BLOQUE III: GEOMETRÍA

AUTOEVALUACIÓN

Página 230

1 **Dados los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\vec{v}(0, -2)$, calcula:**

a) $|\vec{u}|$ **b)** $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ **c)** $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v})$

$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ $\vec{v}(0, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right) + 3(0, -2) = (-1, 2) + (0, -6) = (-1, -4)$

c) $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 2 \cdot (-2) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -4\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)\right) = -8$

2 **Determina el valor de k para que el vector $\vec{u}(6, k)$:**

a) Sea ortogonal a $\vec{v}(1, 3)$. **b) Tenga módulo 10.**

a) Para que sean perpendiculares su producto escalar debe ser cero:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (1, 3) = 6 + 3k = 0 \rightarrow k = -2$

b) $|u| = \sqrt{36 + k^2} = 10 \rightarrow k^2 = 64 \rightarrow k = \pm 8$

3 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, 0)$ y $\vec{v}(1, 2)$:**

a) Calcula $proy_{\vec{u}}\, \vec{v}$.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w}(4, 6)$ en la base $B(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = |\vec{v}|\, cos\, \alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{1} = -1$

b) $cos\, (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\, cos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116°\ 33'\ 54''$

c) $\vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \rightarrow (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 2s) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -k + s = 4 \\ 2s = 6 \end{array}\right\}\ s = 3,\ k = -1$

$\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

4 **Determina las coordenadas de un vector unitario $\vec{a}(x, y)$ sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{u}(2, 0)$.**

$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot cos\, 60° \rightarrow 2x = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

$|\vec{a}| = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + y^2 = 1 \rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Existen, por tanto, dos soluciones: $\vec{a}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\vec{a}'\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5 **Sean $\vec{a}(-5, 5)$ y $\vec{b}(-1, 3)$. Expresa $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno con la misma dirección que $\vec{b}$ y otro perpendicular a $\vec{b}$.**

Los vectores paralelos a $\vec{b}$ son de la forma $k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ son de la forma $s(3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (-5, 5) = k(-1, 3) + s(3, 1) \to \left.\begin{aligned} -k + 3s &= -5 \\ 3k + \ \ s &= 5 \end{aligned}\right\} \ s = -1,\ k = 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (-2, 6) + (-3, -1)$

6 **Sabiendo que $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ y que $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ forman un ángulo de 60°, calcula: $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 3 - 2\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{3} \ \to \ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 + 3 + 2\sqrt{3} = 7 + 2\sqrt{3} \ \to \ |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$

Por tanto: $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$

7 **Determina cuál es el valor de y para que los puntos $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, y)$ estén alineados.**

Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben tener la misma dirección, es decir, deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{AB}(-1, 3) \\ &\overrightarrow{BC}(4, y-4) \end{aligned}\right\} \ \frac{y-4}{3} = \frac{4}{-1} \ \to \ 4 - y = 12 \ \to \ y = -8$$

8 **Dados los puntos $A(2, 2)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 2)$.**

a) Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$.

b) Calcula el punto P tal que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$.

a) $D = (x, y)$

El vector $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ en un paralelogramo.

$\overrightarrow{AB} = (1, -1)$; $\overrightarrow{DC} = (4 - x, 2 - y)$

$$\begin{cases} 1 = 4 - x \ \to \ x = 3 \\ -1 = 2 - y \ \to \ y = 3 \end{cases} \ \to \ D = (3, 3)$$

b) $P(x, y)$ cumple: $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB} \ \to \ (x - 2, y - 2) = 2(3 - x, 1 - y) \ \to \ \begin{cases} x - 2 = 6 - 2x \ \to \ x = \frac{8}{3};\ y = \frac{4}{3} \\ y - 2 = 2 - 2y \end{cases}$

9 **Dada la recta s: $\frac{x+1}{2} = 1 - y$, halla en las formas paramétrica e implícita la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 3)$ y es:**

a) Paralela a s. **b) Perpendicular a s.**

a) Buscamos la recta paralela a s, por lo que tendrá el mismo vector director que s, por ejemplo $\vec{v}(2, -1)$. Además pasa por $P(0, 3)$.

