

BLOQUE I: ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

▶ AUTOEVALUACIÓN

Página 84

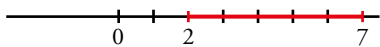
1 Explica si es verdadera o falsa cada una de estas oraciones:

- a) Todo número decimal se puede expresar como fracción.
- b) Hay números irracionales que no son reales.
- c) El producto de dos números irracionales puede ser un número racional.
- a) Falsa. Los números decimales no periódicos no se pueden poner como fracción.
- b) Falsa. Los números reales contienen a los números racionales y también a los irracionales.
- c) Verdadera: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

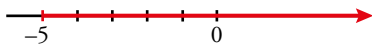
2 Escribe como intervalo y representa el tramo de recta que corresponde a cada desigualdad.

- a) $2 \leq x \leq 7$
- b) $-5 \leq x$
- c) $x < -1$
- d) $5 > x > -3$

a) $[2, 7]$



b) $[-5, +\infty)$



c) $(-\infty, -1)$



d) $(-3, 5)$



3 Dados los intervalos $A = [1, 6]$ y $B = (-2, 5]$, expresa como intervalos $A \cup B$ y $A \cap B$.

$$A \cup B = (-2, 6]$$

$$A \cap B = [1, 5]$$

4 Efectúa y expresa el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos:

a) $\frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$

b) $\frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$

a) $-1,58 \cdot 10^5$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^2$

b) $-2,65 \cdot 10^6$; E.A. $< 0,005 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^3$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^2}{1,58 \cdot 10^5} < 3,16 \cdot 10^{-3}$

E.R. $< \frac{5 \cdot 10^3}{2,65 \cdot 10^6} < 1,89 \cdot 10^{-3}$

- 5** La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0°C , t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800°C , ¿cuál es su longitud a 200°C ? (En el plomo, $k = 3 \cdot 10^{-5}$).

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800°C :

$$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right), \text{ luego } l_0 = \frac{125}{128}$$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200°C :

$$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0,98242 \text{ m}$$

- 6** Si $\log k = -1,3$ calcula el valor de estas expresiones:

a) $\log k^3$

b) $\log \frac{1}{k}$

c) $\log \frac{k}{100}$

a) $\log k^3 = 3 \log k = 3(-1,3) = -3,9$

b) $\log \frac{1}{k} = \log 1 - \log k = 0 - (-1,3) = 1,3$

c) $\log \frac{k}{100} = \log k - \log 100 = -1,3 - 2 = -3,3$

- 7** Calcula x en cada caso.

a) $2,5 \cdot e^x = 100$

b) $\log 5x - 2 \log x = 0$

a) $e^x = 100 : 2,5 = 40$

$$x = \ln 40$$

b) $\log\left(\frac{5x}{x^2}\right) = 0$

$$\frac{5x}{x^2} = 1 \quad (*)$$

$$5x = x^2$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x = 0, x = 5$$

La solución $x = 0$ no sirve, porque no es solución de la ecuación (*), por tanto, el valor que buscamos es $x = 5$.

8 Calcula el término general de cada una de estas sucesiones. Halla después la suma de los 20 primeros términos.

a) $\frac{13}{4}, 2, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{4} \dots$

b) 8, 18, 32, 50, 72...

c) $\sqrt{512}, 16, \sqrt{128}, 8, \sqrt{32} \dots$

d) 18, -6, 2, $-\frac{2}{3}, \frac{2}{9} \dots$

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -\frac{5}{4}$.

$$a_n = \frac{13}{4} + (n-1)\left(-\frac{5}{4}\right) \quad a_{20} = \frac{13}{4} + (19)\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{41}{2}$$

$$S_{20} = \frac{\frac{13}{4} + \left(-\frac{41}{2}\right)}{2} \cdot 20 = -\frac{345}{2}$$

b) No es progresión.

$$b_n = 2(n+1)^2$$

Usamos la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Para la suma que nos piden, tenemos que sumar desde 2^2 hasta $(n+1)^2$. Para eso, sumamos los cuadrados de los $n+1$ primeros números naturales y le restamos 1^2 .

$$S_{20} = 2 \left(\frac{(20+1) \cdot (20+2) \cdot (2 \cdot 21 + 1)}{6} - 1 \right)$$

$$S_{20} = 2 \left(\frac{21 \cdot 22 \cdot 43}{6} - 1 \right) = 6\,620$$

c) Progresión geométrica de razón $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$c_n = \sqrt{512} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$c_1 = \sqrt{512}$$

$$S_{20} = \frac{\sqrt{512} \cdot \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20} - 1\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 77,179$$

d) Progresión geométrica de razón $r = -\frac{1}{3}$.

$$d_n = 18 \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$d_{20} = 18 \left(-\frac{1}{3}\right)^{19} = -\frac{2}{129\,140\,163}$$

$$S_{20} = \frac{-\frac{2}{129\,140\,163} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 18}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{1743\,392\,200}{129\,140\,163} = 13,50$$

- 9** Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética con $a_3 = 24$ y $a_2 + a_{11} = 41$.

