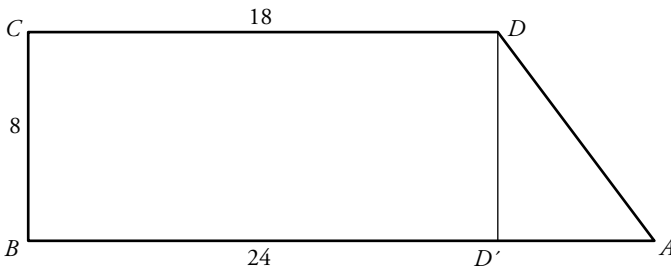


BLOQUE II: TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS

AUTOEVALUACIÓN

Página 152

- 1 Las bases de un trapecio rectángulo miden 18 cm y 24 cm y su altura es 8 cm. Calcula sus ángulos y su área.



Sabemos que un trapecio rectángulo tiene un lado perpendicular a sus dos bases, cuya medida es la altura del trapecio $h = 8$.

Con los datos que nos dan podemos buscar directamente su área:

$$A = 8 \cdot \frac{24+18}{2} = 168 \text{ cm}^2$$

Conocemos sus ángulos \hat{B} y \hat{C} ya que son rectos (si no, no sería un trapecio rectángulo) y también sabemos que sus ángulos suman $360^\circ \rightarrow 360^\circ = 90^\circ + 90^\circ + \hat{A} + \hat{D} \rightarrow \hat{D} = 180^\circ - \hat{A}$ (*)

Consideremos el triángulo rectángulo ADD' , busquemos $\overline{AD'}$:

$$\overline{BA} = \overline{BD'} + \overline{D'A} \rightarrow 24 = 18 + \overline{D'A} \rightarrow \overline{D'A} = 6$$

Y podemos aplicar el teorema de Pitágoras: $\overline{AD}^2 = \overline{AD'}^2 + h^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow \overline{AD} = 10$

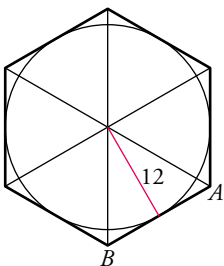
$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{\overline{AD}} = \frac{8}{10} = 0,8 \rightarrow \hat{A} = 53,1^\circ$$

Y volviendo a (*): $\hat{D} = 180^\circ - 53,1^\circ = 126,9^\circ$

- 2 Calcula el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de 12 cm de radio.

Un hexágono regular contiene 6 triángulos iguales, por lo que podemos calcular su área a través del área de sus triángulos: $A_H = 6A_T$

En este caso, al ser la circunferencia circunscrita, su radio nos da la altura de dichos triángulos.

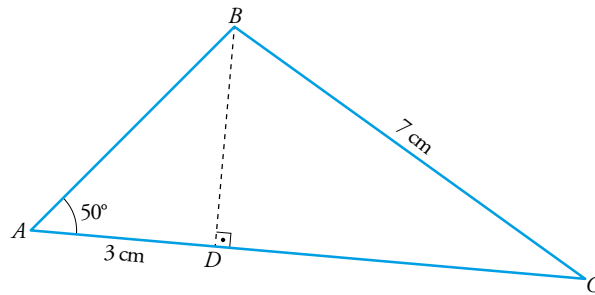


Sabemos que son triángulos equiláteros de lado L . Aplicamos el teorema de Pitágoras a una mitad del triángulo que es rectángulo:

$$L^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 12^2 \rightarrow L^2 - \frac{L^2}{4} = 144 \rightarrow L = 13,86 \text{ cm}$$

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{13,86 \cdot 12}{2} = 83,16 \text{ cm}^2 \rightarrow A_H = 6A_T = 499 \text{ cm}^2$$

3 Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC .



$$\cos 50^\circ = \frac{3}{AB} \rightarrow \overline{AB} = \frac{3}{\cos 50^\circ} = 4,67 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow \overline{BD} = 3 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 3,58 \text{ cm}$$

$$\overline{DC}^2 + 3,58^2 = 7^2 \rightarrow \overline{DC} = \sqrt{7^2 - 3,58^2} = 6,02 \text{ cm}$$

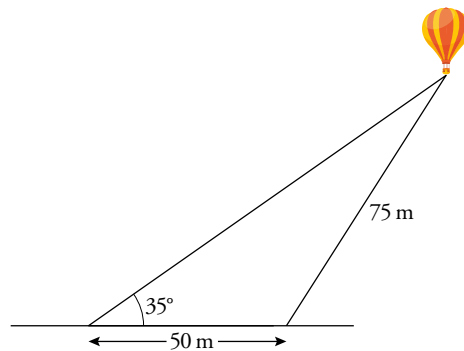
$$\overline{AC} = 3 + 6,02 = 9,02 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{3,58}{7} = 0,511$$

$$\hat{C} = 30^\circ 43' 49,66''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 30^\circ 43' 49,66'' = 99^\circ 16' 10,34''$$

4 Un globo aerostático está sujeto al suelo en dos puntos que distan entre sí 50 m. El cable más corto mide 75 m y el más largo forma un ángulo de 35° con el suelo. Halla la altura a la que se encuentra el globo y la longitud del cable más largo.



Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia desde la base de esa altura hasta el cable más corto.

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{h}{50+x} \rightarrow h = \operatorname{tg} 35^\circ (50+x) \rightarrow h = 0,7(50+x) \rightarrow h = 3,5 + 0,7x \\ x^2 + h^2 = 75^2 \end{cases}$$

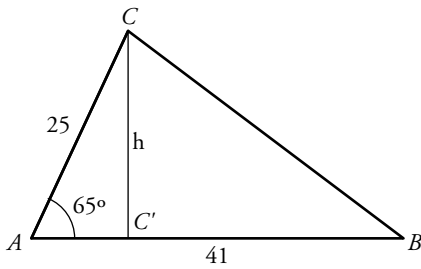
$$x^2 + (3,5 + 0,7x)^2 = 75^2 \rightarrow 1,49x^2 + 4,9x - 5612,75 = 0, \text{ que da lugar a una solución válida, } x = 59,7 \text{ m.}$$

$$\text{La altura del globo es } h = 3,5 + 0,7 \cdot 59,7 = 45,29 \text{ m}$$

$$\text{La longitud del cable más largo es } \sqrt{(50 + 59,7)^2 + 45,29^2} = 118,68 \text{ m}$$

5 Resuelve el triángulo ABC y halla su área conociendo:

$$\overline{AC} = 25 \text{ m} \quad \overline{AB} = 41 \text{ m} \quad \widehat{A} = 65^\circ$$



Empezaremos buscando h para poder calcular el área del triángulo:

$$\text{sen } 65^\circ = \frac{h}{25} \rightarrow h = 25 \cdot 0,9 = 22,66$$

$$\text{Ya podemos buscar el área del triángulo: } A_T = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} = \frac{41 \cdot 22,66}{2} = 464,5$$

Nos piden resolver el triángulo, así que buscaremos los ángulos y lados que nos falta conocer.

Si consideramos el triángulo $AC'C$:

$$\text{cos } 65^\circ = \frac{AC'}{25} \rightarrow \overline{AC'} = 10,6 \rightarrow \overline{BC'} = \overline{AB} - \overline{AC'} = 41 - 10,6 = 30,4 \text{ m}$$

Vayamos ahora a considerar el triángulo CBC' :

$$\left. \begin{array}{l} \text{cos } \hat{B} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}} = \frac{30,4}{\overline{BC}} \\ \text{sen } \hat{B} = \frac{h}{\overline{BC}} = \frac{22,66}{\overline{BC}} \end{array} \right\} \rightarrow \text{tg } \hat{B} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{cos } \hat{B}} = \frac{22,66}{30,4} = 0,75 \rightarrow \hat{B} = 36,7^\circ$$

Como ya conocemos dos ángulos de nuestro triángulo, podemos encontrar fácilmente el tercero:

$$180 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 65^\circ + 36,7^\circ + \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 78,3^\circ$$

Calculemos \overline{BC} :

$$\text{cos } 36,7^\circ = 0,8 = \frac{30,4}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = 38 \text{ m}$$

6 Justifica si existe algún ángulo α tal que $\text{tg } \alpha = \frac{2}{3}$ y $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{3}{2} \text{sen } \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} \neq 1$$

No se satisface la identidad fundamental, luego no existe tal ángulo.

$$c) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (\sqrt{5}/5)}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$$

$$d) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

$$e) \text{ Al inicio del problema hemos deducido que } \operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$f) \operatorname{sec} (\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos (\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

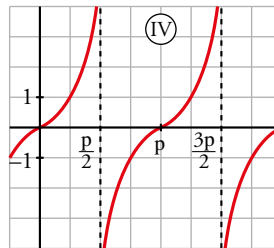
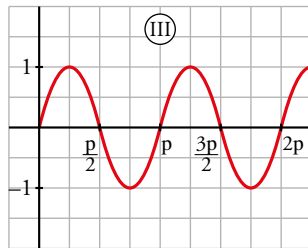
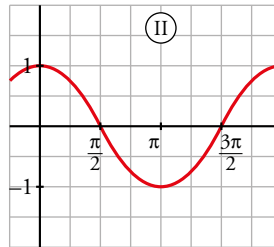
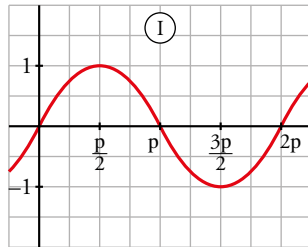
10 Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:

a) $y = \operatorname{tg} x$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$

d) $y = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$



a) IV

b) III

c) I

d) II

11 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = 2 \cos^2 x - 1$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

c) $\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{sec} x$

a) $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1$

b) $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$

c) Sumamos las fracciones poniendo denominador común y desarrollamos:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} &= \frac{(1 - \operatorname{sen} x)^2 + \cos^2 x}{\cos x (1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x + \cos^2 x}{\cos x (1 - \operatorname{sen} x)} = \\ &= \frac{1 + 1 - 2 \operatorname{sen} x}{\cos x (1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{2 - 2 \operatorname{sen} x}{\cos x (1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{2(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos x (1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{2}{\cos x} = 2 \operatorname{sec} x \end{aligned}$$