Su forma paramétrica será: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$

Su ecuación implícita será: $\frac{x}{2} = 3 - y \rightarrow x + 2y - 6 = 0$

b) $s: \frac{x+1}{2} = 1 - y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$. Vector dirección de s: $\vec{v}(2, -1)$

Un vector perpendicular a $\vec{v}$ es $\vec{u}(1, 2)$.

Buscamos una recta r que pasa por $P(0, 3)$ y tiene como vector dirección a $\vec{u}(1, 2)$:

— Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ t = \dfrac{y-3}{2} \end{array}\right\} x = \frac{y-3}{2} \rightarrow 2x = y - 3 \rightarrow 2x - y + 3 = 0$$

— Ecuación implícita: $2x - y + 3 = 0$

10 **Se consideran las rectas r: $2x + y - 1 = 0$ y s: $3x - y + 5 = 0$; t: $-4x - 2y + 2 = 0$ y u: $6x + 3y + 3 = 0$. Indica la posición relativa de:**

a) r **y** s **b)** r **y** t **c)** r **y** u

Vector director de r: $(1, -2)$

Vector director de s: $(1, 3)$

Vector director de t: $(-1, 2)$

Vector director de u: $(1, -2)$

a) Son secantes porque sus vectores directores no son proporcionales.

b) Son coincidentes, expresan la misma recta ya que $-2r = t$.

c) Son paralelas porque sus vectores directores son proporcionales pero no representan la misma recta.

11 **Determina la distancia entre las rectas r y u del ejercicio anterior.**

Como son rectas paralelas, buscamos una recta t perpendicular a ambas. Esta tendrá vector director $\vec{v}(2, 1)$. Como $P(0, 1) \in r$ definimos la recta t para que pase por este punto:

$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} \rightarrow x - 2y + 2 = 0$

Sabemos que t y r se cortan en P, veamos cuál es la intersección Q de t y u:

$x = 2y - 2$; sustituimos en u: $4y - 4 + y + 1 = 0 \rightarrow y = \frac{3}{5}$; $x = -\frac{4}{5}$

$$dist(u, r) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)\right| = \sqrt{\frac{16+4}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

12 **Obtén la expresión analítica del haz de rectas al que pertenecen r: $2x + y - 3 = 0$ y s: $x + y - 2 = 0$. Halla la recta de ese haz que pasa por $P(2, 3)$.**

Expresión analítica del haz: $k(2x + y - 3) + t(x + y - 2) = 0$

Como la recta que buscamos ha de pasar por el punto $(2, 3)$,

$$k(2 \cdot 2 + 3 - 3) + t(2 + 3 - 2) = 0 \rightarrow 4k + 3t = 0$$

Cualquier par de valores de k y t que cumplan la igualdad anterior dan lugar a la misma recta.

Tomamos, por ejemplo, $k = 3$ y $t = -4$. Así:

$$3(2x + y - 3) - 4(x + y - 2) = 0 \rightarrow 6x + 3y - 9 - 4x - 4y + 8 = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 2x - y - 1 = 0$ es la recta del haz que pasa por el punto $(2, 3)$.

13 **Halla el simétrico del punto $A(0, 0)$ respecto a la recta $r: x + y - 2 = 0$.**

- Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a r:

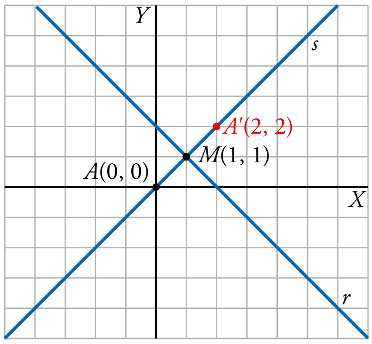
  $s: x - y = 0$

- Punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x = 2 \;\to\; x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} M(1, 1)$$

- El punto $A'(x, y)$ que buscamos es el simétrico de A respecto a M:

$$\left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}\right) = (1, 1) \;\to\; \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right\} A'(2, 2)$$



14 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2}$ y forma un ángulo de 45° con la recta r.**

Hallamos el punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} \end{array}\right\} \text{Resolviendo el sistema obtenemos el punto } P(5, 11).$$

La pendiente de r es 2.

$$1 = tg\,45° = \left|\frac{2-m}{1+2m}\right| \begin{cases} 2 - m = 1 + 2m \;\to\; m = \dfrac{1}{3} \\ 2 - m = -1 - 2m \;\to\; m = -3 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$t: y - 11 = \frac{1}{3}(x - 5)$

