

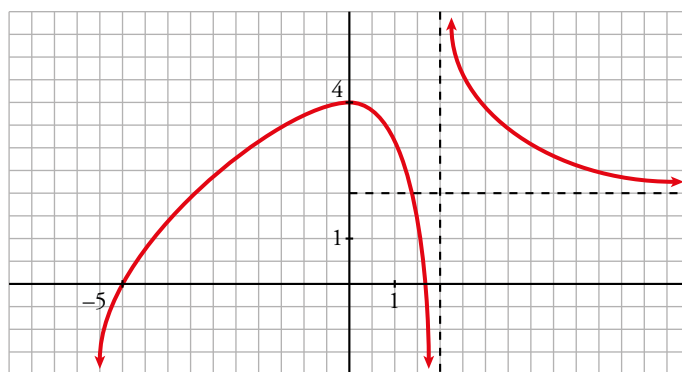
8 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 189

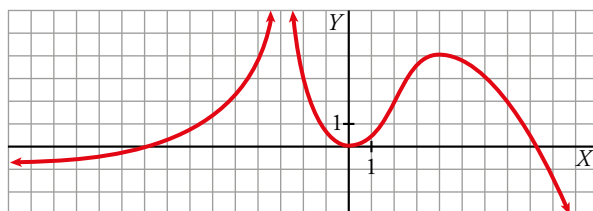
Resuelve

Límites y derivadas para representar una función

- Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadrículado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
 - $f(0) = 4$; $f'(0) = 0$
 - $f(-5) = 0$; $f(1,75) = 0$
 - f es derivable en todo \mathbb{R} , salvo en $x = 2$.



- Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar al ejercicio anterior, la siguiente función:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$
- $f(-9) = 0$; $f'(0) = 0$; $f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4$; $f'(4) = 0$

1 ELEMENTOS FUNDAMENTALES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CURVAS

Página 191

1 Halla el dominio de estas funciones y di dónde son continuas y dónde derivables.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3 & \text{b) } y = \frac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4} & \text{c) } y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \text{d) } y = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} \\ \text{e) } y = \sqrt{x^2 - 2x} & \text{f) } y = \ln(x^2 - 1) & \text{g) } y = \ln(x^2 + 1) & \text{h) } y = \frac{e^x}{x^2} \end{array}$$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R}$

y es un polinomio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

$$\text{b) } x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

y es un cociente de polinomios, que solo daría problemas de continuidad y derivabilidad en $x = 4$ y $x = 1$, luego es continua y derivable en su dominio, $\mathbb{R} - \{1, 4\}$.

c) Como $\operatorname{sen} x$ se anula cuando $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, la función dada no existe para estos valores de x ya que se produciría una división entre 0. Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \{k\pi\}$.

La función es continua y derivable en todo su dominio.

d) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

Se sigue del razonamiento del apartado b) que es continua y derivable en \mathbb{R} .

e) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

Al ser una función raíz, la derivada no existirá en los puntos en los que se anula, $x = 2$ y $x = -2$. Es continua en todo su dominio, $\mathbb{R} - (0, 2)$, pero solo es derivable en $\mathbb{R} - [0, 2]$.

f) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Dominio} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

La derivada no existe para $x^2 - 1 = 0$, pero son puntos fuera del dominio, luego es continua y derivable en todo su dominio.

g) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R}$

La derivada existe para todo punto x , luego es derivable y continua en \mathbb{R} .

h) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$

La derivada solo da problemas fuera del dominio, luego es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

2 Di dónde son continuas y dónde son derivables las funciones:

a) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

b) $y = |x^3 - x|$

c) $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

d) $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$

a) $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Es continua y derivable en su dominio.

b) La función $y = |x^3 - x|$ es continua en todo su dominio, que es \mathbb{R} . Por tener puntos angulosos donde se anula el polinomio $x^3 - x$, no es derivable en dichos puntos; es decir, en $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$ no es derivable.

c) El denominador solo se anula en $x = 1$. Por tanto: $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$. Es continua y derivable en su dominio.

d) Veamos primero el dominio de definición de la función $y = \log(5 - \sqrt{169 - x^2})$.

Para que la función exista, debe ser $5 - \sqrt{169 - x^2} > 0$, es decir, $\sqrt{169 - x^2} < 5$ y además x debe estar comprendido entre -13 y 13 para que tenga sentido la raíz cuadrada.

Elevando al cuadrado:

$$169 - x^2 < 25 \rightarrow 144 < x^2 \rightarrow 12 < x \leq 13 \text{ y } -13 \leq x < -12$$

Luego el dominio de definición es $[-13, -12) \cup (12, 13]$.

En su dominio la función es continua. En $x = -13$ y $x = 13$ la función tiene puntos de tangente vertical, luego en ellos no es derivable. Por tanto, es derivable en $(-13, -12) \cup (12, 13)$.

Página 192

3 Halla las simetrías y las periodicidades de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2}$

c) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$

e) $y = \operatorname{sen} x + 1/2 (\operatorname{sen} 2x)$

f) $y = \sqrt[3]{\cos x + 5}$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

b) $f(-x) = \sqrt{x^2 - 2} = f(x)$

Es una función par: es simétrica respecto al eje Y .

No es periódica.

c) $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

d) $f(-x) = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

e) $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(-2x)) = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x)) = -f(x)$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas. Es periódica de período 2π .

f) Como $\cos(-x) = \cos x$, la función es par.

Por otro lado, $\cos x$ es periódica de período 2π . Por tanto, la función dada también es periódica de período 2π .

Página 193

4 Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x}$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

c) $y = \frac{3}{\sqrt{4-x}}$

d) $y = \log(x^2 - 4)$

e) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$

f) $y = \frac{2x+6}{x^2+7x+12}$

g) $y = \frac{2}{x-3} + \ln(x+2)$

h) $y = 3 - \operatorname{tg}\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

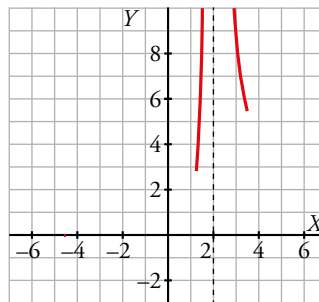
Ten en cuenta que en algunos apartados el numerador y el denominador pueden tener raíces comunes.

a) El denominador se anula cuando $x = 2$ y cuando $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = +\infty$, ya que en las cercanías del punto 2 los dos términos de la fracción son

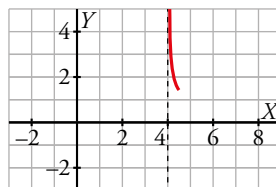
positivos. Por tanto, en $x = 2$ hay una asíntota vertical.

Por otro lado, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(x-2)^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 0$ y en $x = 0$ no hay una asíntota vertical.



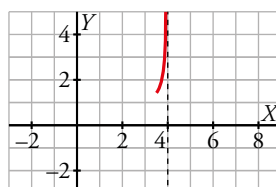
b) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(4, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{x-4}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



c) El denominador se anula cuando $x = 4$ y el dominio de la función es el intervalo $(-\infty, 4)$.

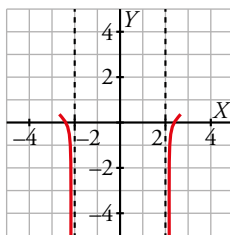
$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{\sqrt{4-x}} = +\infty$ y en $x = 4$ tenemos una asíntota vertical.



d) El dominio de definición es $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ ya que $x^2 - 4 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \log(x^2 - 4) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2^+} \log(x^2 - 4) = -\infty \text{ porque en ambos casos } x^2 - 4 \rightarrow 0^+.$$

Luego tiene dos asíntotas verticales: una en $x = -2$ y otra en $x = 2$.



e) El denominador se anula cuando $x = 1$, $x = -1$.

El dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

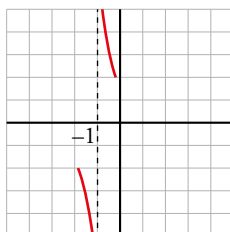
Observamos que el numerador también se anula en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

En $x = 1$, hay una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = +\infty$$

Por tanto, en $x = -1$ hay una asíntota vertical.



f) El denominador se anula cuando $x = -4$, $x = -3$.

El dominio de la función es $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, +\infty)$.

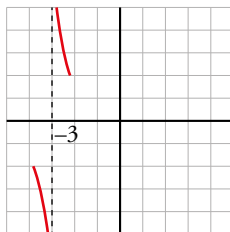
El numerador se anula cuando $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{(x+4)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{x+4} = 2$$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x+6}{x^2+7x+12} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = -4$.



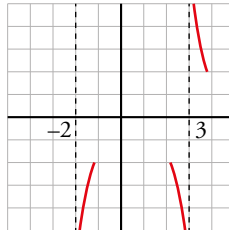
g) $x - 3$ se anula cuando $x = 3$ mientras que $\ln(x + 2)$ existe solo si $x > -2$.

El dominio de la función es $(-2, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left[\frac{2}{x-3} + \ln(x+2) \right] = -\infty$$

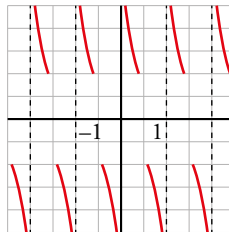
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left[\frac{2}{x-3} + \ln(x+2) \right] = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{2}{x-3} + \ln(x+2) \right] = +\infty$$

Hay dos asíntotas verticales en $x = -2$ y en $x = 3$.



$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow k^-} \operatorname{tg}\left(\frac{(2x+1)\pi}{2}\right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow k^+} \operatorname{tg}\left(\frac{(2x+1)\pi}{2}\right) = +\infty$$

La función del enunciado tiene asíntotas verticales en $x = k$, con k entero.



Página 195

5 Halla las ramas en el infinito de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

e) $y = \ln(x^2 + 1)$

f) $y = 2^{x-1}$

g) $y = x \operatorname{sen} x$

h) $y = x - \cos x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - 20x^3) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 20x^3) = -\infty$$

Tiene sendas ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser una función polinómica.

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$

En el infinito, la función dada es equivalente a $x^2 + 1$, luego tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2} = x + 4 + \frac{12x - 16}{(x-2)^2}$

La función tiene una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y es la recta $y = x + 4$.

d) En el infinito, la función es equivalente a $\sqrt{x^2} = |x|$, luego $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$

$y = \ln(x^2 + 1)$ es equivalente en el infinito a $y = \ln(x^2) = 2 \ln|x|$.

Luego $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln|x|}{x} = 0$.

Lo mismo ocurre cuando $x \rightarrow -\infty$ y, por tanto, tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

f) Esta función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow +\infty$ por ser una función exponencial. Por el mismo motivo, la recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \operatorname{sen} x)$ no existe.

Análogamente ocurre cuando $x \rightarrow -\infty$ y, por tanto, esta función no tiene ni asíntotas ni ramas parabólicas.

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\cos x}{x}\right) = 1$ porque la función $\cos x$ está acotada entre -1 y 1 .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \cos x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ no existe.

En consecuencia, no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.

6 ¿Qué tipo de ramas en el infinito tienen estas funciones?

a) $y = \frac{1}{x+1}$

b) $y = \frac{3x}{x+1}$

c) $y = \frac{x^2}{x+1}$

d) $y = \frac{x^4}{x+1}$

e) $y = \frac{x^2}{e^x}$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3}$

g) $y = x + \sqrt{x}$

h) $y = \operatorname{tg} x$

a) Tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Es la recta $y = 0$.

b) $y = \frac{3x}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$ tiene una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Es la recta $y = 3$.

c) $y = \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$. Por tanto, la recta $y = x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

d) $y = \frac{x^4}{x+1} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$ tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido por ser equivalente en el infinito a una función polinómica.

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. La recta $y = 0$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2/e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$. La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 + 3}{x^3}} = 0$$

Se da la misma situación cuando $x \rightarrow -\infty$ por ser una función par. Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más lento.

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más lento cuando $x \rightarrow +\infty$.

Como su dominio de definición es el intervalo $[0, +\infty)$, no podemos estudiarla cuando $x \rightarrow -\infty$.

h) La función $y = \operatorname{tg} x$ es periódica y no acotada. No tiene asíntotas ni ramas parabólicas en el infinito.

Página 196

7 Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de estas funciones:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

b) $y = \ln(x^2 + 1)$

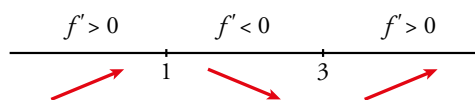
a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

- $f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

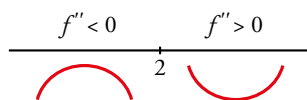


Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Signo de $f''(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = \ln(x^2 + 1)$. Dominio = \mathbb{R}

- $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

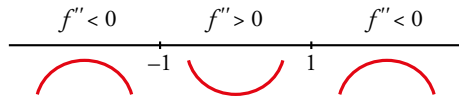
$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array} \right\} \text{ Hay un mínimo en } (0, 0).$$

$$\bullet f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$



Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

8 Halla los puntos singulares de:

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

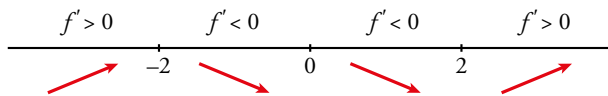
d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. Dominio = \mathbb{R}

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



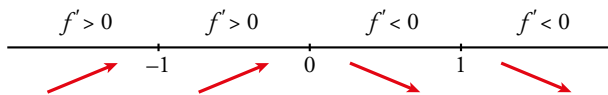
Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



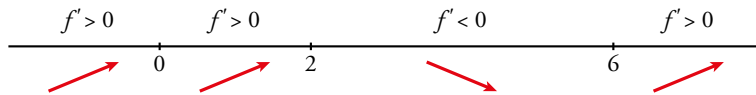
Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $(6, \frac{27}{2})$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$


$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x=1 \notin \text{Dominio}.$$

No hay puntos singulares.

2 ▶ EL VALOR ABSOLUTO EN LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Página 197

1  Sumamos. [La representación de las funciones indicadas permite trabajar la innovación (dimensión productiva)].

Representa:

a) $y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

b) $y = |x - 5|x$

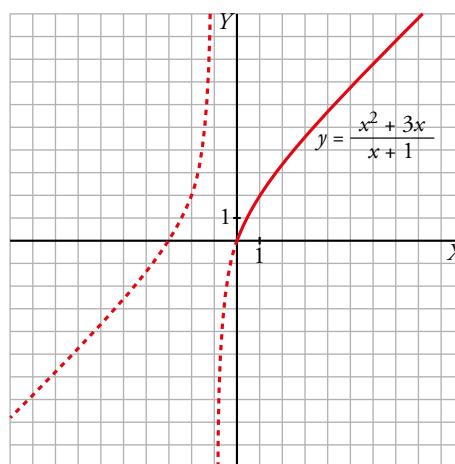
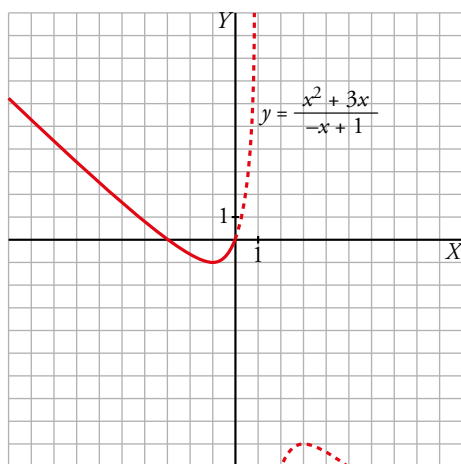
c) $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

d) $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$

a) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo x es 0. Por tanto:

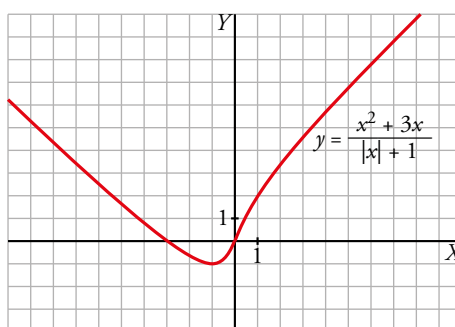
$$x < 0, |x| = -x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

$$x \geq 0, |x| = x \rightarrow y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$



Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

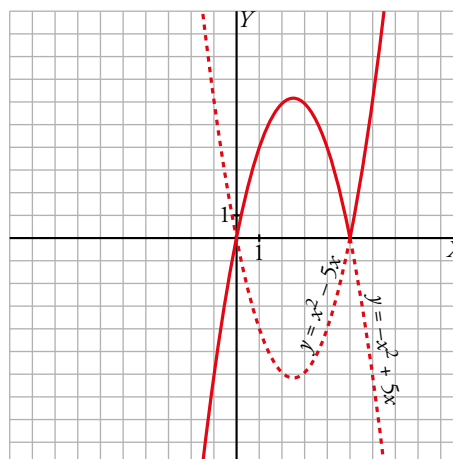


b) El único valor absoluto que interviene es $|x - 5|$. La abscisa donde cambia de signo $x - 5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$$x < 5 \rightarrow |x - 5| = -x + 5 \rightarrow y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$$

$$x \geq 5 \rightarrow |x - 5| = x - 5 \rightarrow y = (x - 5)x = x^2 - 5x$$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



c) Intervienen dos valores absolutos, $|x + 1|$ y $|x - 3|$, que cambian de signo en las abscisas $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Por tanto:

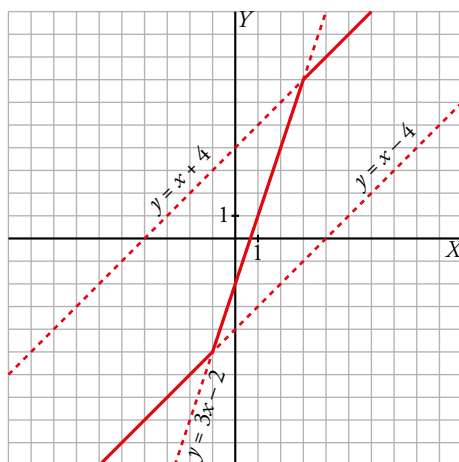
$$x < -1, |x + 1| = -x - 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$$

$$-1 \leq x < 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$$

$$x \geq 3, |x + 1| = x + 1 \text{ y } |x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$$

Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



d) Las abscisas en donde cambia de signo $x^2 - 1$ son -1 y 1 . Analizamos cómo queda definido el valor absoluto:

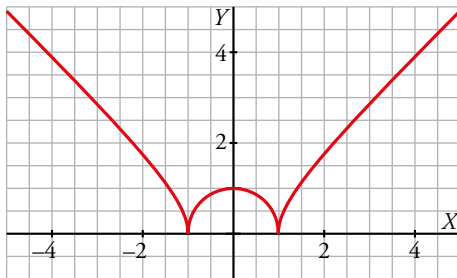
$$x < -1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$-1 \leq x < 1 \rightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x \geq 1 \rightarrow |x^2 - 1| = x^2 - 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$$


$$y = \sqrt{|x^2 - 1|} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y la gráfica es:



3 ► REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Página 199

- 1  [La representación de las funciones requiere poner en práctica la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].