12 Resuelve dando las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$:

$$\begin{cases} \text{sen}(x + y) = 1 \\ \cos x + \text{sen } y = 1 \end{cases}$$

$$\text{sen}(x + y) = 1 \rightarrow x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$

Sustituimos en la segunda ecuación y aplicamos la fórmula del seno de una resta:

$$1 = \cos x + \text{sen}(90^\circ - x) = \cos x + \text{sen } 90^\circ \cdot \cos x - \cos 90^\circ \cdot \text{sen } x = \cos x + \cos x \rightarrow 1 = 2 \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60, x = 300$$

Buscamos solamente las soluciones en $[0, 2\pi)$:

$$x = 60^\circ \rightarrow y = 30^\circ$$

$$x = 300^\circ \rightarrow y = -210^\circ$$

13 Dado el número complejo $z = 3_{60^\circ}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.

$$\bar{z} = 3_{360^\circ - 60^\circ} = 3_{300^\circ}$$

$$-z = 3_{60^\circ + 180^\circ} = 3_{240^\circ}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0^\circ}}{3_{60^\circ}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60^\circ} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300^\circ}$$

14 Simplifica: $\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

$$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1; i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

$$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$$

$$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

15 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$.

$$[x - (-1 + \sqrt{3}i)][x - (-1 - \sqrt{3}i)] = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$$

16 Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.

Hacemos giros de 90° . Para ello, multiplicamos por 1_{90° :

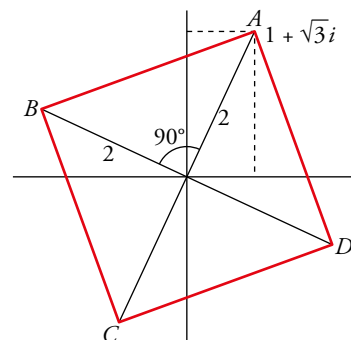
$$A = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ}$$

$$B = 2_{60^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{150^\circ}$$

$$C = 2_{150^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{240^\circ}$$

$$D = 2_{240^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 2_{330^\circ}$$

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2} \text{ u}$$



17 Calcula a y b para que se verifique esta igualdad:

$$\frac{a - 2i}{3 - i} = \frac{b - i}{5}$$

$$\frac{a - 2i}{3 - i} = \frac{b - i}{5} \rightarrow 5(a - 2i) = (b - i)(3 - i) \rightarrow 5a - 10i = 3b - bi - 3i + i^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5a - 10i = 3b - 1 + (-b - 3)i \rightarrow \begin{cases} 5a = 3b - 1 \\ -10 = -b - 3 \end{cases} \rightarrow a = 4, b = 7$$

18 Resuelve la ecuación $2z^2 + 8 = 0$.

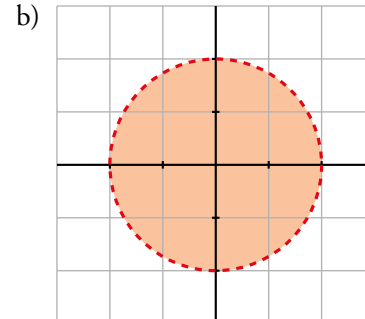
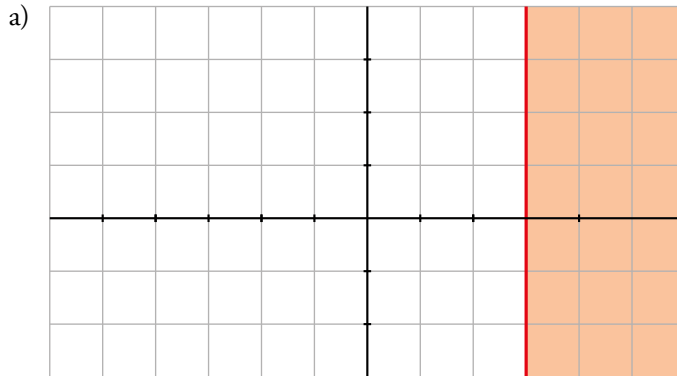
$$2z^2 + 8 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i \rightarrow z_1 = 2i; z_2 = -2i$$

19 Representa gráficamente:

a) $Re(z) \geq 3$

b) $|z| < 2$

c) $z - \bar{z} = -4i$



c) Si $z = a + bi \rightarrow z - \bar{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$

$$z - \bar{z} = -4i$$

Por tanto: $2bi = -4i \rightarrow b = -2$