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones para calcular el término general de la sucesión:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + d \\ a_{11} = a_3 + 8d \\ a_2 + a_{11} = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24 = a_2 + d \\ a_{11} = 24 + 8d \\ a_2 + a_{11} = 41 \end{cases} \rightarrow [d = -1, a_2 = 25, a_{11} = 16]$$

$$a_1 = 26$$

$$a_n = 26 + (n-1)(-1) = 27 - n$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12$$

$$a_{12} = 27 - 12 = 15$$

$$S_{12} = \frac{26+15}{2} \cdot 12 = 246$$

- 10** Define por recurrencia la siguiente sucesión:

$$1, 5, 13, 29, 61, \dots$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 3$$

- 11** Halla el término general de estas sucesiones.

a) $3, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{16}, \frac{3}{25}, \dots$

b) $4, \frac{9}{2}, \frac{14}{3}, \frac{19}{4}, \frac{24}{5}, \dots$

a) $a_n = \frac{3}{n^2}$

b) $a_n = 5 - \frac{1}{n}$

- 12** Colocamos en un banco 75 000 € al 4,2 % anual con pago mensual de intereses.

a) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 4 años?

b) ¿Cuánto tiempo tardaremos en tener 100 000 €?

a) $75\,000 + 75\,000 \cdot 0,042 \cdot 4 = 87\,600 \text{ €}$

b) $100\,000 \text{ €} = 75\,000 \text{ €} + 75\,000 \cdot 0,042 \cdot x \quad 8 \quad \frac{25\,000}{75\,000 \cdot 0,042} = x \quad 8 \quad x = \frac{1}{3 \cdot 0,042} = 7,936 \text{ años}$

- 13** Simplifica.

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2}{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x}$

a) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$

b) $\frac{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2}{x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x} = \frac{x^2(x+1)(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x + 4)^2 - 7 = (2x + 3)^2 + 2x$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

c) $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 5$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

a) $x^2 + 16 + 8x - 7 = 4x^2 + 9 + 12x + 2x$

$$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = 0, x_2 = -2$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$. Hacemos el cambio de variable $x^3 = y$.

$$8y^2 - 7y - 1 = 0 \rightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} = \frac{7 \pm 9}{16} = \begin{cases} y=1 \\ y=-1/8 \end{cases}$$

$y = 1 \rightarrow x = 1$

$y = -\frac{1}{8} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 5 \rightarrow \sqrt{3-2x} = 5 - \sqrt{1-x} \rightarrow$
 $\rightarrow 3 - 2x = (5 - \sqrt{1-x})^2 \rightarrow 3 - 2x = 26 - 10\sqrt{1-x} - x \rightarrow$
 $\rightarrow 10\sqrt{1-x} = x + 23 \rightarrow 100(1-x) = (x+23)^2 \rightarrow$
 $\rightarrow 100 - 100x = x^2 + 46x + 529 \rightarrow x^2 + 146x + 429 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow x = -3; x = -143$ no válida

Solución: $x = -3$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) =$
 $= x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

Soluciones: $x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = \frac{1}{3}$

	3	-4	-5	2
-1		-3	7	-2
	3	-7	2	0
2		6	-2	
	3	-1	0	

15 Opera y simplifica: $\left(\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x^2+2x}{x^3-x}\right) - (x^2-3x)$

$$\left(\frac{x^2-4}{x+1} : \frac{x^2+2x}{x^3-x}\right) - (x^2-3x) = \frac{(x^2-4)(x^3-x)}{(x+1)(x^2+2x)} - (x^2-3x) =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)x(x+1)(x-1)}{(x+1)x(x+2)} - (x^2-3x) = (x-2)(x-1) - (x^2-3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2$$

16 Resuelve.

a) $\frac{7-x}{x^2+4x+4} + \frac{x}{x+2} = 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3+x}{\sqrt{5-11x}}$

c) $3^{x^2-2} = 1/3$

d) $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$

e) $\log(x+1) = 1 + \log x$

f) $\ln \sqrt{x+1} = \ln x$

a) $\frac{7-x}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} = 1 \rightarrow \frac{7-x+x(x+2)}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow 7-x+x^2+2x = x^2+4x+4 \rightarrow 3x-3=0 \rightarrow x=1$

Solución: $x = 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3+x}{\sqrt{5-11x}} \rightarrow \sqrt{5-11x} = (3+x)\sqrt{2x+6} \rightarrow (\sqrt{5-11x})^2 = ((3+x)\sqrt{2x+6})^2 \rightarrow$
 $\rightarrow 5-11x = (x^2+6x+9)(2x+6) \rightarrow 2x^3+18x^2+65x+49=0 \rightarrow$
 $\rightarrow (x+1)(2x^2+16x+49)=0$

Solución: $x = -1$

c) $3^{x^2-2} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x^2-2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1, x_2 = -1$

d) $(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow[4^x=t]{\text{cambio}} t^2 - 8t + 16 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow (t-4)^2 = 0 \rightarrow t=4 \rightarrow 4^x = 4 \rightarrow x=1$