Representa estas funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

e) $y = x^3 - 3x$

f) $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- Simetrías:

$$f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punto: $(0, 7)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{7}, 0)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(\sqrt{7}, 0)$

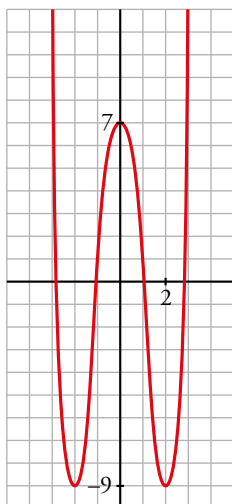
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$ y $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{-17}{9}\right)$

- Gráfica:



b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- Simetrías:

$f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, -64); (-3, -189)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+432}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \end{cases} \begin{cases} x \approx 2,86 \\ x \approx -4,19 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (-4,19; 0)

- Puntos de inflexión:

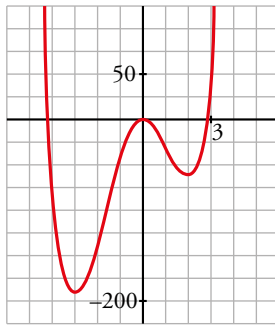
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1,12 \\ x \approx -1,79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; -34,82) y (-1,79; -107,22)

- Gráfica:



c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- Simetrías:

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x-1)(x+1)(x-3) = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos: (1, 7); (-1, -9); (3, -9)

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: (0, 0)

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 12) = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3,65 \\ x \approx -1,65 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2, 0); (3,65; 0); (-1,65; 0)

- Puntos de inflexión:

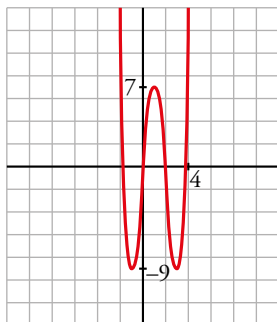
$$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2,15 \\ x \approx -0,15 \end{cases}$$

Puntos: (2,15; -1,83) y (-0,15; -1,74)

- Gráfica:



d) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- Simetrías:

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y , ni respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^2(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Puntos: $(0, -16)$; $(1, -17)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -16 \rightarrow$ Punto: $(0, -16)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \begin{cases} x=2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$

$3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \rightarrow$ tiene una sola raíz, que está entre -2 y -1 ; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

Puntos: $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con k entre -2 y -1 .

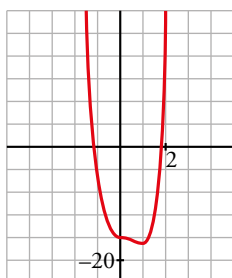
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 12x(3x-2) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{-448}{27}\right)$

- Gráfica:



e) $y = x^3 - 3x$

- Simetrías:

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Ramas infinitas:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 3x = 0 \rightarrow x(x^2 - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$

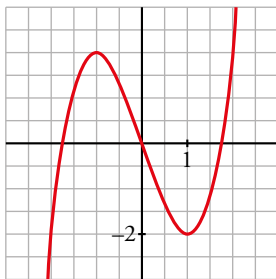
Puntos: $(0, 0)$; $(-\sqrt{3}, 0)$; $(\sqrt{3}, 0)$

- Puntos de inflexión:

$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

- Gráfica:



f) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- Simetrías:

$f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje Y .

- Ramas infinitas:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2, -4)$; $(2, -4)$

- Cortes con los ejes:

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 \left(\frac{1}{4} x^2 - 2 \right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Puntos: $(0, 0)$; $(-2\sqrt{2}, 0)$; $(2\sqrt{2}, 0)$

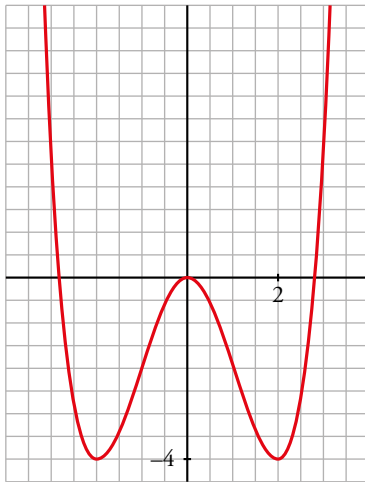
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 3x^2 - 4$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- Gráfica:



4 ► REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Página 201

1 Representa:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad \text{b) } y = \frac{x^2-9}{x^2-4} \qquad \text{c) } y = \frac{x}{x^2-2x-8} \qquad \text{d) } y = \frac{x^3+4x^2+2}{2x}$$

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}. \text{ Dominio} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x). \text{ Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.}$$

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Asíntota vertical en } x = 1.$$

- Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2} \rightarrow y = -x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - (-x) > 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por encima)}$$

$$f(x) - (-x) < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2}$$

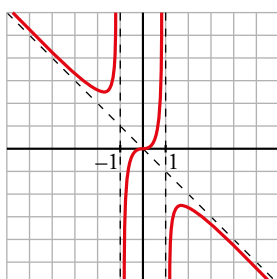
$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(-x^2 + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Puntos: } (0, 0); \left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Cortes con los ejes:

Corta a los ejes en (0, 0).

- Gráfica:



b) $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x). \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- Asíntota horizontal:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \frac{5}{x^2 - 4} \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow -\infty \text{ (curva por debajo)}$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty \text{ (curva por debajo)}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

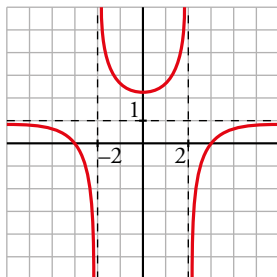
- Cortes con los ejes:

$$\text{—Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{9}{4} \rightarrow \text{Punto: } \left(0, \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{—Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

- Gráfica:



c) $y = \frac{x}{x^2 - 2x - 8}$

- $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$

Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x}{x^2 + 2x - 8}$$

$f(-x)$ no es igual ni a $-f(x)$ ni a $f(x)$. No es simétrica ni con respecto al origen de coordenadas ni con respecto al eje Y .

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 4.$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ a la que se acerca por encima en $+\infty$ y por debajo en $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 8} \rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 8 - x(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = -\frac{x^2 + 8}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

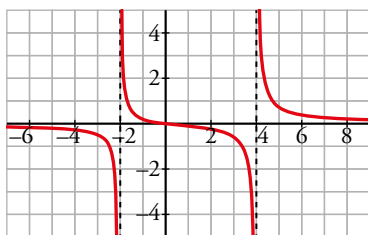
$f'(x)$ no se anula nunca, por tanto, no tiene puntos singulares.

- Cortes con los ejes:

Eje X ($y = 0$): $f(x) = 0 \rightarrow x = 0$. Corta al eje X en $(0, 0)$.

Eje Y ($x = 0$): $f(0) = 0 \rightarrow y = 0$. Corta al eje Y en $(0, 0)$.

- Gráfica:



d) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{2x}$

- Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

- Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2}{-2x}$$

$f(-x)$ no es igual ni a $-f(x)$ ni a $f(x)$. No es simétrica ni con respecto al origen de coordenadas ni con respecto al eje Y .

- Asíntotas verticales.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador más 1, tiene ramas infinitas oblicuas de tipo 1.

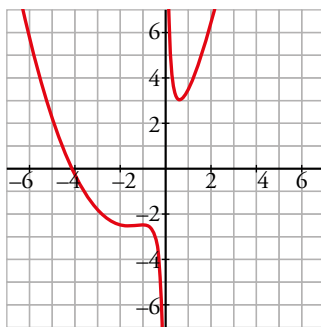
- Puntos singulares:

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2}{2x} \rightarrow f'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$


$$f(-1) = -\frac{5}{2}; f\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 3,05; f\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) \approx -2,55$$

- Gráfica:



5 ► REPRESENTACIÓN DE OTROS TIPOS DE FUNCIONES

Página 203

- 1  Comprobamos. [Antes de corregir el ejercicio en clase, el alumnado puede compartir sus conclusiones y aportar las estrategias que ha seguido para su resolución].

Representa:

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = \frac{\ln x}{x}$

d) $y = \frac{e^x}{x^2}$

e) $y = \frac{e^{-x}}{-x}$

f) $y = x^3 e^x$

a) $y = \sqrt{x^2 + 2x}$

- Dominio: $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

- Simetrías:

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 2x} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \frac{-2}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

$y = -x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$y = x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

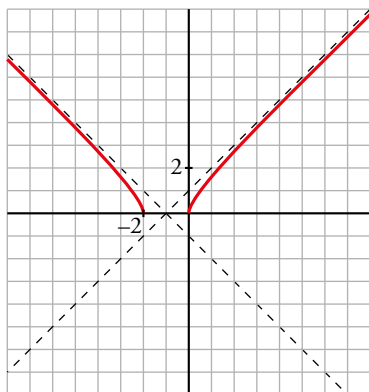
- Cortes con los ejes:

$$\text{—Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 + 2x} \rightarrow x^2 + 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Puntos: (0, 0) y (-2, 0)

$$\text{—Con el eje } Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \text{Punto: (0, 0)}$$

- Gráfica:



$$b) y = \sqrt{x^2 - 9}$$

- Dominio: $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

- Simetrías:

$$f(-x) = \sqrt{x^2 - 9}. \text{ Es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 9} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Como no pertenece al dominio de $f(x)$, no hay puntos singulares.

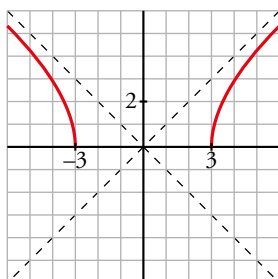
- Cortes con los ejes:

$$\text{—Con el eje } X \rightarrow y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2-9} \rightarrow x^2-9=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$

—No corta al eje Y , pues no existe $f(0)$.

- Gráfica:



c) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: Su dominio de definición es el intervalo $(0, +\infty)$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \rightarrow \text{Tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

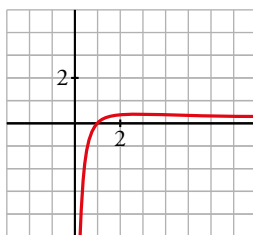
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \frac{1}{e}. \text{ Tiene un punto singular: } \left(e, \frac{1}{e}\right)$$

- Gráfica:



$$d) y = \frac{e^x}{x^2}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo x del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

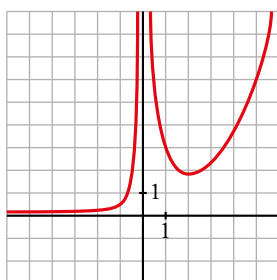
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x (x - 2)}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto} \left(2, \frac{e^2}{4} \right)$$

- Gráfica:



$$e) y = \frac{e^{-x}}{-x}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- No es simétrica.
- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty. \text{ Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ } f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ positivo.}$$

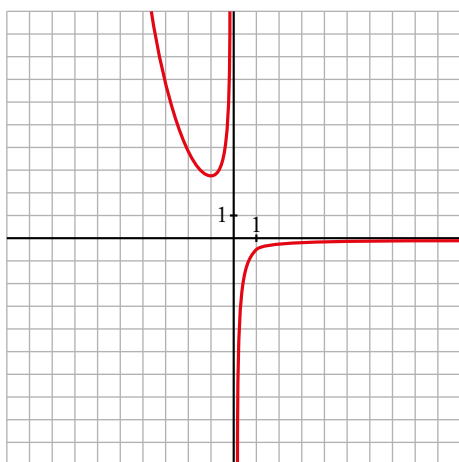
$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (-x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(-x)^2} = \frac{e^{-x} (x + 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Punto: } (-1, -e)$$

- Gráfica:



f) $y = x^3 e^x$

- Su dominio de definición es \mathbb{R} .
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \cdot e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^x = +\infty$$

La función tiene una rama parabólica de crecimiento cada vez más rápido cuando $x \rightarrow +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot e^x = 0 \rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = (3x^2 + x^3) e^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow (3x^2 + x^3) e^x = 0 \rightarrow x = -3, x = 0$$

$$f''(x) = (x^3 + 6x^2 + 6x) e^x$$

$$f''(-3) = (-27 + 54 - 18) e^{-3} = 9e^{-3} \rightarrow x = -3 \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$f(-3) = -27e^{-3} \approx -1,34$$

$f''(0) = 0 \rightarrow x = 0$ es un punto de inflexión ya que la derivada segunda cambia de signo al pasar por él.

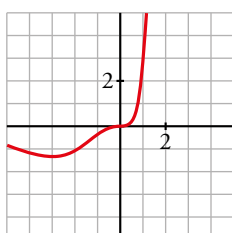
$$f(0) = 0$$

Los otros dos puntos de inflexión son: $x_1 = -3 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -3 - \sqrt{3}$.

$$f(x_1) = -0,57$$

$$f(x_2) = -0,93$$

- Gráfica:



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 204

1. Del estudio a la gráfica (simetrías, asíntotas horizontales, oblicuas y verticales)

Hazlo tú

- Representa $y = f(x)$:

$Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; función impar.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1) \cdot x] = -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(3) = 0; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; f(0) = 0$$

- I) Por ser derivable en su dominio, es continua en él y no tiene puntos angulosos.
- II) Por ser impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

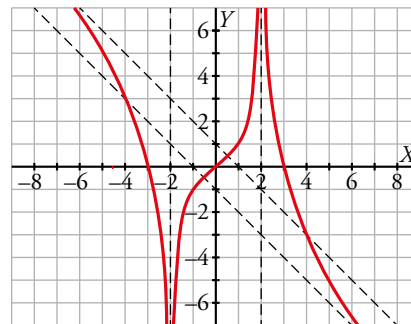
La recta $x = 2$ es una asíntota vertical y, por simetría, también lo es la recta $x = -2$.

Las tendencias en esta última asíntota se obtienen por simetría de las primeras.

Por otra parte, la recta $y = -x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. De nuevo, por simetría, la recta $y = -x + 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

- III) Corta al eje horizontal en los puntos $(3, 0)$, $(0, 0)$ y $(-3, 0)$, siendo este último por simetría.

Finalmente, el punto $(0, 0)$ es el único punto de tangente horizontal y, por las características de la curva, es un punto de inflexión.



3. Representación de una función polinómica

Hazlo tú

- Estudia los puntos de corte con los ejes, los puntos singulares y el crecimiento y decrecimiento de esta función:

$$y = 2x^6 - 3x^4$$

Representa su gráfica.

- Cortes con los ejes:

$$x = 0; f(0) = 0$$

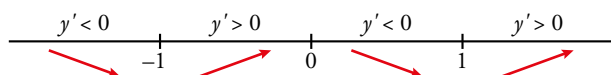
$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow 2x^6 - 3x^4 = 0 \rightarrow x^4(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x = 0 \end{cases}$$

Pasa por $(0, 0)$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ y $(\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$.

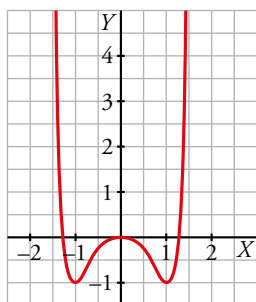
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 12x^5 - 12x^3 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f(-1) = -1 \\ x = 0; f(0) = 0 \\ x = 1; f(1) = -1 \end{cases}$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Es decreciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$ y creciente en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$.



4. Representación de una función racional con ramas parabólicas

Hazlo tú

- Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos para representar esta función:

$$y = \frac{x^4}{(x-1)^2}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Asíntota vertical: $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4}{(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4}{(x-1)^2} = +\infty$$

- No tiene asíntota horizontal ni oblicua, pues el grado del numerador es 2 unidades mayor que el del denominador. Tiene dos ramas parabólicas de tipo 1:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{(x-1)^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{(x-1)^2} = +\infty$$

- Puntos singulares:

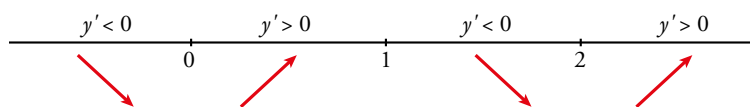
$$y' = \frac{4x^3(x-1)^2 - x^4[2(x-1)]}{[(x-1)^2]^2} = \frac{2x^4 - 4x^3}{(x-1)^3}$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x^4 - 4x^3 = 0 \rightarrow x^3(2x - 4) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0; \quad x = 2$$

$$y(0) = 0; \quad y(2) = 16$$

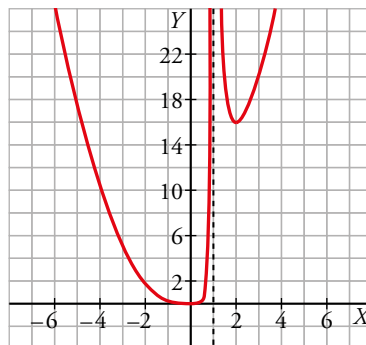
- Signo de la derivada:



- La función crece en $(0, 1) \cup (2, +\infty)$.

Decrece en $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$.

Tiene un máximo en $(2, 16)$ y un mínimo en $(0, 0)$.



