 días.

- 6 A partir de las funciones $f(x) = e^x$; $g(x) = \text{sen } x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:

$$p(x) = \text{sen } \sqrt{x}; \quad q(x) = e^{\text{sen } x}; \quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

$$p(x) = \text{sen } \sqrt{x} \rightarrow p(x) = g[h(x)] \rightarrow p = g \circ h$$

$$q(x) = e^{\text{sen } x} \rightarrow q(x) = f[g(x)] \rightarrow q = f \circ g$$

$$r(x) = \sqrt{e^x} \rightarrow r(x) = h[f(x)] \rightarrow r = h \circ f$$

- 7 Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-5}{x^2+1} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el del denominador.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) \rightarrow$ Indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = 0$$

- 8 En la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x+9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

- b) Después de hallar b , explica si f es continua en $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x+9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow 6 - b = 5 \rightarrow b = 1$$

- b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$f(2) = 3$$

Como $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$

- 9 Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x) = \frac{3x^2-5}{2}$ es $f'(x) = 3x$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 5 - (3x^2 - 5)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6xh}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2}h + 3x\right) = 3x$$

- 10** Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$ que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a -1 .

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = -1 \rightarrow x = 3 \\ f(3) &= -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y = 6 - 1(x - 3) \rightarrow y = 9 - x$

- 11** Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \rightarrow f'(x) = -4x^3 + 16x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 16x = 0 \rightarrow$$

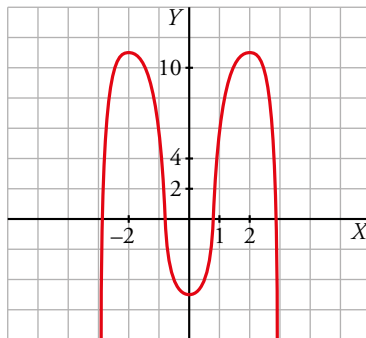
$$\rightarrow 4x(-x^2 + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = -5 \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

$$\text{Ramas infinitas: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{cases}$$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



- 12** Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2$

d) $f(x) = e^{\pi}$

e) $f(x) = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{2}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

g) $f(x) = \ln \sqrt[3]{(x \cdot e)^2}$

h) $f(x) = \ln \frac{2x + 3}{x^2}$

a) $f'(x) = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

b) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x}{1 + x^4}$

d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

f) $f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

g) $f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{ex} \cdot e \right) = \frac{2}{3x}$

h) $f'(x) = \frac{x^2}{2x + 3} \cdot \frac{-4x^2 - 6x}{x^4} = \frac{-2x - 6}{x(2x + 3)}$

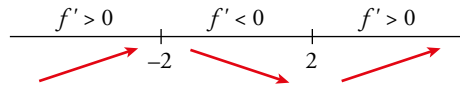
13 Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

a) $f(x) = x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12; 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x . f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

14 En la función $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

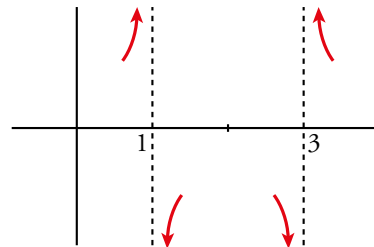
b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$

Posición de $f(x)$ respecto a $x = 1$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$

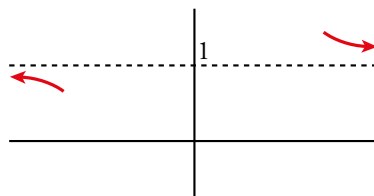
Posición de $f(x)$ respecto a $x = 3$ $\begin{cases} x \rightarrow 3^- f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 3^+ f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$



• Asíntota horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \rightarrow y = 1$

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty f(x) > 1 \\ x \rightarrow -\infty f(x) < 1 \end{cases}$