$t': y - 11 = -3(x - 5)$

15 **Halla los puntos de la recta $y = 0$ que distan 3 unidades de la recta $3x - 4y = 0$.**

Los puntos de la recta $y = 0$ son de la forma $P(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$r: 3x - 4y = 0$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3x - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x|}{5} = 3$$

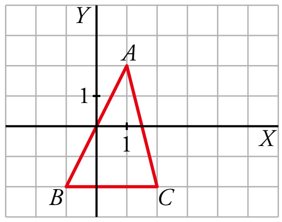
$$|3x| = 15 \begin{cases} 3x = 15 \;\to\; x = 5 \\ 3x = -15 \;\to\; x = -5 \end{cases}$$

Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $P(5, 0)$ y $P'(-5, 0)$.

16 **En el triángulo ABC de la figura, calcula:**

a) El ortocentro.

b) El área del triángulo.



a) Ortocentro: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$, donde h_A, h_B y h_C son las alturas del triángulo desde A, B y C, respectivamente.

$A(1, 2) \quad B(-1, -2) \quad C(2, -2)$

Calculamos las ecuaciones de dos de las alturas:

$$h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, 0) \to \vec{a} = (0, 3) \\ A(1, 2) \in h_A \end{cases} \to h_A: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \to h_A: x = 1$$

$$h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (1, -4) \to \vec{b} = (4, 1) \\ B(-1, -2) \in h_B \end{cases} \to h_B: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x+1}{4} \\ t &= y + 2 \end{aligned}\right\} \frac{x+1}{4} = y + 2 \to x + 1 = 4y + 8 \to x - 4y - 7 = 0$$

$h_B: x - 4y - 7 = 0$

Calculamos ahora $h_A \cap h_B$:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ x - 4y - 7 &= 0 \end{aligned}\right\} 1 - 4y - 7 = 0 \to y = -\frac{3}{2}$$

$$R = h_A \cap h_B = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

b) Área del triángulo $ABC = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}{2}$, donde $M = h_A \cap r_{BC}$ y r_{BC} es la recta que contiene al lado BC.

$$\left.\begin{aligned} h_A&: x = 1 \\ r_{BC}&: y = -2 \end{aligned}\right\} h_A \cap r_{BC} = (1, -2) = M$$

$\overrightarrow{BC} = (3, 0) \to |\overrightarrow{BC}| = 3$

$\overrightarrow{AM} = (0, -4) \to |\overrightarrow{AM}| = 4$

Área del triángulo $ABC = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ u}^2$

17 **Considera el triángulo formado por la bisectriz del primer cuadrante, *b*, el eje de abscisas y la recta $r: y = -x + 4$. Obtén:**

a) La mediatriz del lado contenido en la recta *r*.

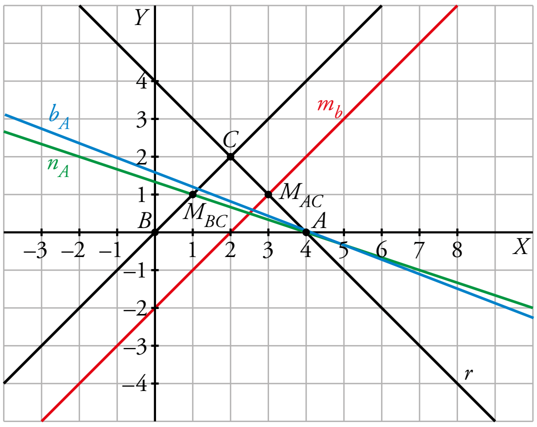
b) La bisectriz del ángulo que forman *r* y el eje *OX*.

c) La mediana relativa al lado contenido en *b*.