5. Representación de una función racional con asíntotas oblicuas

Hazlo tú

- Estudia el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos para representar esta función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

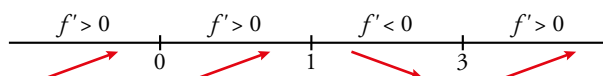
ya que, al estar $x-1$ elevado al cuadrado, el signo del cociente siempre es positivo en las proximidades de 1. Luego, la recta $x=1$ es la asíntota vertical de la función:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota oblicua de la función.}$$

- Puntos singulares:

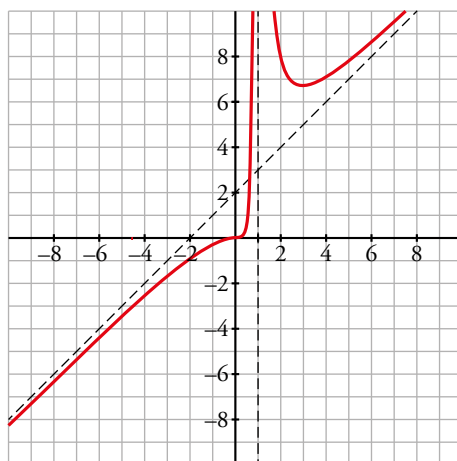
$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$$



$$f(0) = 0$$

$$f(3) = \frac{27}{4}$$



6. Representación de una función racional con asíntotas horizontales

Hazlo tú

- Representa la siguiente función:

$$y = \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)}$$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty. \text{ Lo mismo ocurre cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty$$

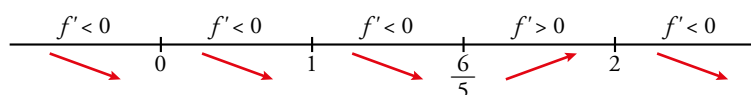
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} = +\infty \text{ ya que, al estar } x-2 \text{ elevado al cuadrado, el signo del cociente no cambia al pasar de un lado al otro de 2 en sus proximidades.}$$

Las rectas $x = 1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

- Puntos singulares:

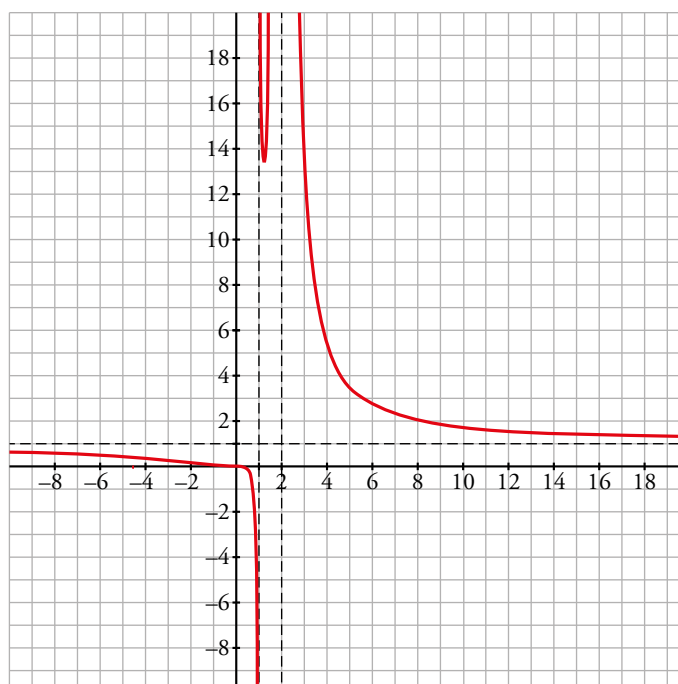
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3}{(x-2)^2(x-1)} \right)' = \frac{3x^2(x-2)^2(x-1) - x^3[2(x-2)(x-1) + (x-2)^2]}{(x-2)^4(x-1)^2} = \\ &= \frac{3x^2(x-2)(x-1) - x^3[2(x-1) + (x-2)]}{(x-2)^3(x-1)^2} = \frac{-5x^3 + 6x^2}{(x-2)^3(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -5x^3 + 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = \frac{6}{5}$$



$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}-2\right)^2\left(\frac{6}{5}-1\right)} = \frac{27}{2}$$



7. Función con valor absoluto

Hazlo tú

- Representa la siguiente función:

$$f(x) = |x| - |x - 3| + |x + 1|$$

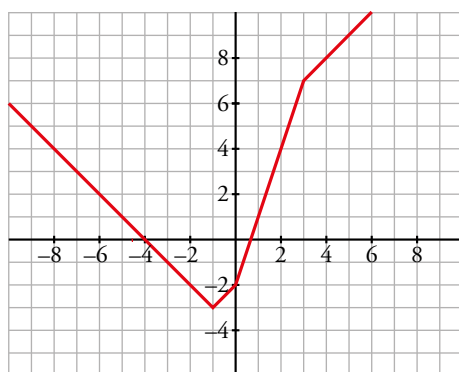
$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$-|x - 3| = \begin{cases} -[-(x - 3)] & \text{si } x < 3 \\ -(x - 3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$|x + 1| = \begin{cases} -(x + 1) & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases} = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los puntos donde cambia de signo cada sumando, sumamos las expresiones y se obtiene:

$$y = |x| - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} -x + x - 3 - x - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x + x - 3 + x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x + x - 3 + x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x - x + 3 + x + 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x - 4 & \text{si } x < -1 \\ x - 2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 3x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



8. Función logarítmica

Hazlo tú

- Representa la siguiente función:

$$y = \ln \frac{x-3}{x-1}$$

- Dominio de definición:

Resolvemos la inecuación $\frac{x-3}{x-1} > 0$ y concluimos que la función está definida en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

- Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x-3}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \frac{x-3}{x-1} = -\infty$$

- Asíntota horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

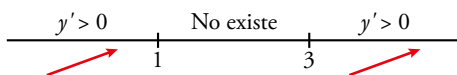
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-3}{x-1} = \ln 1 = 0$$

- Puntos singulares:

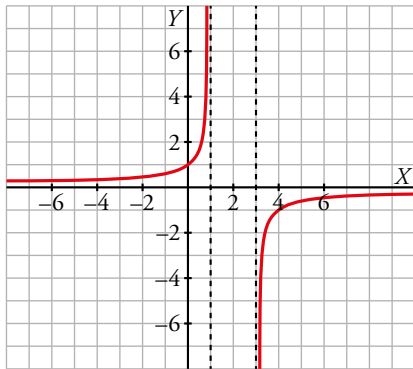
$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-3}{x-1}} \cdot \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x-3)}$$

Como no puede ser 0, no tiene puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



Es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$.



Página 208

9. Estudio y gráfica de otras funciones

Hazlo tú

- Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{\ln x^2}$

b) $y = \frac{2x+1}{e^{-x}}$

- a) • Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

• Tiene simetría impar ya que $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, la estudiamos solo para valores positivos de x .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ tiene una discontinuidad evitable.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x^2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x^2} = +\infty \rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ es una asíntota vertical. Por simetría, la recta } x = -1 \text{ también lo es.}$$

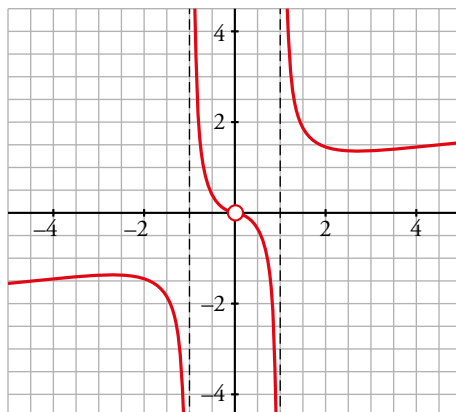
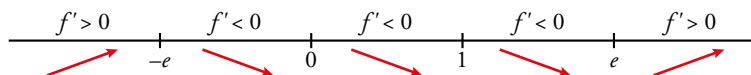
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x/x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \text{Tiene una rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x^2} \right)' = \frac{\ln x^2 - 2}{\ln^2(x^2)} \rightarrow \ln x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{e^2} = \pm e$$

$$f(e) = \frac{e}{2}, f(-e) = -\frac{e}{2}$$



- b) • Su dominio de definición es \mathbb{R} . No tiene asíntotas verticales.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = +\infty, \text{ ya que } e^{-x} \rightarrow 0 \text{ cuando } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{xe^{-x}} = +\infty \rightarrow \text{ Tiene una rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}} = 0 \rightarrow \text{ La recta } y = 0 \text{ es una asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

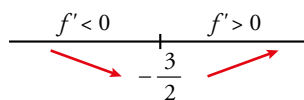
La función corta al eje horizontal en $x = -\frac{1}{2}$.

Si $x < -\frac{1}{2}$, la función toma valores negativos y está por debajo de la asíntota.

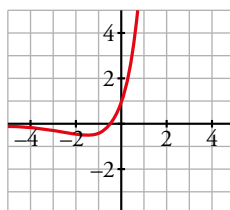
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2e^{-x} - (2x+1)(-e^{-x})}{(e^{-x})^2} = \frac{3+2x}{e^{-x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$



$$f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0,45$$

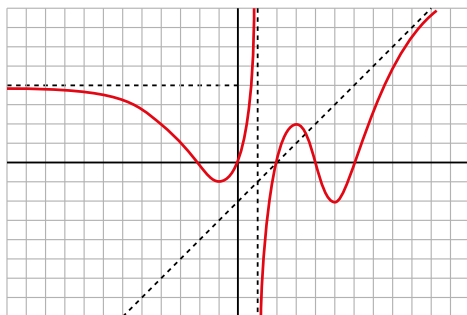


EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 209

1. Descripción de una gráfica

- Describir la siguiente gráfica dando los elementos necesarios para que un compañero la pueda representar a partir de la descripción.



- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$. Es derivable en su dominio puesto que no presenta puntos angulosos.
- La recta $y = 4$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ya que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$. Se acerca por debajo de la asíntota.

La recta $x = 1$ es la asíntota vertical de la función. La posición respecto de la asíntota es:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

La recta $y = x - 2$ es la asíntota oblicua de la función cuando $x \rightarrow +\infty$. La curva corta a la asíntota oblicua en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = \frac{7}{2}$. Después se acerca por debajo de la asíntota.

- Los puntos $(-1, -1)$ y $(5, -2)$ son mínimos relativos de la función.
Solo tiene un máximo relativo, que se encuentra en el punto $(3, 2)$.
- Finalmente, la función corta a los ejes coordenados en los puntos: $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$.

2. Representación de una función polinómica

- Estudiar y representar la siguiente función:

$$f(x) = 40(x^2 + x)^2$$

- Su dominio de definición es \mathbb{R} . Al ser polinómica, es continua y derivable en todo \mathbb{R} .
- No tiene simetrías:

$$f(-x) = 40[(-x)^2 - x]^2 = 40(x^2 - x)^2$$

- Ramas en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 40(x^2 + x)^2 = +\infty$$

Tiene ramas parabólicas, ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{40(x^2 + x)^2}{x} = \pm\infty$.

- Cortes con los ejes:

$$x = 0, f(0) = 0$$

$$y = 0, f(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)^2 = 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pasa por $(-1, 0)$ y $(0, 0)$.

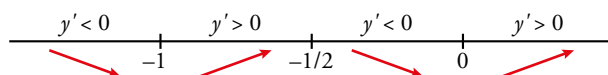
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 80(x^2 + x)(2x + 1)$$

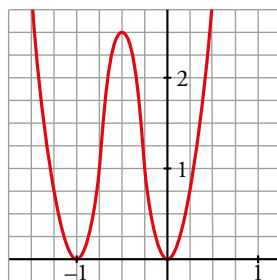
$$f'(x) = 0 \rightarrow (x^2 + x)(2x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1; f(-1) = 0 \\ x = -\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ x = 0; f(0) = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y es creciente en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$.



3. Representación de una función radical

- Representar la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

- Su dominio de definición es \mathbb{R} . Es continua y derivable en todo \mathbb{R} , ya que el radicando es un polinomio que siempre es positivo.
- $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$. Es una función par.
- Ramas infinitas:

Vamos a estudiar solo en $+\infty$. Para $-\infty$ aplicaremos la simetría de la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

La recta $y = x$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$, pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$. Por tanto, la curva queda por encima de la asíntota.

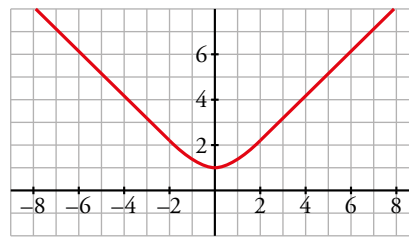
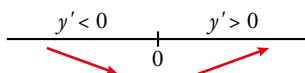
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x = 0, f(0) = 1$$

- Crecimiento y decrecimiento:



Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

4. Curva con asíntotas

- Representar la siguiente función: $f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|}$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

La función tiene simetría par ya que $f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^4+1}}{|-x|} = f(x)$. Basta estudiarla para valores positivos de x .

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} = +\infty \rightarrow$ La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}} = 1$$

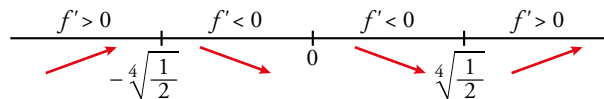
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4+1-x^4}{x(\sqrt{x^4+1}+x^2)} = 0$$

La recta $y = x$ es la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

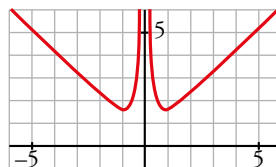
- $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x} \right)' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot x - \sqrt{x^4+1}}{x^2} = \frac{2x^4 - (x^4+1)}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{2x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 0,84$$

(Hemos calculado la derivada suponiendo que x toma valores positivos).



$$x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, y = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+1}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}}} \approx 1,46 \rightarrow \left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}; 1,46 \right) \text{ es un mínimo relativo de la función.}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 210

Para practicar

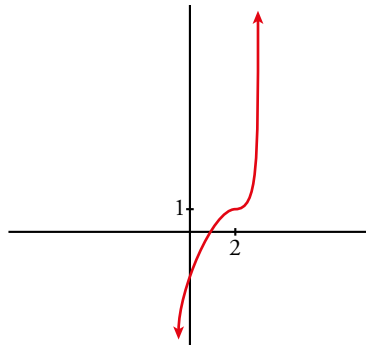
Descripción de una gráfica

1 Representa una función continua y derivable en \mathbb{R} tal que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(2) = 1, f'(x) \geq 0 \text{ para cualquier } x, f'(2) = 0$$



2 De una función $y = f(x)$ tenemos la siguiente información:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

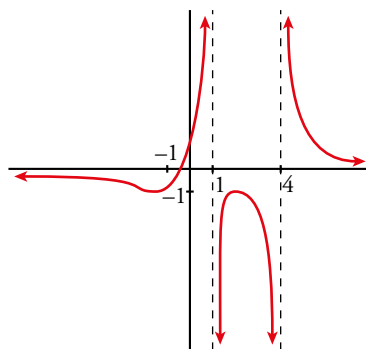
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0$$

$$\text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0$$

$$f'(2) = 0, f(2) = -1; f'(-1) = 0, f(-1) = -1$$

Representala.

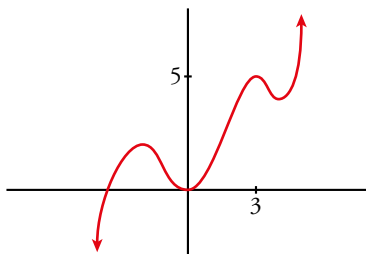


3 Dibuja la gráfica de una función continua y derivable en \mathbb{R} de la que se conocen los siguientes datos:

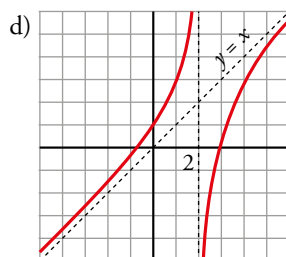
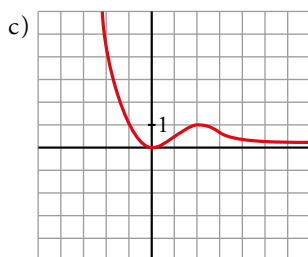
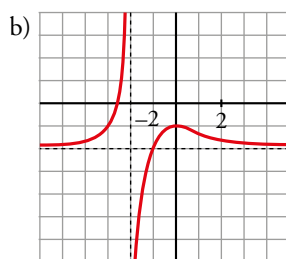
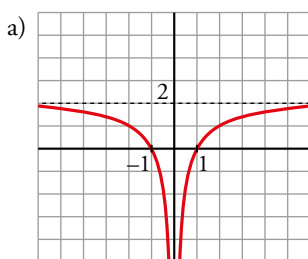
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 0 \text{ si } x = -2, x = 0, x = 3, x = 4 \quad f(-2) = 2; f(0) = 0; f(3) = 5; f(4) = 4$$



4 Describe las siguientes funciones indicando su dominio, sus simetrías (si las tienen), sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Hazlo dando valores de la función, de su derivada y de ciertos límites.



a) • Asíntota horizontal: $y = 2$.

Asíntota vertical: $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

b) • Asíntota horizontal: $y = -2$.

Asíntota vertical: $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > -2$)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:
 $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$.
 - Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.
- c) • Asíntota horizontal: si $x \rightarrow +\infty$, $y = 0$.
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$
- (si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)
- Punto singulares:
 $f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$.
 $f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$.
 - Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.
- d) • Asíntota vertical: $x = 2$.
- $$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$
- Asíntota oblicua: $y = x$
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)
 - $f(x)$ no tiene puntos singulares.
 - Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Características de las funciones

5 Indica el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

b) $y = 3 - \frac{x}{x^2 + 1}$

c) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{3x - 21}}$

e) $y = \ln(4 - \sqrt{x})$

f) $y = \frac{1}{\ln(9 - x^2)}$

g) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 1}}$

- a) Es un polinomio, $\operatorname{Dom} = \mathbb{R}$.
- b) $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por tanto, $\operatorname{Dom} = \mathbb{R}$.
- c) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser no negativo.
 $-x^2 + 3x + 4 \geq 0 \rightarrow$ El dominio de definición es el intervalo $[-1, 4]$.
- d) Para que se pueda definir la función, el radicando debe ser positivo.
 $3x - 21 \geq 0 \rightarrow$ El dominio de definición es el intervalo $(7, +\infty)$.
- e) Para que se pueda definir la función, el argumento del logaritmo debe ser positivo y, además, $x \geq 0$ para que exista la raíz.
 $4 - \sqrt{x} > 0 \rightarrow \sqrt{x} < 4 \rightarrow x$ debe estar en el intervalo $[0, 16)$.
- f) Para que la función esté bien definida, debe ser $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$.

Por otra parte, la función es periódica de período π .

Dentro del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$ cuando $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Usando la periodicidad, el dominio de definición es la unión de todos los intervalos de la forma

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$


g) Por una parte, $-1 \leq x - 2 \leq 1 \rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Teniendo en cuenta que $\arccos 1 = 0$, el dominio de definición es el intervalo $[1, 3)$.

h) La tangente no está definida cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Además, la función no está definida cuando $\operatorname{tg} x = 0$, es decir, cuando $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$.

6  [La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumno coopere para estudiar la simetría de las funciones].

Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

c) $y = \operatorname{tg} \pi x$

d) $y = e^{|x|}$

e) $y = \frac{|x|}{x^2 - 2x}$

f) $y = 2\cos \frac{x}{2}$

a) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = f(x) \rightarrow$ Función par.

b) $f(-x) = \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2 - 3}} = -f(x) \rightarrow$ Función impar.

c) $f(-x) = \operatorname{tg} [\pi(-x)] = -f(x) \rightarrow$ Función impar.

d) $f(-x) = e^{|-x|} = f(x) \rightarrow$ Función par.

e) $f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 2(-x)} = \frac{|x|}{x^2 + 2x} \rightarrow$ No es simétrica.

f) $f(-x) = 2\cos \frac{-x}{2} = f(x) \rightarrow$ Función par.