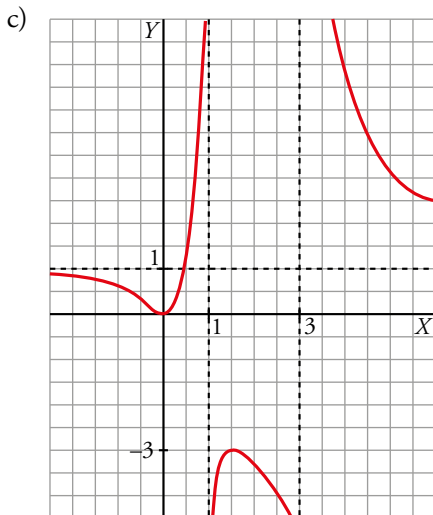
b) Máximos y mínimos:

$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 6x = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=3/2 \end{cases}$

$f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$ es un mínimo relativo.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \rightarrow Q\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ es un máximo relativo.



15 ¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?

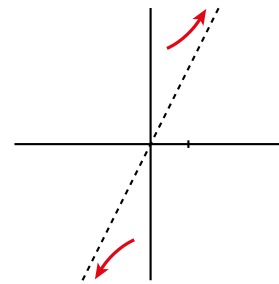
a) $y = \frac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ b) $y = 1 + \frac{3}{x}$ c) $y = \frac{4 + 2x^2}{x}$

Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Tiene asíntota oblicua $y = \frac{4 + 2x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2x$

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \rightarrow -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



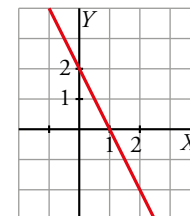
16 Esta es la gráfica de f' , la función derivada de f .

a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

a) f es creciente cuando $f' > 0 \rightarrow f$ crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.

b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.



17 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Representála gráficamente.

Llamamos $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$ y $f_2(x) = x + 1$

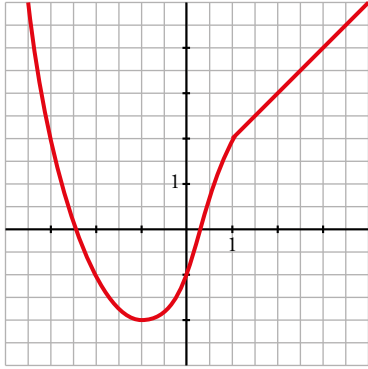
Ambas funciones son continuas.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = 1 + 1 = 2 \end{array} \right\} \text{ Como coinciden y son iguales a } f(1), \text{ la función es continua en } x = 1.$$

Por tanto, la función es continua en todo \mathbb{R} .

$$\left. \begin{array}{l} f'_1(x) = 2x + 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f'_1(1) = 4 \\ f'_2(x) = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f'_2(1) = 1 \end{array} \right\} \text{ Como son distintos, la función no es derivable en } x = 1.$$

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



18 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e) - e^x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e) - e^x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+e} - e^x}{\cos x} = \frac{1}{e} - 1$$

19 De todos los rectángulos de 60 m^2 de área, calcula las dimensiones del que tiene el menor perímetro.

Supongamos que x e y son la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el área es igual a 60 m^2 , se tiene que $xy = 60 \rightarrow y = \frac{60}{x}$

El perímetro del rectángulo es $P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{60}{x} = 2x + \frac{120}{x}$

Buscamos el rectángulo de perímetro mínimo:

$$P' = 2 - \frac{120}{x^2} \rightarrow 2 - \frac{120}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 60 \rightarrow \text{La única solución válida es } x = 2\sqrt{15}.$$

Comprobamos que el valor obtenido es un mínimo de la función P :

$$\begin{array}{c} P' < 0 & & P' > 0 \\ \hline & & 2\sqrt{15} & & \end{array}$$

(Red arrows point down from $P' < 0$ and up from $P' > 0$ to the critical point $2\sqrt{15}$)

Por tanto, las medidas son $x = 2\sqrt{15} \text{ m}$, $y = \frac{60}{2\sqrt{15}} = 2\sqrt{15} \text{ m}$ y el perímetro mínimo es $8\sqrt{15} \text{ m}$.