Lado AB, eje de abscisas: $y = 0$

Lado BC, bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

Lado AC, recta $r: y = -x + 4$



Vértices:

$$A \to \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 4,\ y = 0 \to A = (4, 0)$$

$$B \to \begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \to x = 0,\ y = 0 \to B = (0, 0)$$

$$C \to \begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \to x = 2,\ y = 2 \to C = (2, 2)$$

a) La mediatriz pasa por M_{AC} y es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-2, 2)$

$M_{AC} = (3, 1)$

Luego m_b: $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{2}$

b) Sea $X = (x, y)$ un punto genérico de la bisectriz, entonces está a la misma distancia de r que del eje de las abcisas, y cumple:

$$\frac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}} = |y| \to \begin{cases} \dfrac{x + y - 4}{\sqrt{2}} = y \to x + (1 - \sqrt{2})y - 4 = 0 \\ \dfrac{x + y - 4}{\sqrt{2}} = -y \to x + (1 + \sqrt{2})y - 4 = 0 \end{cases}$$

La bisectriz del ángulo A es b_A: $x + (1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$ porque debe tener pendiente negativa como se observa en el dibujo.

c) La mediana pasa por A y M_{BC}.

$M_{BC} = (1, 1)$

$\overrightarrow{M_{BC}A} = (3, -1)$

Luego n_A: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{-1}$

18 **Solo una de estas ecuaciones corresponde a una circunferencia. Justifica cuál es y determina su centro y su radio:**

$\boldsymbol{C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0}$

$\boldsymbol{C_2: x^2 + y^2 - 2xy + 6y + 6 = 0}$

$\boldsymbol{C_3: x^2 + y^2 - 3x + 5x + 18 = 0}$

C_1: $r = \sqrt{1 + 9 - 6} = 2 \to$ Circunferencia de centro $O = (1, -3)$ y radio $r = 2$.

C_2: No es una circunferencia porque tiene término en xy.

C_3: $r^2 = 4 - 18 < 0 \to$ No es circunferencia porque $r^2 < 0$.

19 **Dadas la circunferencia $C: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ y la recta $r: 3x - 4y + k = 0$. Halla los valores de k para que la recta con respecto a la circunferencia sea:**

a) Secante. **b) Tangente.** **c) Exterior.**

$C: x^2 - 2x + y^2 + 4y = -1$

a) Para que sea secante tiene que cortar a C en dos puntos. Veamos sus puntos de corte:

$r: y = \dfrac{3x+k}{4}$ y sustituyendo en C:

$$x^2 - 2x + \frac{9x^2 + 6kx + k^2}{16} + 3x + k = -1 \to 25x^2 + x(16+6k) + k^2 + 16k + 16 = 0 \to$$

$$\to x = \frac{-16 - 6k \pm \sqrt{(16+6k)^2 - 100(k^2 + 16k + 16)}}{50}$$

Por tanto:

- Si $(16+6k)^2 - 100(k^2+16k+16) = 0$ habrá una única solución (1)
- Si $(16+6k)^2 - 100(k^2+16k+16) > 0$ habrá dos soluciones (2)
- Si $(16+6k)^2 - 100(k^2+16k+16) < 0$ no tendrá solución real (3)

Como buscamos que sea secante nos centramos en (2):

Para ello debemos estudiar cuándo se da la igualdad a 0:

$(16+6k)^2 - 100(k^2+16k+16) = 0$

Desarrollando llegamos a la igualdad $k^2 + 22k + 21 = 0 \to k = \dfrac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 21}}{2} \to$

$\to x = -1;\ x = -21$

Volviendo a (2) $\to k \in (-21, -1)$

b) Será tangente cuando el punto de corte entre la circunferencia y la recta sea un único punto, por lo tanto estaremos en (1) $\to k = -1$ o bien -21.

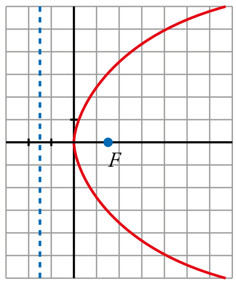
c) Será exterior cuando no se corten, es decir, estamos en (3) $\to k \in (-\infty, -21) \cup (-1, +\infty)$

20 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

a) $\mathbf{2y^2 - 12x = 0}$ **b)** $\mathbf{4x^2 + 4y^2 = 16}$

c) $\mathbf{25x^2 + 4y^2 = 100}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1}$

a) $2y^2 - 12x = 0 \to y^2 = 6x$

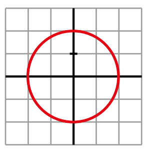


Es una parábola.

Foco $\to F\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$; recta directriz $\to r: x = -\dfrac{3}{2}$

Vértice $\to (0, 0)$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16 \to x^2 + y^2 = 4$

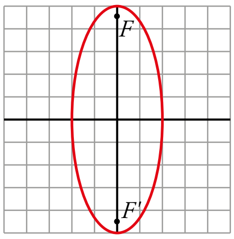


Es una circunferencia.