7 Determina el periodo de cada una de estas funciones:

a) $y = \operatorname{sen} 3x$

b) $y = \operatorname{sen} 2\pi x$

c) $y = \operatorname{tg} \pi x$

d) $y = \operatorname{sen}^2 (x + 1)$

a) $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \operatorname{sen} (3x + 2\pi) = \operatorname{sen} 3x = f(x) \rightarrow$ Su período es $\frac{2\pi}{3}$.

b) $f(x + 1) = \operatorname{sen} [2\pi(x + 1)] = \operatorname{sen} (2\pi x + 2\pi) = \operatorname{sen} 2\pi x = f(x) \rightarrow$ Su período es 1.

c) $f(x + 1) = \operatorname{tg} [\pi(x + 1)] = \operatorname{tg} (\pi x + \pi) = \operatorname{tg} \pi x = f(x) \rightarrow$ Su período es 1.

d) El periodo es el mismo que el de $\operatorname{sen} (x + 1)$, pues si el periodo buscado es T , se verifica:

$$f(x) = f(x + T) \rightarrow \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(x + T)}$$

Y la función $y = \operatorname{sen} (x + 1)$ es igual que la función $y = \operatorname{sen} x$ pero desplazada una unidad a la izquierda. Por tanto, sus periodos coincidirán. Como el periodo de la función $y = \operatorname{sen} x$ es $T = 2\pi$, el periodo buscado también es $T = 2\pi$.

8 Halla las asíntotas verticales de estas funciones e indica la posición relativa de cada curva respecto a ellas:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) $y = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}}$

c) $y = \frac{1}{\ln x}$

d) $y = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2x}$

e) $y = \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

f) $y = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}}$

a) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando $x = 1$ y $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

b) Tiene dos posibles asíntotas verticales ya que su denominador se anula cuando $x = 3$ y $x = -3$. La posición de la función respecto de las asíntotas debe tener en cuenta el dominio de definición, que es $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$

c) El dominio de definición es $(0, +\infty) - \{1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ no hay asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{La recta } x = 1 \text{ es la asíntota vertical de la función.}$$

d) $y = \frac{x(x - 1)}{x^2 - 2x} = \frac{x(x - 1)}{x(x - 2)} = \frac{x - 1}{x - 2}$ salvo en el punto $x = 0$.

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable. En $x = 2$ tiene una asíntota vertical y la posición es:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{x - 2} = +\infty$$

e) El denominador se anula cuando $\operatorname{sen}^2 x = 1$, es decir, cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2) + k\pi} \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = +\infty \text{ ya que } 1 - \operatorname{sen}^2 x > 0 \text{ salvo en los valores de } x \text{ donde están las asíntotas verticales.}$$

f) El denominador se anula cuando $\cos \frac{x}{2} = 0$, es decir, cuando $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Como la función es periódica de período 4π , estudiamos las asíntotas verticales $x = \pi$, $x = 3\pi$ y las demás se obtienen usando la periodicidad.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi^-} \frac{1}{\cos x/2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi^+} \frac{1}{\cos x/2} = +\infty$$

9 Halla las asíntotas horizontales e indica la posición relativa de cada curva respecto de ellas.

a) $y = \frac{x-1}{x^2+2}$ b) $y = \frac{2x^2-1}{3-x^2}$ c) $y = \frac{|1-x|}{\sqrt{x^2+2}}$ d) $y = \frac{3-e^x}{2e^{|x-1|}}$

a) Asíntota horizontal en $y = 0$.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por debajo. Cuando $x \rightarrow +\infty$, está por encima.

b) Asíntota horizontal en $x = -2$.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por debajo. Cuando $x \rightarrow +\infty$, está también por debajo (observa que la función es par).

c) Asíntota horizontal en $y = 1$.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por encima. Cuando $x \rightarrow +\infty$, está por debajo.

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-e^x}{2e^{|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-e^x}{2e^{-|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{(x-1)}(3-e^x)}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-e^x}{2e^{|x-1|}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-e^x}{2e^{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e(3-e^x)}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2e^x} - \frac{e^{2x}}{2e^x} \right] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por encima de $y = 0$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, también está por encima de $y = -\frac{1}{2}$.

10 Halla las asíntotas oblicuas de estas funciones e indica la posición relativa de cada curva respecto de ellas:

a) $y = \frac{3+2x-x^2}{x}$ b) $y = \frac{x^2-5x+2}{2x+3}$ c) $y = \frac{(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2+2}}$ d) $y = \sqrt{3x^2+5}$

a) Si dividimos los polinomios obtenemos cociente $2-x$ y resto 3.

$y = 2-x$ es asíntota oblicua de la función.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por debajo. Cuando $x \rightarrow +\infty$, está por encima.

b) Si dividimos los polinomios obtenemos cociente $\frac{x}{2} - \frac{13}{4}$ y resto $\frac{47}{4}$.

$y = \frac{x}{2} - \frac{13}{4}$ es asíntota oblicua de la función.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, la función está por debajo. Cuando $x \rightarrow +\infty$, está por encima.

$$c) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1/2)^2}{x\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1/2)^2}{x\sqrt{x^2+2}} = \pm 1$$

Dando valores a la expresión, concluimos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2+2}} - x \right] = 1$ y que, por tanto, $y = -x + 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. En este caso, la función está por debajo de la asíntota.

$$\text{Si } x = -1000, \frac{(x-1/2)^2}{x\sqrt{x^2+2}} + x = 0,9992$$

$$\text{Si } x = -10000, \frac{(x-1/2)^2}{x\sqrt{x^2+2}} + x = 0,999925$$

Análogamente, concluimos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2+2}} + x \right] = -1$ y que, por tanto, $y = x - 1$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. En este caso, la función está también por debajo de la asíntota.

$$d) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5}}{x} = \pm\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{3x^2+5} + \sqrt{3}x] = \frac{(\sqrt{3x^2+5} + \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+5-3x^2}{\sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{\sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3}x} = 0$$

Por tanto, $y = -\sqrt{3}x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$. En este caso, la función está por encima de la asíntota.

Análogamente, concluimos que $y = \sqrt{3}x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. En este caso, la función está también por encima de la asíntota.

Página 211

Funciones polinómicas

11 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

e) $y = x^5 - 5x^3$

f) $y = (x-1)^3 - 3x$

g) $y = x^4 - 4x^2$

h) $y = 1 - (x-1)^3$

a) $y = x^3 + 3x^2$

- Ramas infinitas:

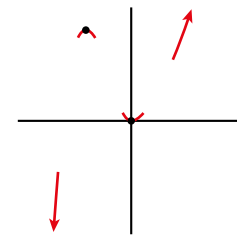
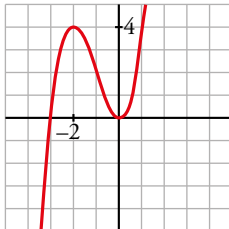
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x; \quad 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x + 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ es un mínimo.} \\ x = -2, \quad f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \rightarrow (-2, 4) \text{ es un máximo.} \end{array} \right.$$

- Representación:



b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Ramas infinitas:

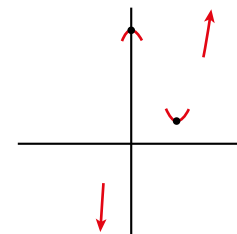
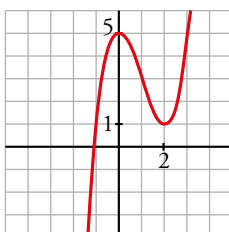
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x; \quad 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x - 6) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, \quad f(0) = 5 \rightarrow (0, 5) \text{ es un máximo.} \\ x = 2, \quad f(2) = 1 \rightarrow (2, 1) \text{ es un mínimo.} \end{array} \right.$$

- Representación:



c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 + 10$

- Ramas infinitas:

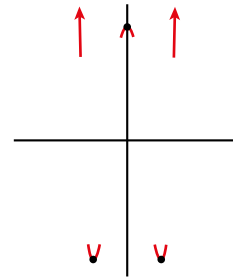
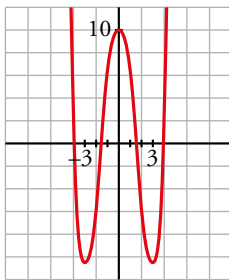
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \quad x^3 - 9x = 0 \rightarrow x(x^2 - 9) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, & f(0) = 10 \rightarrow \text{máximo en } (0, 10). \\ x = 3, & f(3) = -41/4 \rightarrow \text{mínimo en } (3, -41/4). \\ x = -3, & f(-3) = -41/4 \rightarrow \text{mínimo en } (-3, -41/4). \end{cases}$$

- Representación:



d) $y = \frac{5x^4 - x^5}{64}$

- Ramas infinitas:

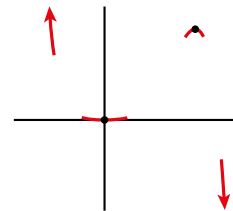
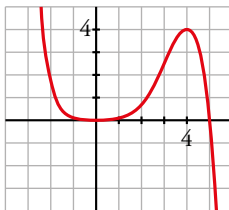
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \rightarrow x^3(20 - 5x) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0, & f(0) = 0 \rightarrow \text{mínimo en } (0, 0). \\ x = 4, & f(4) = 4 \rightarrow \text{máximo en } (4, 4). \end{cases}$$

- Representación:



e) $y = x^5 - 5x^3$

- Ramas infinitas:

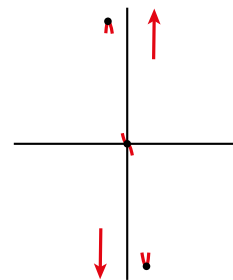
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

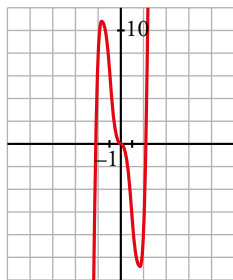
$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \quad 5x^4 - 15x^2 = 0 \rightarrow 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$, un mínimo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ y un punto de inflexión en $(0, 0)$.



- Representación:



f) $y = (x - 1)^3 - 3x$

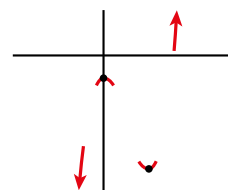
- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

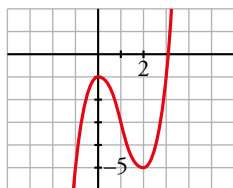
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 - 3; \quad 3(x - 1)^2 - 3 = 0 \rightarrow$$

$$(x - 1)^2 = 1 \begin{cases} x = 0, & f(0) = -1 \rightarrow (0, -1) \text{ es un máximo.} \\ x = 2, & f(2) = -5 \rightarrow (2, -5) \text{ es un mínimo.} \end{cases}$$



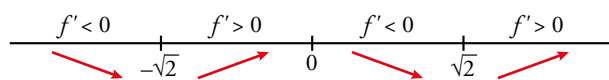
- Representación:



g) $y = x^4 - 4x^2$

- Por ser una función polinómica, su dominio es \mathbb{R} .
- Es simétrica respecto del eje vertical.
- No tiene asíntotas. En el infinito, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

$$f'(x) = 4x^3 - 8x, \quad f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2}, \quad x = 0, \quad x = \sqrt{2}$$



$$x = -\sqrt{2}, \quad y = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 = -4$$

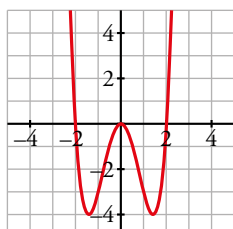
$$x = 0, \quad y = 0$$

$$x = \sqrt{2}, \quad y = -4$$

Los puntos de corte con el eje horizontal son las soluciones de:

$$x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x = -2, \quad x = 0, \quad x = 2$$

- Representación:



h) $y = 1 - (x - 1)^3$

- Por ser una función polinómica, su dominio es \mathbb{R} .
- No tiene asíntotas. En el infinito tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

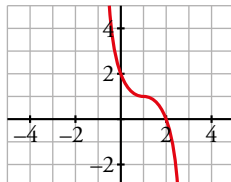
$$f'(x) = -3(x - 1)^2, f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$$

- Es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ ya que la primera derivada es negativa salvo en $x = 1$.

$$x = 1 \rightarrow y = 1$$

- Corta a los ejes en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 2)$.

- Representación:



12 Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Representálas gráficamente:

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

b) $y = 2 - (x - 3)^4$

c) $y = (x + 1)^6 - 5$

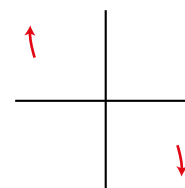
d) $y = 3 - (1 - x)^3$

e) $y = x(x - 1)(x + 3)$

f) $y = (x - 2)^2(x + 1)x^3$

a) $y = 3 + (2 - x)^3$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = -3(2 - x)^2; -3(2 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 2; f(2) = 3$$

Signo de f' : $\frac{f' < 0}{\text{red arrow}} \quad \frac{f' < 0}{\text{red arrow}}}{2}$

f es decreciente en \mathbb{R} .

No tiene máximos ni mínimos.

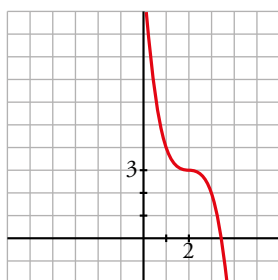
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6(2 - x); 6(2 - x) = 0 \rightarrow x = 2; f(2) = 3$$

Signo de f'' : $\frac{f'' > 0}{\text{red arc}} \quad \frac{f'' < 0}{\text{red arc}}}{2}$

El punto $(2, 3)$ es un punto de inflexión con tangente horizontal ($f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0$).

- Gráfica:

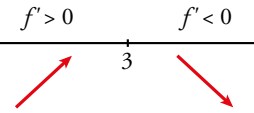


b) $y = 2 - (x - 3)^4$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = -4(x - 3)^3; -4(x - 3)^3 = 0 \rightarrow x = 3; f(3) = 2$$

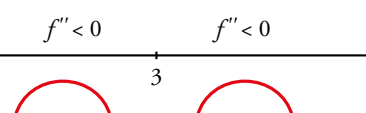
Signo de f' : $\frac{f' > 0}{\quad} \quad \frac{f' < 0}{\quad}$


f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en $(3, 2)$.

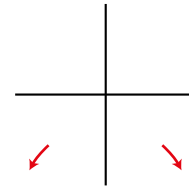
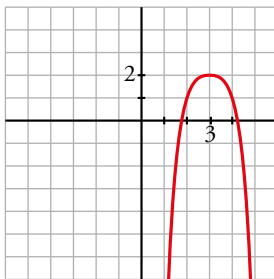
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -12(x - 3)^2; -12(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3; f(3) = 2$$

Signo de f'' : $\frac{f'' < 0}{\quad} \quad \frac{f'' < 0}{\quad}$


No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:

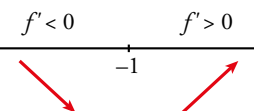


c) $y = (x + 1)^6 - 5$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 6(x + 1)^5; 6(x + 1)^5 = 0 \rightarrow x = -1; f(-1) = -5$$

Signo de f' : $\frac{f' < 0}{\quad} \quad \frac{f' > 0}{\quad}$


f es decreciente en $(-\infty, -1)$. Es creciente en $(-1, +\infty)$.

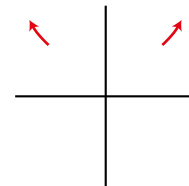
Mínimo en $(-1, -5)$.

- Puntos de inflexión:

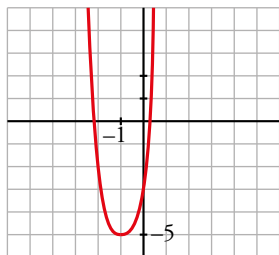
$$f''(x) = 30(x + 1)^4; 30(x + 1)^4 = 0 \rightarrow x = -1; f(-1) = -5$$

Signo de f'' : $\frac{f'' > 0}{\quad} \quad \frac{f'' > 0}{\quad}$


No tiene puntos de inflexión.

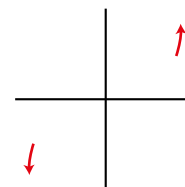


- Gráfica:



d) $y = 3 - (1 - x)^3$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3(1 - x)^2; \quad 3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$

Signo de f' : $\frac{f' > 0}{\quad} \frac{f' > 0}{\quad}$

1

↑ ↑

f es creciente en \mathbb{R} .

No tiene máximos ni mínimos.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = -6(1 - x); \quad -6(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1; \quad f(1) = 3$$

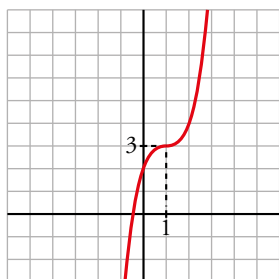
Signo de f'' : $\frac{f'' < 0}{\quad} \frac{f'' > 0}{\quad}$

1

∪ ∩

(1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

- Gráfica:



e) $y = x(x - 1)(x + 3)$

- Ramas infinitas $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$

Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = (x - 1)(x + 3) + x(x + 3) + x(x - 1) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 - \sqrt{13}}{3}, \quad x = \frac{-2 + \sqrt{13}}{3}$$

- Es creciente en $\left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{13}}{3}\right)$ y en $\left(\frac{-2+\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$.

Es decreciente en $\left(\frac{-2-\sqrt{13}}{3}, \frac{-2+\sqrt{13}}{3}\right)$.

$$x = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \approx -1,87, \quad y = 6,06 \rightarrow (-1,87; 6,06) \text{ es un máximo relativo.}$$

$$x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \approx 0,54, \quad y = -0,88 \rightarrow (0,54; -0,88) \text{ es un mínimo relativo.}$$

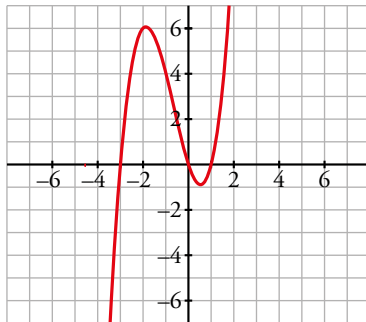
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 6x + 4; \quad f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}; \quad y \approx 2,6 \rightarrow \left(-\frac{2}{3}; 2,6\right) \text{ es el punto de inflexión.}$$

- Corta a los ejes coordenados en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -3$.