Solución: $x = 1$

e) $\log(x+1) - \log x = 1 \rightarrow \log \frac{x+1}{x} = 1 \rightarrow \frac{x+1}{x} = 10 \rightarrow$
 $\rightarrow x+1 = 10x \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$

Solución: $x = \frac{1}{9}$

f) $\ln \sqrt{x+1} = \ln x \rightarrow \ln \sqrt{x} + \ln e = \ln x \rightarrow \ln e \sqrt{x} = \ln x \rightarrow$
 $\rightarrow e\sqrt{x} = x \rightarrow e^2 x = x^2 \rightarrow x(e^2 - x) = 0 \rightarrow x=0 \text{ no válida; } x = e^2$

Solución: $x = e^2$

17 Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} x - 4y = 5 \\ \log(x+1) = 1 + \log y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = -5 \\ 2^{2x} - 3^y = -11 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x - 4y = 5 \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y = 5 \\ \frac{x+1}{y} = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4y = 5 \\ x + 1 = 10y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 4y = -5 \\ x - 10y = -1 \end{cases} \rightarrow -6y = -6 \rightarrow y = 1$$

$$-x + 4y = -5 \rightarrow -x + 4 = -5 \rightarrow x = 9$$

Solución: $x = 9, y = 1$

b)
$$\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = -5 \\ 2^{2x} - 3^y = -11 \end{cases}$$
 Hacemos el siguiente cambio de variable: $2^x = t; 3^y = z$

$$\begin{cases} t - \frac{z}{3} = -5 \\ t^2 - z = -11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 15 + 3t \\ z = t^2 + 11 \end{cases} \rightarrow 15 + 3t = t^2 + 11 \rightarrow t = 4, t = -1 \text{ no válida}$$

$$t = 4 \rightarrow z = 15 + 3t = 27$$

Solución: $x = 2, y = 3$

c)
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + 3 \\ -2y + 3 - z = 3 \\ -2y + 3 + y + z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + 3 \\ -2y - z = 0 \\ -y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2y + 3 \\ -2y = z \\ z = 3 + y \end{cases}$$

Por tanto:

$$-2y = 3 + y; 3y = -3; y = -1$$

$$z = 3 - 1 = 2$$

$$x = 2 + 3 = 5$$

Solución: $x = 5, y = -1, z = 2$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ -2(1 - 2y - z) + y - z = -5 \\ 3(1 - 2y - z) - y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ -2 + 4y + 2z + y - z = -5 \\ 3 - 6y - 3z - y + 3z = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z \\ 5y + z = -3 \\ -7y = 7 \end{cases}$$

Por tanto:

$$y = -1$$

$$-5 + z = -3; z = 2$$

$$x = 1 + 2 - 2 = 1$$

Solución: $x = 1, y = -1, z = 2$

18 Resuelve estas inecuaciones y sistemas:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \leq 0$ b) $\frac{x^2 + 6}{x^2 - 4} \geq 0$ c) $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ 3x + 2y < -5 \end{cases}$

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2) = 0$

	$x \leq -1$	$x \in (-1, 1)$	$x \in [1, 2)$	$x > 2$
$x - 1$	-	-	+	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$(x - 1)(x + 1)(x - 2)$	-	+	-	+

Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, 2]$

b) $\frac{x^2 + 6}{x^2 - 4} \geq 0$

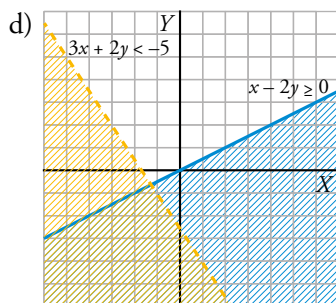
Como el numerador es siempre positivo, la fracción será positiva siempre que también lo sea el denominador. Estudiamos el signo del denominador:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \geq 0 \rightarrow x \geq 2, x \leq -2$$

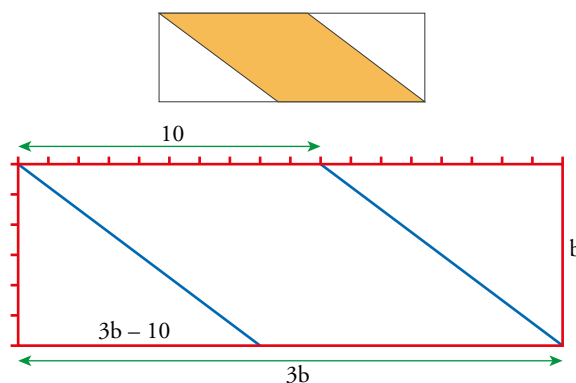
Pero descartamos $x = 2$ y $x = -2$ porque anulan el denominador.

Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \rightarrow \text{Solución: } 2 < x \leq 5$



19 El cuadrilátero central es un rombo de 40 m de perímetro. Halla las dimensiones del rectángulo sabiendo que la base es el triple que la altura.



$$b^2 + (3b - 10)^2 = 10^2 \rightarrow b^2 + 9b^2 + 100 - 60b = 100 \rightarrow 10b^2 - 60b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow b(10b - 60) = 0 \rightarrow b = 0, b = 6$$

Base: 18 m; Altura: 6 m