Centro $\to (0, 0)$

Radio $\to r = 2$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$



Es una elipse con los focos en el eje Y.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

$a = 5;\ b = 2;\ c = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

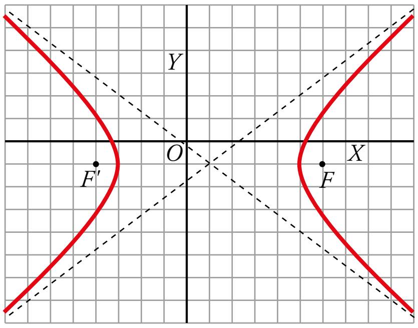
Focos: $F(0, \sqrt{21})$ y $F'(0, -\sqrt{21})$

Semieje mayor: 5

Semieje menor: 2

Excentricidad: $exc = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92$

d) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$



Es una hipérbola.

Centro: $(1, -1)$

$a = 4;\ b = 3,\ c^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow c = 5$

$exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1,25$

Asíntotas: $\begin{cases} r: y = \frac{3}{4}(x-1) - 1 \\ r': y = -\frac{3}{4}(x-1) - 1 \end{cases}$

Focos: $F(6, -1)$ y $F'(-4, -1)$

21 **Obtén la ecuación y representa cada una de las siguientes cónicas:**

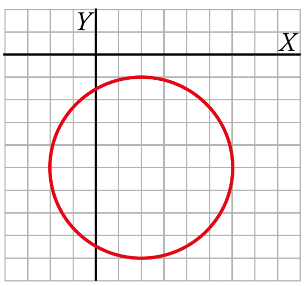
a) Circunferencia, C, de centro $(2, -5)$ y radio 4.

b) Elipse de centro $(0, 0)$ y focos $F_1(6, 0)$ y $F_2(-6, 0)$, con excentricidad $3/5$.

c) Hipérbola de focos $F_1(-4, 0)$ y $F_2(4, 0)$ y constante $k = 6$.

d) Parábola de vértice $V(-1, -1)$ y directriz $r: x = -3$.

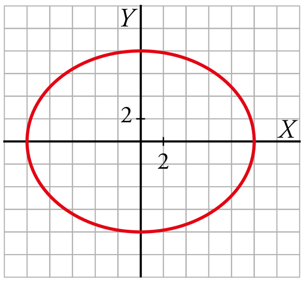
a) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 4^2$



b) $F(\pm 6, 0) \rightarrow c = 6$

$exc = \frac{3}{5} = \frac{c}{a} \rightarrow a = 10$

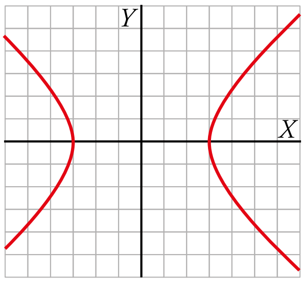
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$



c) $F(\pm 4, 0) \rightarrow c = 4$

$k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{7} \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$



d) Puesto que el vértice tiene que equidistar del foco y de la directriz, ha de ser $F(1, -1)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la parábola han de cumplir:

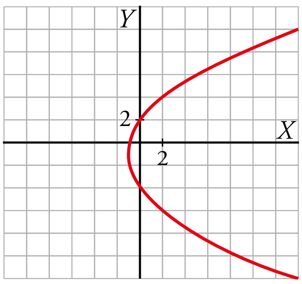
$dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x + 3|$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$(y + 1)^2 + x^2 + 1 - 2x = x^2 + 6x + 9 \rightarrow (y + 1)^2 = 8x + 8 \rightarrow (y + 1)^2 = 8(x + 1)$

La ecuación de la parábola es $(y + 1)^2 = 8(x + 1)$.



22 Halla la potencia del origen de coordenadas, (0, 0), a la circunferencia del apartado a) del ejercicio anterior.

$C: (x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4^2 \rightarrow O(2, -5);\ r = 4$

$P(0, 0)$

La potencia es $d^2 - r^2 = (0 - 2)^2 + (0 + 5)^2 - 4^2 = 4 + 25 - 16 = 13$.