- Gráfica:



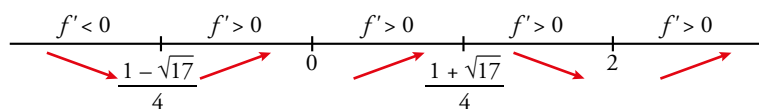
f) $y = (x-2)^2(x+1)x^3$

- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ Tiene dos ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = ((x-2)^2(x+1)x^3)' = 2(x-2)(x+1)x^3 + (x-2)^2x^3 + (x+1)(x-2)^2 3x^2 = 6x^5 - 15x^4 + 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 15x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}, \quad x = 0, \quad x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \quad x = 2$$



$$x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0,78, \quad y = -0,81 \rightarrow (-0,78; -0,81) \text{ es un mínimo relativo.}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1,28, \quad y = 2,48 \rightarrow (1,28; 2,48) \text{ es un máximo relativo.}$$

$$x = 2, \quad y = 0 \rightarrow (2, 0) \text{ es un mínimo relativo.}$$

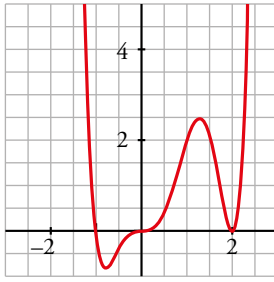
- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 30x^4 - 60x^3 + 24x; \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = 0; \quad x = 1,73; \quad x = 0,83; \quad x = -0,56$$

Los puntos de inflexión son $(0, 0)$; $(1,73; 1,03)$; $(0,83; 1,43)$ y $(-0,56; -0,51)$.

- Corta a los ejes coordenados en los puntos $x = 2$, $x = -1$ y $x = 0$

- Gráfica:



13 Representa las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - x^4$

b) $y = 3x^4 + x^3 - 1$

c) $y = x^3 - x^2$

d) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

- a) • La función es par.

• Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 - x^4) = -\infty$

- Puntos singulares:

$$y' = 2x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y'' = 2 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \rightarrow \text{la función tiene puntos de inflexión en } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{36} \right).$$

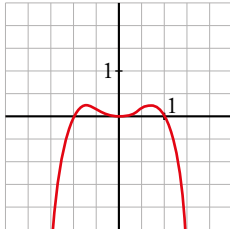
Si $x = 0$: $y'' = 2 > 0 \rightarrow$ la función tiene un mínimo en $(0, 0)$

Si $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$: $y'' = -4 < 0 \rightarrow$ la función tiene máximos en $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4} \right)$.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ la función corta el eje Y en $(0, 0)$

$y = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 1 \rightarrow$ la función corta el eje X en $(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.



b) • Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^4 + x^3 - 1) = +\infty$

- Puntos singulares:

$$y' = 12x^3 + 3x^2 \rightarrow x = 0, x = -\frac{1}{4}$$

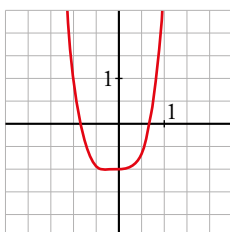
$$y'' = 36x^2 + 6x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{6}, x = 0 \rightarrow \text{la función tiene puntos de inflexión en } \left(-\frac{1}{6}, -\frac{433}{432} \right) \text{ y } (0, -1).$$

Si $x = -\frac{1}{4}$: $y'' = \frac{3}{4} > 0 \rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{257}{256} \right)$

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ la función corta el eje Y en $(0, -1)$

$y = 0 \rightarrow x = -0,86; x = 0,69 \rightarrow$ la función corta el eje X en $(-0,86; 0), (0,69; 0)$.



c) • Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - x^2) = \pm\infty$

• Puntos singulares:

$$y' = 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$$

$$y'' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/3 \rightarrow \text{la función tiene punto de inflexión en } \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right).$$

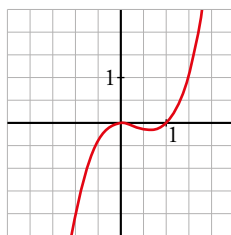
Si $x = 0$: $y'' = -2 < 0 \rightarrow$ la función tiene un máximo en $(0, 0)$

Si $x = \frac{2}{3}$: $y'' = 2 > 0 \rightarrow$ la función un mínimo en $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$.

• Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ la función corta el eje Y en $(0, 0)$

$y = 0 \rightarrow x = 0, x = 1 \rightarrow$ la función corta el eje X en $(0, 0), (1, 0)$



d) • Ramas infinitas: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 + 3x^2 - 12x) = \pm\infty$

• Puntos singulares:

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \rightarrow x = -2, x = 1$$

$$y'' = 12x + 6 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{la función tiene punto de inflexión en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

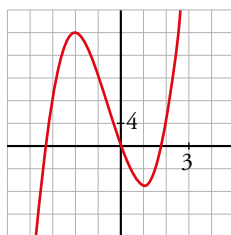
Si $x = -2$: $y'' = -18 < 0 \rightarrow$ la función tiene un máximo en $(-2, 20)$

Si $x = 1$: $y'' = 18 > 0 \rightarrow$ la función un mínimo en $(1, -7)$.

• Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ la función corta el eje Y en $(0, 0)$

$y = 0 \rightarrow x = 0, x = -3,31; x = 1,81 \rightarrow$ la función corta el eje X en $(0, 0), (-3,31; 0), (1,81; 0)$.



Funciones racionales

14 En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

c) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

e) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

f) $y = x + \frac{1}{x^2}$

g) $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

h) $y = \frac{x^3}{(1 - x)^2}$

i) $y = \frac{4x^2}{1 + x^4}$

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$. Tiene simetría par.

• Asíntotas verticales:

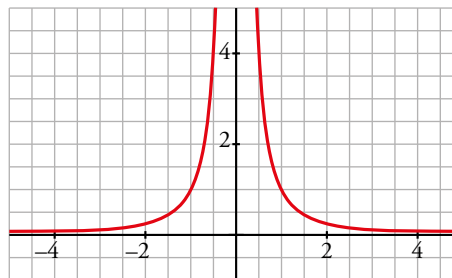
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ porque la función es positiva en todo su dominio. La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty \text{ y, también, por simetría, cuando } x \rightarrow -\infty.$$

La función está por encima de la asíntota por ser siempre positiva.

- Gráfica:



- b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

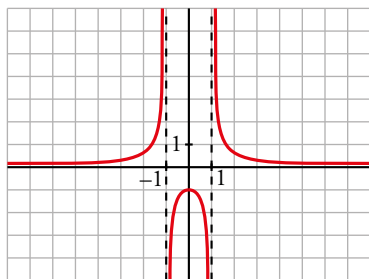
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:



- c) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

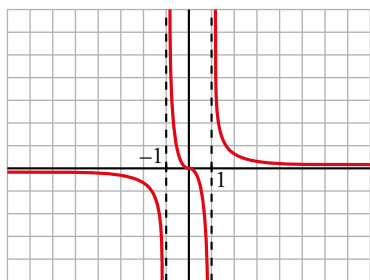
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Gráfica:



- d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

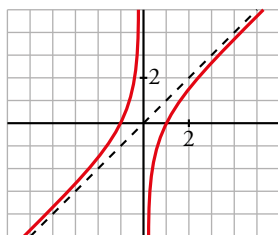
- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < x$)

- Gráfica:



- e) • El dominio de definición es \mathbb{R} .

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0$)

- Gráfica:



- f) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ porque la fracción es positiva en todo su dominio.}$$

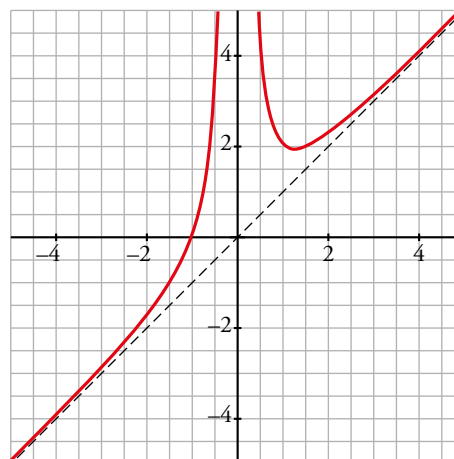
La recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2} \rightarrow \text{La recta } y = x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Como $f(x) - x = \frac{1}{x^2} > 0$ salvo en $x = 0$, la función queda por encima de la asíntota oblicua.



- g) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. La función tiene simetría impar.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical. Análogamente, por simetría, lo es la recta } x = -1.$$

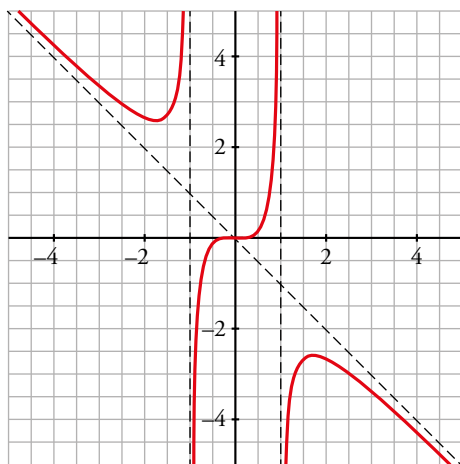
No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{La recta } y = -x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2-1} < 0 \rightarrow$ La función queda por debajo de la asíntota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (-x) = -\frac{x}{x^2-1} > 0 \rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.



- h) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = +\infty \text{ ya que el denominador es no negativo.}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.

No tiene asíntotas horizontales.

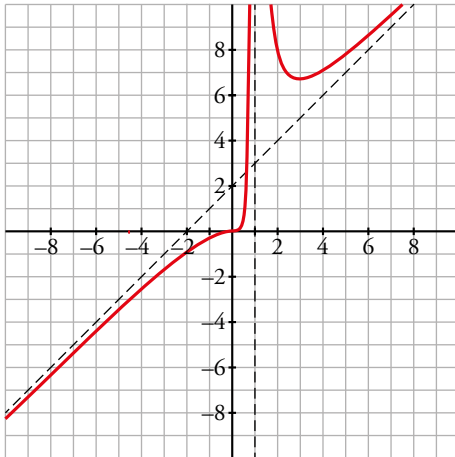
- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^3}{(1-x)^2} = x + 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{La recta } y = x + 2 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

- Gráfica:



- i) • El dominio de definición es \mathbb{R} . Es una función par.

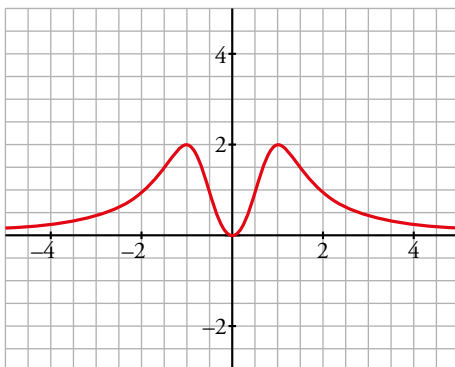
- No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{1+x^4} = 0$$

La recta $x = 0$ es la asíntota horizontal de la función cuando $x \rightarrow \pm \infty$.

La función queda por encima de la asíntota por ser positiva salvo en $x = 0$.

- Gráfica:



15 Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, ramas infinitas y extremos relativos.

a) $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$ b) $y = \frac{(x-1)}{x(x-3)(x+4)}$ c) $y = \frac{x^2(x+2)^2}{x+1}$ d) $y = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)}$

a) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

• Asíntotas horizontales:

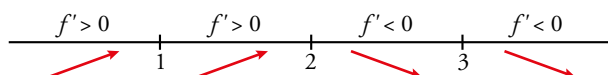
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)(x-3)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

La función queda por encima de la asíntota cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

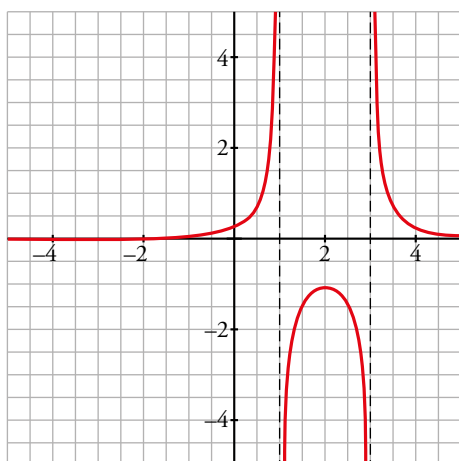
• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-2x+4}{[(x-1)(x-3)]^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x = 2, y = -1$$



• Gráfica:



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-4, 0, 3\}$.

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = -\infty \end{array} \right\} x = -4 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

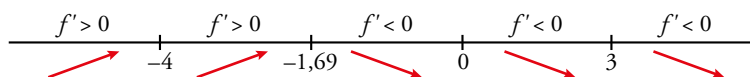
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x(x-3)(x+4)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal cuando } x \rightarrow \pm\infty.$$

La función queda por encima de la asíntota cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$.

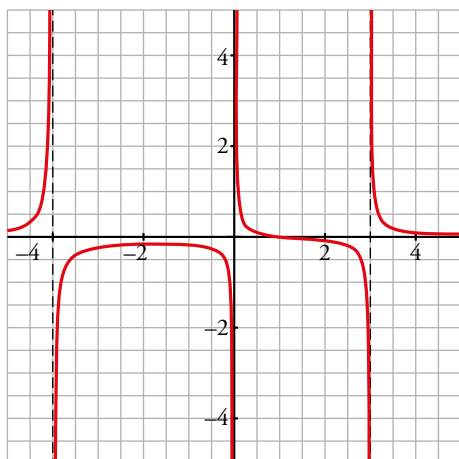
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2(-x^3 + x^2 + x - 6)}{x^2(x-3)^2(x+4)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = -1,69; y = -0,15$$



- Corta a los ejes en $(1, 0)$.

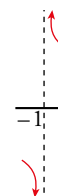
- Gráfica:



c) $y = f(x) = \frac{x^2(x+2)^2}{x+1}$

- El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1\}$. Es continua en su dominio.
- Asíntota vertical en $x = -1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(x+2)^2}{x+1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(x+2)^2}{x+1} &= +\infty \end{aligned} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$



- Ramas en el infinito:

El grado del numerador es 4 y el del denominador es 1. Como *grado numerador* > *grado denominador* + 1, tiene una rama parabólica en cada infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(x+2)^2}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x+2)^2}{x+1} = +\infty$$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 12x^3 + 16x^2 + 8x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)(3x^2 + 6x + 4)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$$

$$f(0) = 0$$

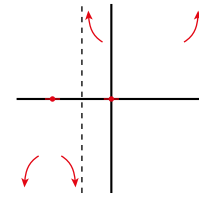
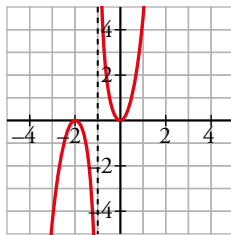
$$f(-2) = 0$$

Tiene dos extremos relativos, uno en $(-2, 0)$ y otro en $(0, 0)$.

Si dibujamos la información que tenemos, es claro que $(-2, 0)$ es un máximo y $(0, 0)$ es un mínimo.

- Corte con el eje Y en $y = 0$.

Terminamos de dibujar la curva:



- d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$f(x) = \frac{x^2(2x-1)}{(x-2)(x+1)} = 2x + 1 + \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} \rightarrow \text{La recta } y = 2x + 1 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (2x + 1) = \frac{5x+2}{(x+1)(x-2)} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

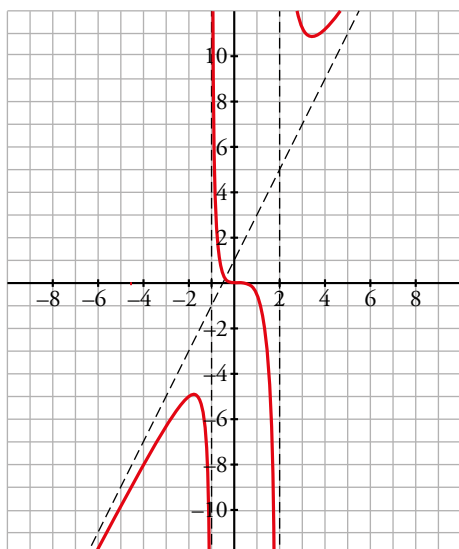
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4)}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(2x^3 - 4x^2 - 11x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^3 - 4x^2 - 11x + 4 = 0 \rightarrow x = 0,33; x = 3,43; x = -1,76 \end{cases}$$

- Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(\frac{1}{2}, 0)$.

- Gráfica:



16 Representa las siguientes funciones racionales:

a) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $y = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3}$

e) $y = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2}$

f) $y = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2}{x^2 + x - 2}$

Recuerda que si se simplifica una fracción dividiendo numerador y denominador por $(x - a)$, hay una discontinuidad evitable en $x = a$.

- a) • El dominio de definición es \mathbb{R} .

- No tiene asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \rightarrow \text{La recta } y = 1 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1}$$

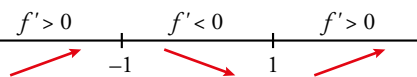
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} < 0 \rightarrow$ La función queda por debajo de la asíntota.

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - 1 = \frac{-2x}{x^2 + x + 1} > 0 \rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

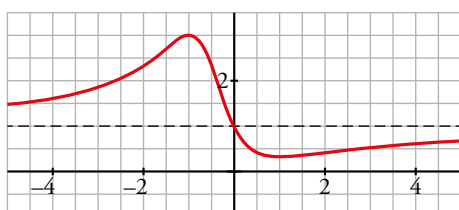
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$

$x = -1, y = 3; x = 1, y = \frac{1}{3}$



- Gráfica:



b) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• No tiene asíntotas horizontales.

• Asíntotas oblicuas:

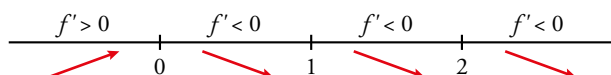
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow \text{La recta } y = x - 1 \text{ es la asíntota oblicua de la función.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - (x - 1) = \frac{1}{x - 1} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

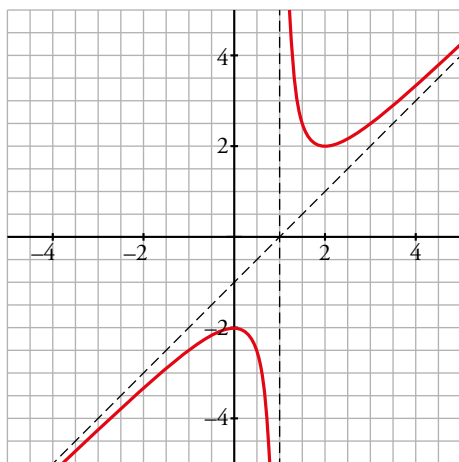
• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$



$$x = 0, y = -1; x = 2, y = 2$$

• Gráfica:



c) • El dominio de definición es \mathbb{R} .

• No tiene asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = 3 \rightarrow \text{La recta } y = 3 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

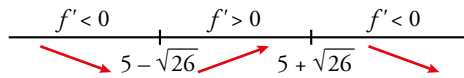
$$f(x) - 3 = \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 1} - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - 3 = \frac{x - 5}{x^2 + 1} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

- Extremos relativos:

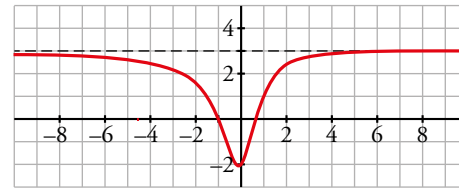
$$f'(x) = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(x^2 + 1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 10x + 1 = 0 \rightarrow x = 5 - \sqrt{26}, x = 5 + \sqrt{26}$$



$$x = 5 - \sqrt{26} \approx -0,1, y = -2,05$$

$$x = 5 + \sqrt{26} \approx 10,1, y = 3,05$$

- Gráfica:



- d) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{La recta } y = \frac{1}{2} \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

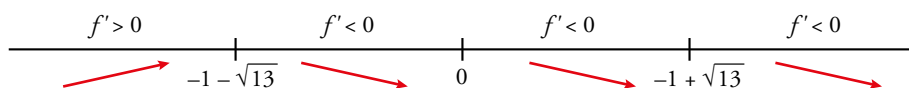
$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^3 - x^2 - x + 4}{2x^3} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} < 0 \rightarrow \text{La función queda por debajo de la asíntota.}$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 - x + 4}{2x^3} > 0 \rightarrow \text{La función queda por encima de la asíntota.}$$

- Extremos relativos:

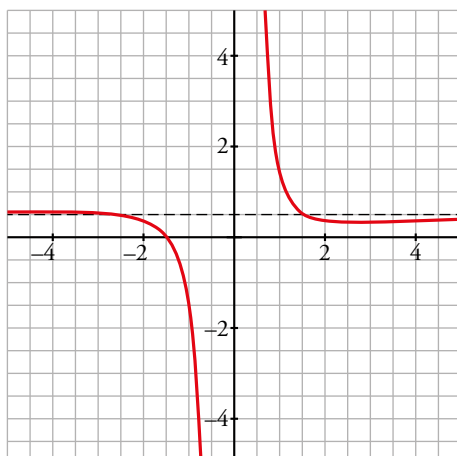
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 12}{2x^4}, f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 12 = 0 \rightarrow x = -1 - \sqrt{13}, x = -1 + \sqrt{13}$$



$$x = -1 - \sqrt{13} \approx -4,6, y = \frac{(-4,6)^3 - 4,6^2 + 4,6 + 4}{-2 \cdot 4,6^3} = 0,56452$$

$$x = -1 + \sqrt{13} \approx 2,6, y = 0,35$$

- Gráfica:



e) • El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

• $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \frac{(x-1)(x^2 - 6x - 6)}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)}$ salvo en $x = 1$, donde presenta una discontinuidad evitable.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 6}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\frac{11}{2}$$

• Asíntotas verticales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x - 6}{x^2(x+1)} = 0 \rightarrow \text{La recta } y = 0 \text{ es la asíntota horizontal de la función.}$$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0 \rightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

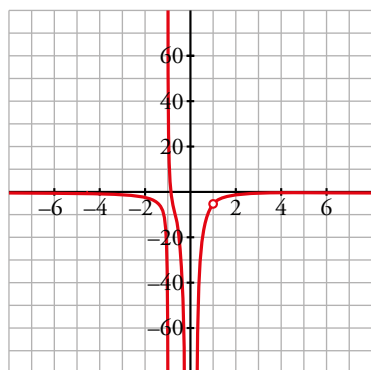
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0 \rightarrow$ La función queda por debajo de la asíntota.

• Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-x^3 + 12x^2 + 24x + 12}{x^3(x+1)^2}, f'(x) = 0 \rightarrow -x^3 + 12x^2 + 24x + 12 = 0 \rightarrow x = 13,8$$

$$x = 13,8; y = 0,036$$

• Gráfica:



f) $y = f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)}$

La función tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.

• Asíntota vertical en $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x+1)}{(x-1)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x+1)}{(x-1)} = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- Ramas en el infinito:

El grado del numerador es 4 y el del denominador es 2. Como *grado numerador* > *grado denominador* + 1, tiene una rama parabólica en cada infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(x+1)}{(x-1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x+1)}{(x-1)} = +\infty$$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2x(x^2 - x - 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x = 0; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62$$

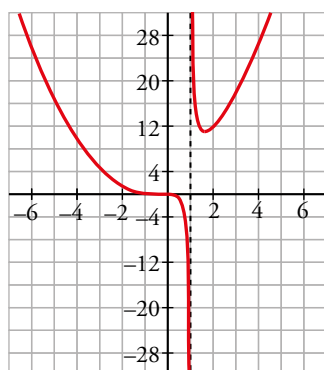
$$f(0) = 0$$

$$f(-0,62) = -0,09$$

$$f(1,62) = 11,09$$

Tiene tres puntos de tangente horizontal: (-0,62; -0,09), (0, 0), (1,62; 11,09).

Dibujando toda la información que se tiene hasta ahora, es fácil dibujar la curva:



Funciones con valor absoluto y funciones a trozos

- 17** ¿Qué te hace decir eso? [Esta estrategia de pensamiento se puede trabajar en esta actividad].

Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

$$\text{Vértice: } f'(x) = -2x - 2; -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1, f(-1) = 3$$

$$\text{Cortes con el eje: } -x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} \begin{cases} x \approx 0,73 & (\text{no vale por ser } 0,73 > 0) \\ x \approx -2,73 \end{cases}$$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

Cortes con el eje X : $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución. No corta al eje X .

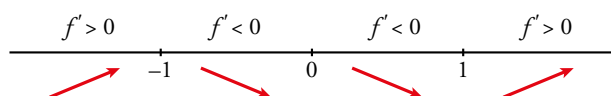
Corte con el eje Y : $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = -2 = f'(0^+) \rightarrow$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decrece en $(-1, 1)$.

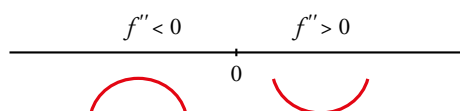
Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

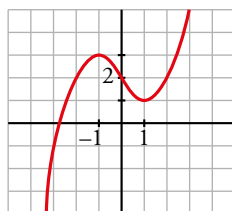
Signo de $f''(x)$:



La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:



18 Representa esta función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia si tiene puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, los puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

• Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \frac{1}{x^2+1}$

Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

Cortes con los ejes:

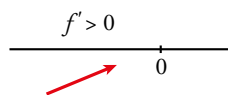
$x = 0$, $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2+1} = 0 \rightarrow$ No tiene solución. No corta al eje Y .

• Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}; \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0, f(0) = 1$$

Signo de $f'(x)$:

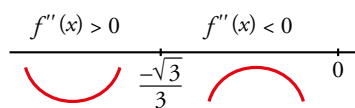


La función es creciente.

• Puntos de inflexión:

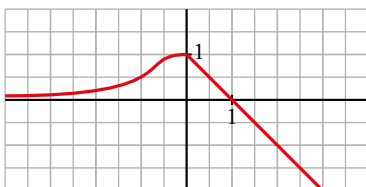
$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}; \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no vale)} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:



Punto de inflexión: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right) \approx (-0,58; 0,75)$

• Representación:



19 Representa la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Continuidad:

Si $x \neq 0$, f es continua por estar definida por polinomios.

Si $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0), f \text{ es continua en } x = 0.$$

- Crecimiento y decrecimiento:

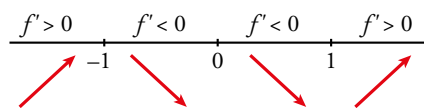
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array} \right.$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, f no es derivable en $x = 0$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale porque tiene que ser } x < 0) \\ x = -1, f(-1) = 3 \end{cases} \\ 2(x-1) = 0 & \rightarrow x = 1, f(1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f' :



Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

Máximo en $(-1, 3)$.

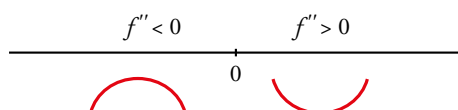
Mínimo en $(1, 0)$.

- Curvatura:

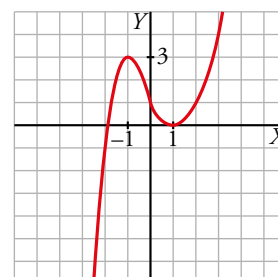
$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array} \right.$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. Por tanto, no existe $f''(0)$.

Signo de f'' :



Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



20 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables:

a) $y = x + |x + 2|$

b) $y = 2x - |x - 3|$

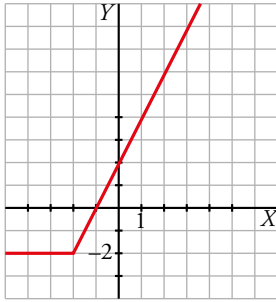
c) $y = |x| + |x - 3|$

d) $y = x|x - 1|$

a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de -2 para definirla por intervalos.

$$\begin{array}{c} -x-2 \qquad x+2 \\ \hline x \qquad -2 \qquad x \end{array} \quad \text{Sumamos: } \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x+2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

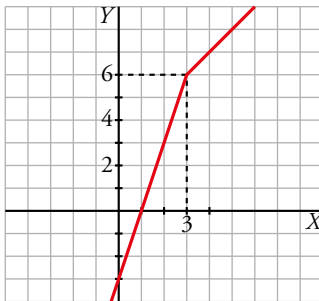


No es derivable en $x = -2$.

b) $2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.

$$\begin{array}{c} -x+3 \qquad x-3 \\ \hline 2x \qquad 3 \qquad 2x \end{array} \quad \text{Restamos: } \begin{cases} 2x - (-x+3) = 3x-3 \\ 2x - (x-3) = x+3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 3x-3 & \text{si } x < 3 \\ x+3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

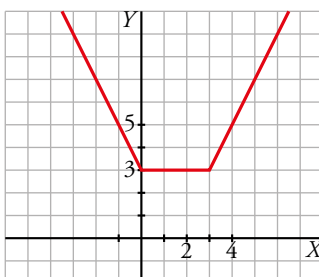


No es derivable en $x = 3$.

c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos f a la izquierda y a la derecha de esos puntos.

$$\begin{array}{c} -x \qquad \qquad x \qquad \qquad x \\ \hline -x+3 \qquad \vdots \qquad -x+3 \qquad \vdots \qquad x-3 \end{array} \quad \text{Sumamos: } \begin{cases} -x + (-x+3) = -2x+3 \\ x + (-x+3) = 3 \\ x + (x-3) = 2x-3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



No es derivable en $x = 0$ ni en $x = 3$.

d) $y = x|x - 1|$

Estudiamos f a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.

$$\frac{-x+1}{x} \quad \frac{x-1}{x} \quad \text{Multiplicamos: } \begin{cases} x(-x+1) = -x^2+x \\ x(x-1) = x^2-x \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x < 1 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Cortes con OX :

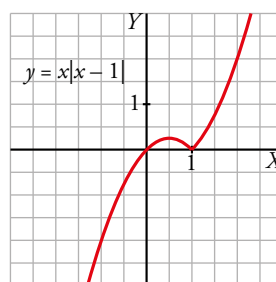
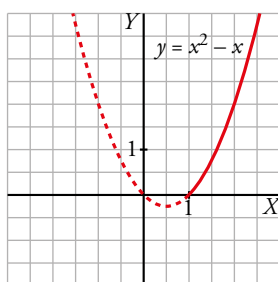
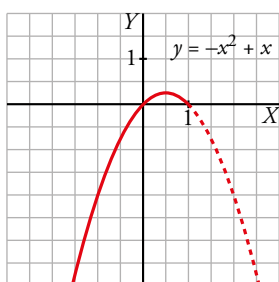
$$-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$$

- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

Cortes con OX :

$$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$$



No es derivable en $x = 1$.

21 Considera la función $f(x) = x^2|x - 3|$:

a) Halla los puntos donde f no es derivable.

b) Calcula sus máximos y mínimos.

c) Representala gráficamente.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3+3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3-3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x \neq 3$, tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2-6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= -9 \\ f'(3^+) &= 9 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ &f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \text{ (Punto } (3, 0)). \end{aligned}$$

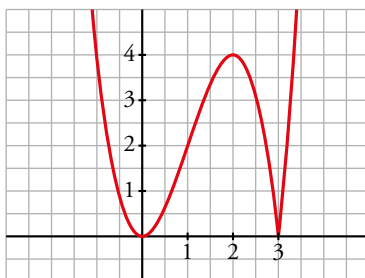
$$b) f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6x = 0 & \text{si } x < 3 \\ 3x(-x + 2) = 0 & \begin{cases} x = 0 & (0, 0) \\ x = 2 & (2, 4) \end{cases} \\ 3x^2 - 6x = 0 & \text{si } x > 3 \rightarrow \text{ninguno} \end{cases}$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x , tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:



22 Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{1}{|x| - 2}$$

$$b) y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$$

$$c) y = \frac{|x + 3|}{1 + |x|}$$

$$d) y = -|x^3 - x^2 + 2|$$

$$a) y = \frac{1}{|x| - 2}$$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } x < 0, y = \frac{1}{-x - 2} = \frac{-1}{x + 2} :$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntota vertical:

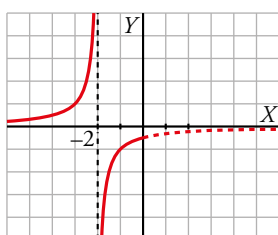
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2, f(x) \rightarrow +\infty \\ \text{Si } x > -2, f(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x + 2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($f(x) > 0$).



Si $x \geq 0$, $y = \frac{1}{x-2}$: →

• Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$ →

• Asíntota vertical:

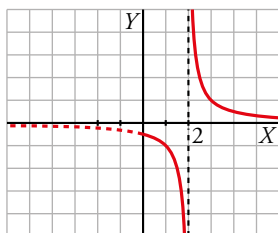
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, f(x) \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 2, f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$x = 2$ es una asíntota vertical.

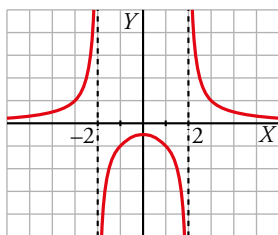
• Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($f(x) > 0$).



La gráfica de $y = \frac{1}{|x|-2}$ es:



b) $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \frac{-2x}{x^2 + 1}$:

• Dominio: \mathbb{R}

• No tiene asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

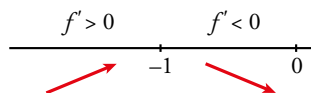
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

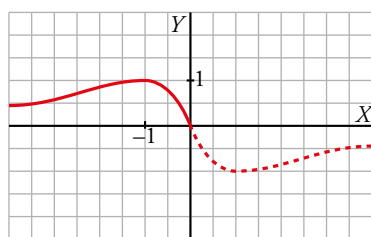
$$f'(x) = \frac{-2(x^2+1) + 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} = 0 \begin{cases} x = 1 \text{ (no vale, } 1 > 0) \\ x = -1, f(-1) = 1 \end{cases}$$

Signo de f' :



Máximo en $(-1, 1)$.



Si $x \geq 0$, $y = \frac{2x}{x^2+1}$:

- Dominio: \mathbb{R}
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

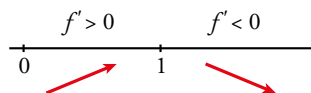
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

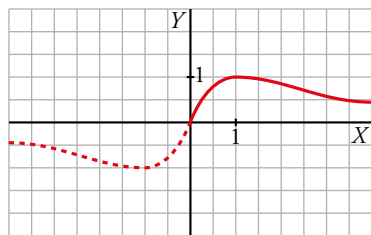
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \begin{cases} x = -1 \text{ (no vale, } -1 < 0) \\ x = 1, f(1) = 1 \end{cases}$$

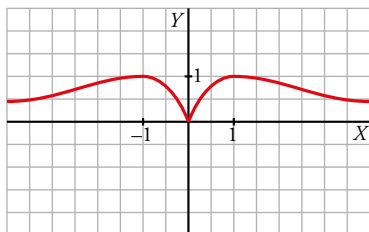
Signo de f' :



Máximo en $(1, 1)$.



La gráfica de $y = \frac{|2x|}{x^2 + 1}$ es:



$$c) |x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|x+3|}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{-x-3}{1-x} & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{1-x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ \frac{x+3}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- El dominio de definición es \mathbb{R} .
- Corte con el eje Y : $x = 0$, $y = 3$

Cortes con el eje X :

$$y = 0 \rightarrow \frac{|x+3|}{1+|x|} = 0 \rightarrow |x+3| = 0 \rightarrow x = -3$$

- No tiene asíntotas verticales.

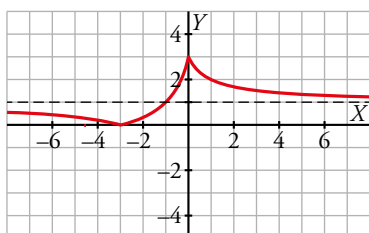
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1+x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+3|}{1+|x|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-3}{1-x} = 1 \end{aligned} \right\}$$

La recta $y = 1$ es la asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

$$\bullet f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(1-x)^2} & \text{si } x < -3 \\ \frac{4}{(1-x)^2} & \text{si } -3 < x < 0 \\ \frac{-2}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-3, 0)$.

$f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(0, +\infty)$.



- d) Para representarla, dibujamos la gráfica de la función $y = x^3 - x^2 + 2$. La gráfica de $f(x)$ coincidirá con la de y en la zona donde esta esté por debajo del eje X y con su simétrica respecto del eje X si la de y está por encima del mismo.

Analicemos la función polinómica $y = x^3 - x^2 + 2$:

- Corte con el eje Y : $x = 0, y = 2$

Cortes con el eje X : $x^3 - x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

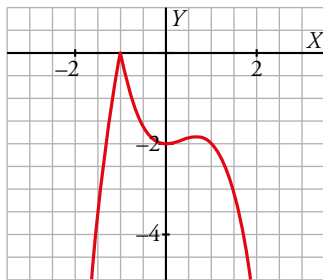
$$y' = 3x^2 - 2x, y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$$

$$y'' = 6x - 2$$

$x = 0 \rightarrow y'' = -2 < 0$ $(0, 2)$ es un máximo relativo.

$x = \frac{2}{3} \rightarrow y'' = 2 > 0 \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{50}{27} \approx 1,85; \left(\frac{2}{3}; 1,85\right)$ es un mínimo relativo.

Ahora tomamos el módulo de esta función y cambiamos el signo.



Otros tipos de funciones

23 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

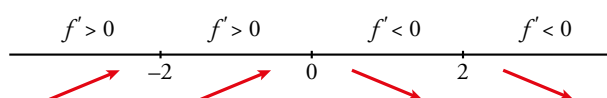
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{Ramas parabólicas.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(4-x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -2, \text{ ni en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

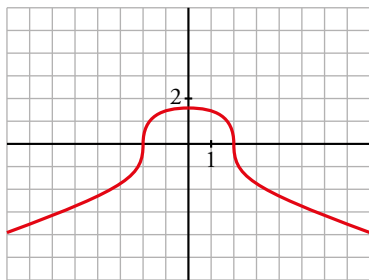
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$. Es decreciente en $(0, +\infty)$. Tiene un máximo en $(0, \sqrt[3]{4})$.

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- Gráfica:



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- Dominio: $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$y = -x + \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ $\left(f(x) < -x + \frac{1}{2} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$y = x - \frac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ $\left(f(x) < x - \frac{1}{2} \right)$.

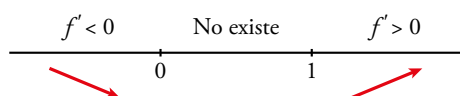
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares (en $x = \frac{1}{2}$ no está definida $f(x)$).

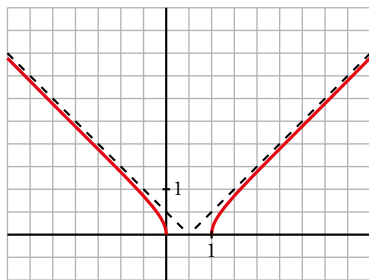
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$. Es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- Gráfica:



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- Dominio: $x^2 - 4x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \rightarrow$ no tiene solución.

$f(x) > 0$ para todo x .

$\text{Dominio} = \mathbb{R}$.

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \frac{4}{2} = 2$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x + 2$).

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \frac{-4}{2} = -2$

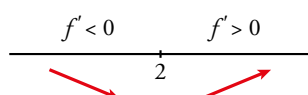
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x - 2$).

- Puntos singulares:

$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Signo de $f'(x)$:

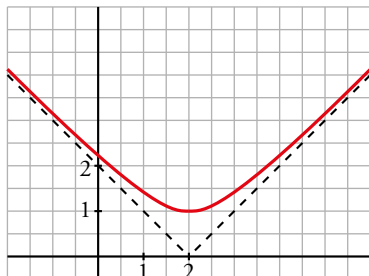


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$.

Es creciente en $(2, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(2, 1)$.

- Gráfica:



$$d) y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías: $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y .
- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{(\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0 \end{aligned}$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

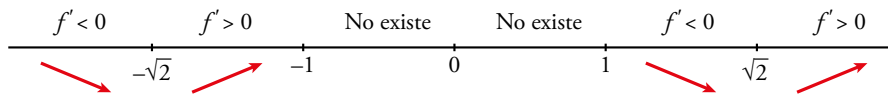
Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

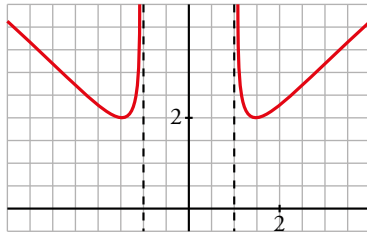


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$.

Es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$.

- Gráfica:



24 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$

d) $y = (x-1)e^x$

e) $y = e^{-x^2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

h) $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \frac{x}{e^x}$

- Dominio: \mathbb{R} (ya que $e^x \neq 0$ para todo x).

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

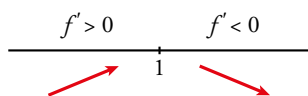
(1) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos la regla de L'Hôpital (H).

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

Signo de $f'(x)$:



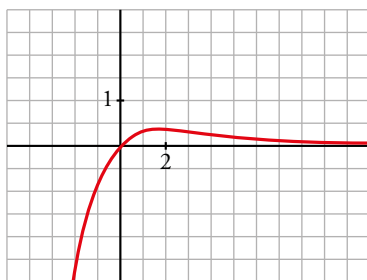
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

Es decreciente en $(1, +\infty)$

Tiene un máximo en $(1, \frac{1}{e})$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- Gráfica:



b) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{(H)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

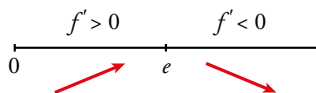
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Signo de $f'(x)$:

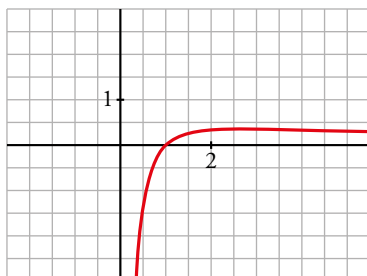


$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

Es decreciente en $(e, +\infty)$

Tiene un máximo en $(e, \frac{1}{e})$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- Gráfica:



c) $y = x \ln x$

- Dominio: $(0, +\infty)$
- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{(H)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

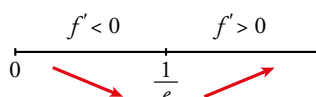
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

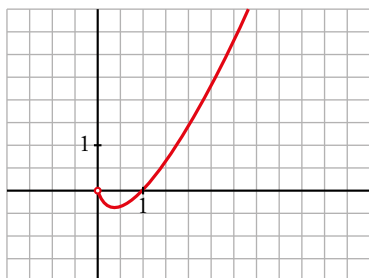
$$f'(x) = 0 \rightarrow \ln x = -1 \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es de creciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$. Es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.
- Gráfica:



d) $y = (x - 1)e^x$

- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

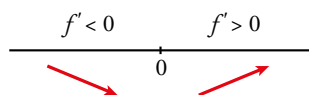
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$. Es creciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- Gráfica:



e) $y = e^{-x^2}$

- Dominio: \mathbb{R}

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

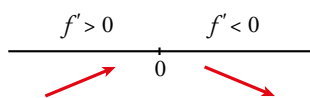
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

- Puntos singulares:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

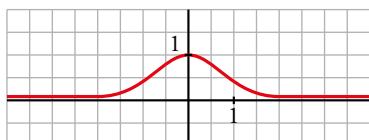
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$. Es creciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- Gráfica:



f) $y = x^2 e^{-x}$

- Dominio: \mathbb{R}

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\text{(H)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\text{(H)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > 0$).

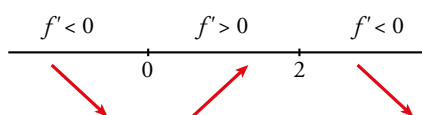
- Puntos singulares:

$$y = \frac{x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2x e^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x (2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - x^2 = 0 \rightarrow x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

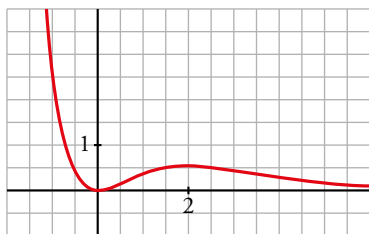


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Es creciente en $(0, 2)$.

Tiene un mínimo en $(0, 0)$ y un máximo en $(2, \frac{4}{e^2})$

- Gráfica:



g) $y = \frac{x^3}{\ln x}$

- Dominio:

$\ln x = 0 \rightarrow x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

Dominio = $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

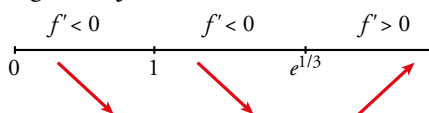
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(3 \ln x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ \ln x = 1/3 \rightarrow x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

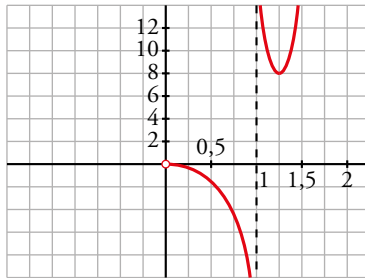


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

Es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- Gráfica:



h) $y = \ln(x^2 - 1)$

- Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- Asíntotas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ramas parabólicas.}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

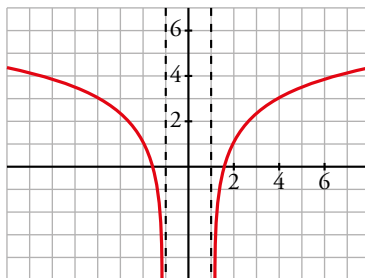
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- Puntos de corte con el eje X :

$$\ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- Gráfica:



25 Representa las siguientes funciones:

a) $y = \frac{e^x}{x}$

b) $y = \frac{e^{-x^2}}{x}$

c) $y = \ln(x^2 - x)$

d) $y = \frac{x}{\ln(x^2 + 1)}$

a) $y = \frac{e^x}{x}$. El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

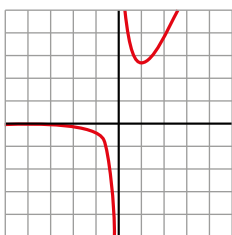
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Puntos singulares:

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \text{ Punto } (1, e)$$

Cortes con los ejes: no tiene.



b) $y = \frac{e^{-x^2}}{x}$. El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función es impar.

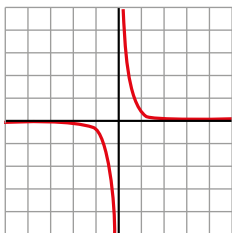
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

No tiene puntos singulares ni puntos de inflexión. Tampoco corta a los ejes.



c) $y = \ln(x^2 - x)$. El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

La función es impar.

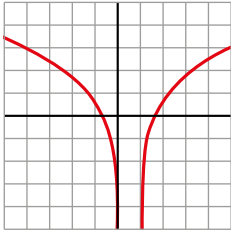
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 - x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2 - x) = +\infty$$

No tiene puntos singulares ni puntos de inflexión. Tampoco corta a los ejes.



$y' = \frac{1-2x}{x^2-x} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$, que no pertenece al dominio de la función, por tanto, la función no tiene puntos singulares.

Tampoco tiene puntos de inflexión.

Puntos de corte con los ejes: $y = \ln(x^2 - x) = 0 \rightarrow x^2 - x = 1 \rightarrow x = -0,62; x = 1,62$

d) $y = \frac{x}{\ln(x^2 + 1)}$. El dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

La función es impar.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\ln(x^2 + 1)} = -\infty$$

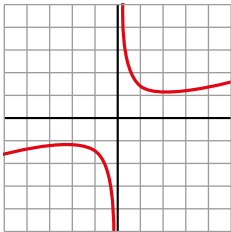
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x^2 + 1)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\ln(x^2 + 1)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x^2 + 1)} = +\infty$$

No tiene ni puntos singulares ni puntos de inflexión.

No corta los ejes en ningún punto.



Para resolver

26 Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de estas funciones y, con esa información, relacionálas con sus respectivas gráficas:

a) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

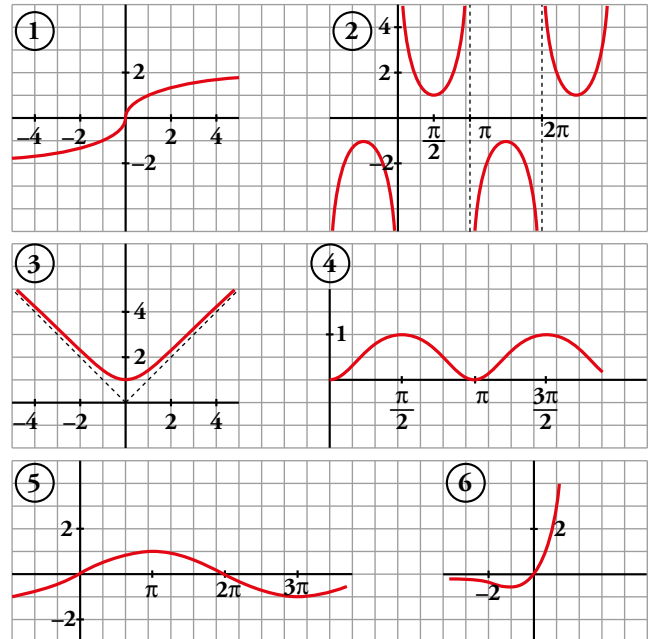
b) $y = x e^x$

c) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

f) $y = \operatorname{sen}^2 x$



a) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

- Dominio: $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{\pi k\}, k \in \mathbb{Z}$$

- Asíntotas:

$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

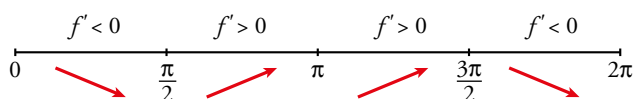
No hay más asíntotas.

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:



$f(x)$ es periódica de período 2π .

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

- Gráfica \rightarrow ②.

b) $y = xe^x$

- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) < 0$).

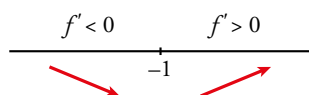
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow \text{Rama parabólica.}$$

- Extremos:

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x = 0 \rightarrow x = -1$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$.

Es creciente en $(-1, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $\left(-1, \frac{-1}{e}\right)$.

- Gráfica \rightarrow ⑥.

c) $y = \text{sen } \frac{x}{2}$

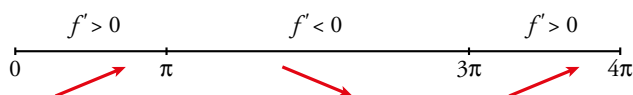
- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas: No tiene.
- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \rightarrow x = \pi + 2\pi k$$

$f(x)$ es periódica de período 4π .

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

Es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.

Tiene un máximo en $(\pi, 1)$.

Tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

- Gráfica \rightarrow ⑤.

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas: No tiene.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Ramas parabólicas.}$$

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \neq 0.$$

$f(x)$ es creciente.

- Gráfica \rightarrow ①.

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Dominio: \mathbb{R}

- Simetría:

$$f(-x) = f(x) \rightarrow f(x) \text{ es par: simétrica respecto al eje } Y.$$

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0 \end{aligned}$$

$y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ ($f(x) > x$).

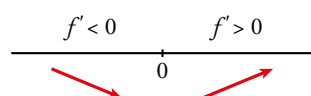
Por simetría, $y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ ($f(x) > -x$).

- Extremos:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Es creciente en $(0, +\infty)$.

Tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- Gráfica \rightarrow ③.

f) $y = \text{sen}^2 x$

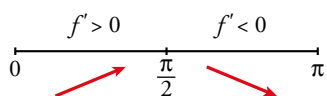
- Dominio: \mathbb{R}
- Asíntotas: No tiene.
- Extremos:

$$f'(x) = 2\text{sen } x \cos x = \text{sen } 2x$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + \pi k \rightarrow x = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$f(x)$ es periódica de período π .

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:



$f(x)$ es creciente en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Es decreciente en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Tiene un máximo en $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- Gráfica \rightarrow ④.

27 Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{3x}$

b) $y = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

a) Dominio: $(-\infty) \cup (0, 1]$

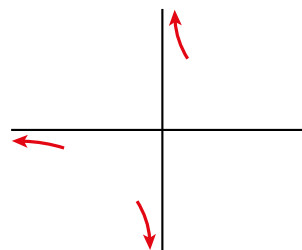
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm \infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 \ y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 \ y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y < 0$).



b) Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \rightarrow -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \rightarrow +\infty \end{cases}$$

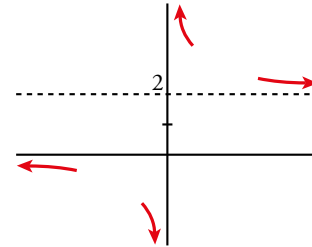
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 2$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y < 0$).



28 El beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, con el paso del tiempo, t (en años), durante los 5 últimos años, viene dado por esta función:

$$b(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 3] \\ 6 - \frac{(t-3)^2}{2} & \text{si } t \in (3, 5] \end{cases}$$

a) Indica cuándo ha crecido el beneficio y determina en qué momentos hubo máximos y mínimos locales y cuáles fueron sus correspondientes valores.

b) ¿Cuándo tuvo un beneficio de 500 000 €?

c) Representa la función $b(t)$.

a) La función es continua en $t = 3$ porque los límites laterales en $t = 3$ valen 6.

$$b'(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in (0, 3) \\ 3 - t & \text{si } (3, 5] \end{cases}$$

Por tanto, $b' > 0$ si $0 < t < 3$ y $b' < 0$ si $3 < t < 5$, es decir, la función crece en $(0, 3)$ y decrece en $(3, 5)$. Alcanza un máximo en $t = 3$.

Para determinar los máximos y mínimos calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo y en $t = 3$:

$$b(0) = 0$$

$$b(3) = 6$$

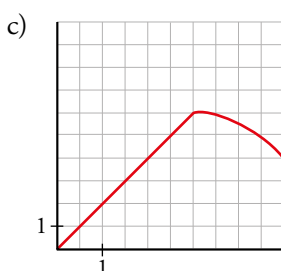
$$b(5) = 4$$

El máximo se alcanza en $t = 3$, su valor es 600 000 euros. El mínimo se alcanza en $t = 0$, su valor es 0 euros.

b) Resolvemos $b(t) = 5$:

$$\text{Si } t < 3: 2t = 5 \rightarrow t = 2,5$$

Si $t > 3: 6 - \frac{(t-3)^2}{2} = 5 \rightarrow t = 3 + \sqrt{2}$ (también se obtiene la solución $t = 3 - \sqrt{2}$), pero no pertenece al intervalo en el que estamos trabajando).



29 La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$$

Halla el valor de k y representa la función así obtenida.

- Hallamos k :

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 1 \quad \quad \quad | \quad x - k \\ -2x^2 + 2kx \quad \quad \quad | \quad 2x + 2k \\ \hline 2kx + 1 \\ -2kx + 2k^2 \\ \hline 1 + 2k^2 \end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$$2x + 2k = 2x + 6 \rightarrow 2k = 6 \rightarrow k = 3$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

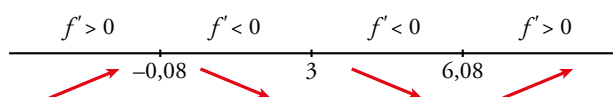
Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 6$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6,08 \\ x = -0,08 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



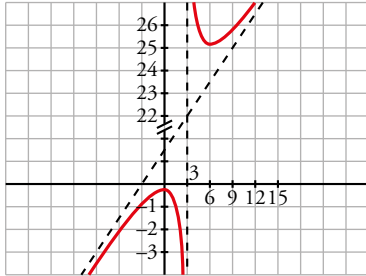
$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0,08) \cup (6,08; +\infty)$.

Es decreciente en $(-0,08; 3) \cup (3; 6,08)$.

Tiene un máximo en $(-0,08; -0,33)$.

Tiene un mínimo en $(6,08; 24,32)$.

- Gráfica:



- 30** Dada la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de a y b , representa la función.

$$f(x) = ax + b + \frac{8}{x}; f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } (-2, -6), f(-2) = -6 \rightarrow -2a + b - 4 = -6 \\ \text{Tangente horizontal} \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x} \rightarrow y = 2x + 2 \text{ es asíntota oblicua.}$$

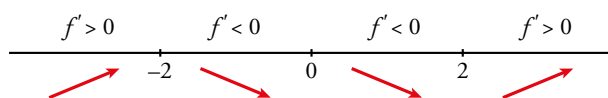
(Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

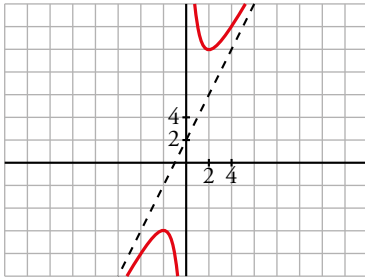
Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

Tiene un máximo en $(-2, -6)$. Tiene un mínimo en $(2, 10)$.

- Gráfica:



- 31** Halla los valores de a , b y c para los cuales la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en el punto $(0, 1)$.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

Si $y = -1$ es asíntota horizontal $\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a \rightarrow a = -1$

Si tiene un mínimo en $(0, 1)$, debe ser $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - (ax^2 + bx + c)2x}{(x^2 - 4)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{b(-4) - 0}{16} = \frac{-b}{4} = 0 \rightarrow b = 0$$

Además: $f(0) = 1 \rightarrow \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0 + c}{-4} = 1 \rightarrow c = -4$

Por tanto: $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

- 32** Comprueba que esta función tiene dos asíntotas horizontales distintas: $y = \frac{|x|}{x+1}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

- 33** La función $f(x) = x + e^{-x}$, ¿tiene alguna asíntota? En caso afirmativo, hállala.

$$f(x) = x + e^{-x}$$

- Dominio: \mathbb{R} .
- No tiene asíntotas verticales.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^{-x}) = +\infty$

No tiene asíntotas horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x \cdot e^x} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

No hay asíntota oblicua hacia $-\infty$ porque: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + e^{-x}}{x} \right) = 1 + \infty = +\infty$

34 Sea la función $f(x)$:

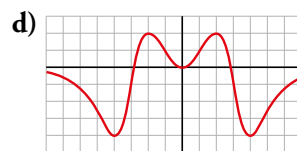
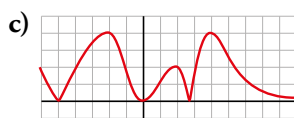
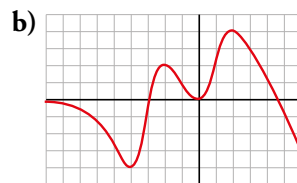
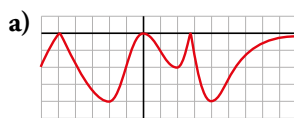
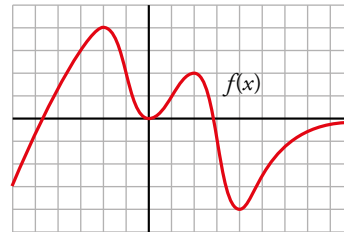
Indica qué gráfica corresponde a estas otras:

$f(-x)$

$f(|x|)$

$-|f(x)|$

$|f(x)|$



a) $-|f(x)|$

b) $f(-x)$

c) $|f(x)|$

d) $f(|x|)$

35 La siguiente función representa la demanda de un artículo a lo largo de los años:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8t + 4}{t + 2} & \text{si } t > 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} t: \text{ años} \\ f(t): \text{ miles de artículos} \end{array}$$

a) Representa la función.

b) ¿Qué cantidad se demanda a los 2 años? ¿A partir de cuándo se demandan más de 6000 unidades?

c) ¿Qué cantidad de unidades nunca llegará a superar la demanda por mucho que pase el tiempo?

a) En el primer intervalo, la función está definida mediante una parábola. En el segundo intervalo es un trozo de parábola.

- La función es continua en $t = 2$, ya que:

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} (t^2 + 1) = 5 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} \frac{8t + 4}{t + 2} = 5 \end{cases}$$

- Tiene una asíntota horizontal cuando $t \rightarrow +\infty$, puesto que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t + 4}{t + 2} = 8$.

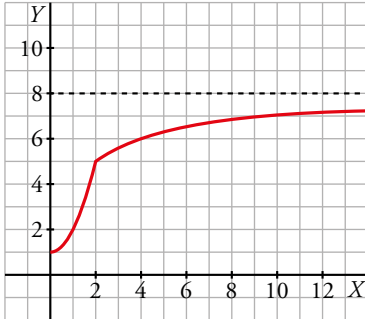
Posición:

Si $t \rightarrow +\infty$, $\frac{8t + 4}{t + 2} - 8 = -\frac{12}{t + 2} < 0$. La función queda por debajo de la asíntota.

- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 2 \\ \frac{12}{(t+2)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Siempre es positiva, por tanto, siempre es creciente.



- b) Como $f(2) = 5$, a los 2 años se demandan 5 000 unidades.

$$6 = \frac{8t+4}{t+2} \rightarrow t = 4. \text{ Por tanto, a partir de los 4 años se demandan más de 6 000 unidades.}$$

- c) Como podemos ver en la gráfica, al ser $y = 8$ asíntota horizontal, la demanda nunca superará las 8 000 unidades.

36 La variación del precio de un artículo viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 & t: \text{ años} \\ 5 - \frac{t}{2} & \text{si } 2 < t \leq 6 & f(t): \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

- a) Representa la función.

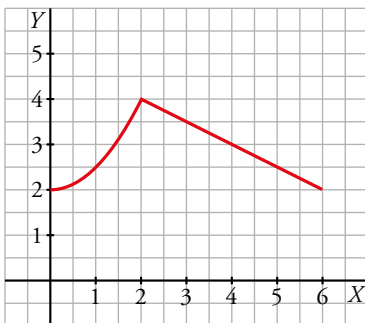
- b) ¿Cuál fue el precio inicial? ¿Y el final?

- c) ¿Cuánto duró la venta del artículo? ¿Cuál fue su precio máximo?

- a) La función está definida por intervalos mediante dos funciones polinómicas. La primera es una parábola y la segunda es una recta.

• Es continua en $t = 2$, ya que $f(2) = 4$ y $\lim_{t \rightarrow 2} f(t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \right) = 4 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(5 - \frac{t}{2} \right) = 4 \end{cases}$.

- Su gráfica es:



- b) Como $f(0) = 2$, el precio inicial fue de 200 €. El final fue también de 200 € porque $f(6) = 2$.

- c) El artículo se vendió durante 6 años. El precio máximo fue de 400 € y se dio a los 2 años, ya que $f(2) = 4$.

Cuestiones teóricas

37  [La comprensión de los enunciados permite trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].

Una función $f(x)$ tiene las siguientes características:

$Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ y es continua y derivable en su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

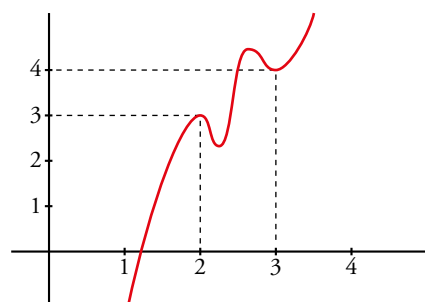
Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son seguras, cuáles son probables y cuáles son imposibles:

- $f(x)$ es par.
- $f(x)$ es impar.
- No tiene máximos ni mínimos.
- Tiene un máximo y un mínimo.
- Corta al eje X en dos puntos.
- Corta el eje X al menos en dos puntos.
- Tiene, al menos, una asíntota vertical.
- Tiene solo una asíntota vertical.
- Tiene una asíntota oblicua.
- Es cóncava en $x < 0$ y convexa en $x > 0$.
 - Imposible, porque, por ejemplo, en las proximidades de $x = 0$ no es simétrica respecto del eje vertical.
 - Probable, porque una función impar puede cumplir estas condiciones.
 - Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.
 - Probable, aunque esta afirmación no está relacionada con los datos del problema.
 - Probable, por su continuidad y su comportamiento a ambos lados del eje vertical.
 - Seguro. Por ser continua debe cortar al semieje negativo de las X al subir desde $-\infty$ (cuando $x \rightarrow -\infty$) hasta $+\infty$ (cuando $x \rightarrow 0^-$). Análogamente ocurre con el semieje positivo de las X .
 - Seguro. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$.
 - Seguro. Tiene una única asíntota horizontal en $x = 0$.
 - Es probable. El comportamiento de la función en $\pm\infty$ no es incompatible con la existencia de una asíntota oblicua.
 - Es probable.

38 Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga, al menos, un máximo relativo en $(2, 3)$ y un mínimo relativo en $(3, 4)$. Si la función fuera polinómica, ¿cuál debería ser, como mínimo su grado?

$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).



Para profundizar

- 39** La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función:

$$N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$$

- a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué t la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración?
b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito?

a) $N(t) = \frac{60}{1 + 2e^{-t}}$

$$N'(t) = \frac{120e^{-t}}{(2e^{-t} + 1)^2} \text{ es siempre positivo para cualquier valor de } t. \text{ Por tanto, } N(t) \text{ es creciente.}$$

La concentración de nitrógeno es mínima para $t = 0$ y su valor es $N(0) = 20$.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{1 + 2e^{-t}} = 60$ es el valor al que tiende la concentración cuando el tiempo tiende a infinito.

- 40** Una partícula se mueve a lo largo de la gráfica de la curva de ecuación $y = \frac{2x}{1 - x^2}$ para $x > 1$.

En el punto $P\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ la deja y se desplaza a lo largo de la recta tangente a dicha curva.

- a) Halla la ecuación de la tangente.
b) Si se desplaza de derecha a izquierda, halla el punto en el que la partícula encuentra a la asíntota vertical más próxima al punto P .
c) Si el desplazamiento es de izquierda a derecha, halla el punto en el que la partícula encuentra el eje X .

- a) Pendiente de la recta tangente en $x = 2$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) - 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2}$$

$$m = f'(2) = \frac{10}{9}$$

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y = -\frac{4}{3} + \frac{10}{9}(x - 2) \rightarrow y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$$

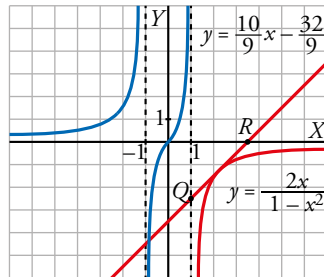
- b) La asíntota vertical más próxima a P es $x = 1$. Tenemos que hallar el punto de intersección de $x = 1$ con la recta tangente anterior:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array} \right\} y = \frac{-22}{9} \left. \vphantom{\begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ x = 1 \end{array}} \right\} \text{ El punto es } Q\left(1, \frac{-22}{9}\right).$$

c) Tenemos que hallar el punto en el que la recta anterior corta al eje OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9} \\ y = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{10}{9}x = \frac{32}{9} \rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{El punto es } R\left(\frac{16}{5}, 0\right).$$

Esta gráfica muestra la curva $y = \frac{2x}{1-x^2}$, la recta tangente $y = \frac{10}{9}x - \frac{32}{9}$ y los puntos $Q\left(1, \frac{-22}{9}\right)$ y $R\left(\frac{16}{5}, 0\right)$.



AUTOEVALUACIÓN

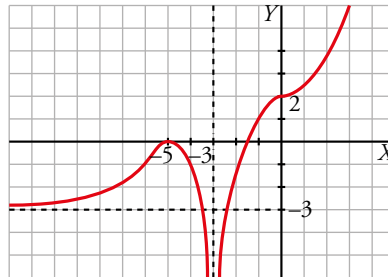
Página 213

1 Dibuja la gráfica de una función f de la que sabemos:

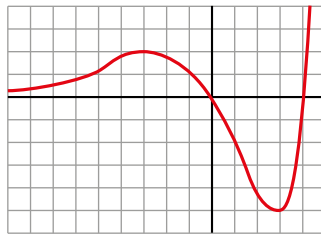
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$$

$$f'(-5) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f(-5) = 0; \quad f(0) = 2$$

Tiene tangente horizontal en los puntos $(-5, 0)$ y $(0, 2)$. En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.



2 Describe la siguiente función:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Máximo relativo en $(-3, 2)$.

Mínimo relativo en $(3, -5)$.

Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ en $-\infty$. No tiene más asíntotas.

3 ¿Tiene $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$ máximos y/o mínimos? ¿Y algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

• Máximos y mínimos:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}; \quad x_3 = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6$$

$$f''(-2) > 0 \rightarrow \text{En } (-2, f(-2)) = (-2, 0) \text{ hay un mínimo.}$$

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \rightarrow \text{En } \left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \approx \left(-\frac{1}{2}, 5,06\right) \text{ hay un máximo.}$$

$$f''(1) > 0 \rightarrow \text{En } (1, f(1)) = (1, 0) \text{ hay un mínimo.}$$

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \rightarrow x_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \quad x_5 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

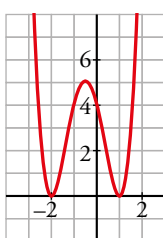
$$f'''(x) = 24x + 12$$

$$f'''\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \text{En } \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx (-1,37; 2,25) \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$f'''\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \text{En } \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right) \approx (0,37; 2,25) \text{ hay un punto de inflexión.}$$

- Gráfica:

La función tiende a más infinito cuando la x tiende a más infinito y a menos infinito. Por tanto:



4 Estudia las asíntotas y los puntos singulares de cada una de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

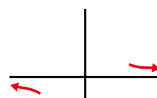
- a) • Dominio: \mathbb{R}

- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales, ya que $x^2 + 4 \neq 0$.

Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 + 4} = 0$.

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0 \end{array} \right.$

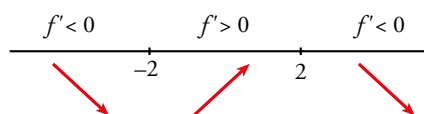


- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

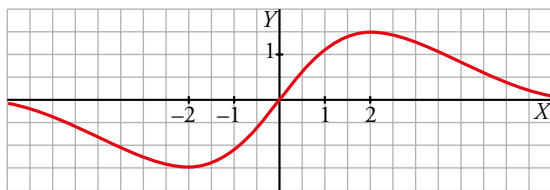
$$f'(x) = 0 \rightarrow -6x^2 + 24 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = -2, f(-2) = -3/2 \\ x = 2, f(2) = 3/2 \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



Mínimo: $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$. Máximo: $\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

- Representación:



- b) • Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$

- Asíntotas verticales: $x = 3$, porque $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm \infty$.

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty \end{array} \right.$

- Asíntotas horizontales:

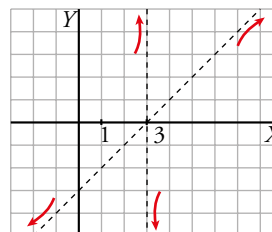
No tiene, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$.

- Asíntotas oblicuas:

Expresamos la función de la forma $\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \frac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3 \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \rightarrow +\infty, f(x) < x - 3 \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty, f(x) > x - 3 \end{array} \right.$



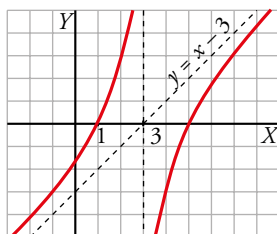
- Puntos singulares:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$$

$$y' = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no tiene solución).}$$

Signo de y' : la derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.



- 5 Representa la función $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.

Para $x < 2$, la gráfica es una parábola con vértice en $(0, 4)$.

Para $x > 2$, es una recta.

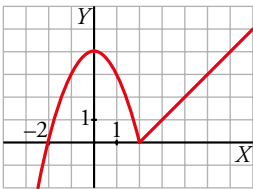
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{No es derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 4 \begin{cases} f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{Es decreciente en } (0, 2). \end{cases}$$

Tiene un máximo en el punto $(0, 4)$ y un mínimo en $(2, 0)$.

Representación:



- 6 Halla los máximos y los mínimos de $f(x) = x\sqrt{x+3}$. Indica si tiene asíntotas y represéntala gráficamente.

$$f(x) = x\sqrt{x+3}. \quad \text{Dominio} = (-3, +\infty)$$

- Hallamos los puntos singulares:

$$f'(x) = \sqrt{x+3} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{2(x+3) + x}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x+6 = 0 \rightarrow x = -2, \quad f(-2) = -2$$

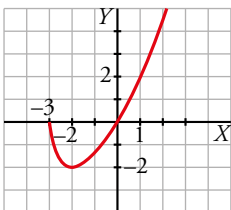
$$\text{Signo de } f': \begin{array}{c} f' < 0 & f' > 0 \\ \swarrow & \nearrow \\ & -2 \end{array}$$

La función tiene un mínimo en $(-2, -2)$.

- La función no tiene asíntotas:

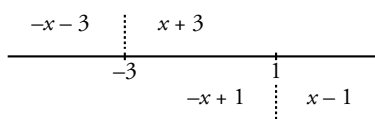
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

- Gráfica:



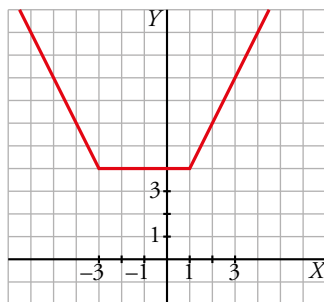
7 Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| + |x - 1|$.

$$f(x) = |x + 3| + |x - 1|$$



- Si $x < -3$: $-x - 3 - x + 1 = -2x - 2$
- Si $-3 \leq x < 1$: $x + 3 - x + 1 = 4$
- Si $x \geq 1$: $x + 3 + x - 1 = 2x + 2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < -3 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



8 Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Encuentra el valor de a , b y c sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$, y que la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ significa que la derivada se anula en dicho valor.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-3) = 0 \rightarrow 2a(-3) + b = 0 \rightarrow -6a + b = 0 \rightarrow b = 6a$$

Que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ sea $y = 6x + 8$ implica dos cosas: que la derivada en $x = 0$ es 6 y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 8)$, ya que tangente y función coinciden en el punto de tangencia.

$$f'(x) = 2ax + b \rightarrow f'(0) = 6 \rightarrow 2a(0) + b = 6 \rightarrow b = 6$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f(0) = 8 \rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8 \rightarrow c = 8$$

Sustituimos en la igualdad obtenida al comienzo y queda:

$$\left. \begin{array}{l} b = 6a \\ b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 1$$

9 Representa la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$$

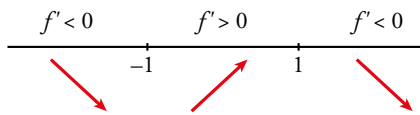
- Dominio = \mathbb{R} .
- No tiene asíntotas verticales, porque $e^x \neq 0$ para todo x .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty \rightarrow f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)e^x - (x+1)^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x+2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

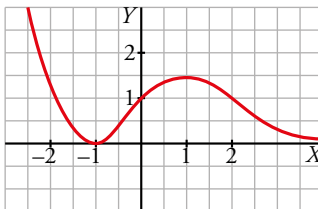
$$f'(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 1 = 0 \begin{cases} x = 1, f(1) = \frac{4}{e} \\ x = -1, f(-1) = 0 \end{cases}$$

Signo de f' :



Mínimo: $(-1, 0)$. Máximo: $(1, \frac{4}{e})$

- Gráfica:



10 ¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$?



$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \frac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de f es la primera.