5 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD

Página 125

Resuelve

Piensa y encuentra los límites

1 Utiliza tu sentido común para asignar valor a los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x^2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - x^2) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 3) = -9$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2+1} = +\infty$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2}{3x+5} = -\infty$

2 Tanteando con la calculadora, da el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x-3) \cdot \ln(x-3) = 0$

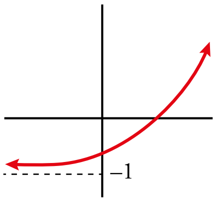
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2+3)}{\sqrt{x}} = 0$

1 IDEA GRÁFICA DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES

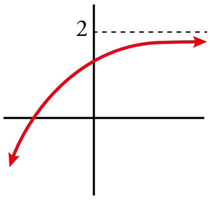
Página 126

1 **Describe mediante un límite cada una de las siguientes ramas:**

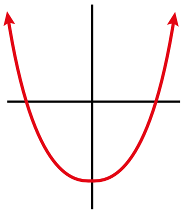
a)



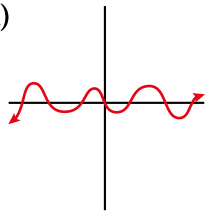
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

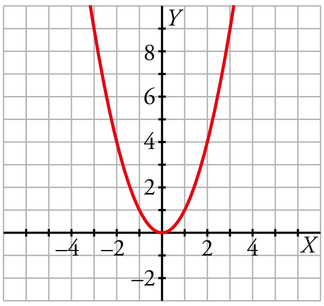
2 **Asigna $\lim\limits_{x \to -\infty}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty}$ a cada una de las siguientes funciones conocidas (dibuja esquemáticamente su gráfica):**

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = -x^2$ **c)** $f(x) = x^3$

d) $f(x) = -x^3$ **e)** $f(x) = sen\ x$ **f)** $f(x) = tg\,x$

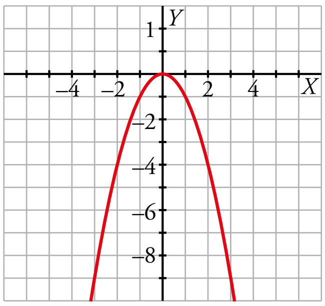
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



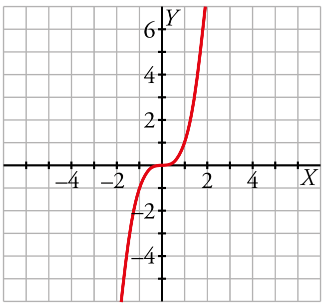
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



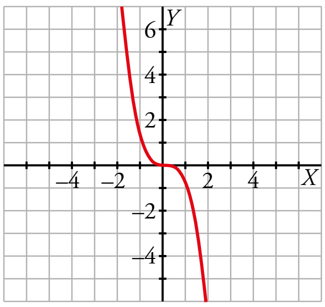
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



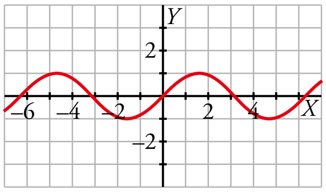
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



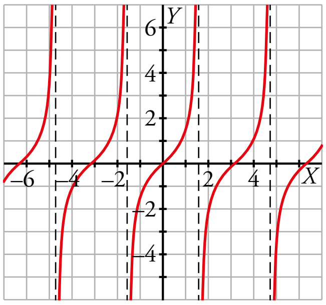
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = no existe



f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ = no existe



3 Piensa y comparte en pareja. **[El alumnado podrá compartir sus argumentos para trabajar esta estrategía].**

Dibuja, en cada caso, una función que cumpla:

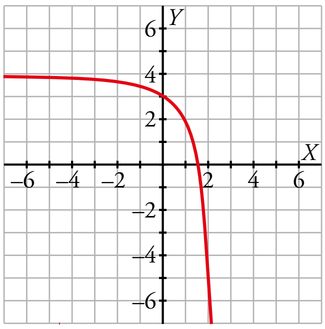
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

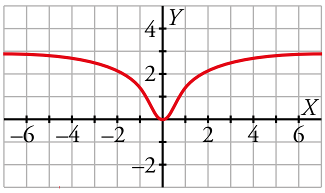
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

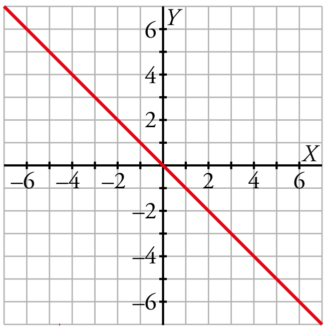
a)



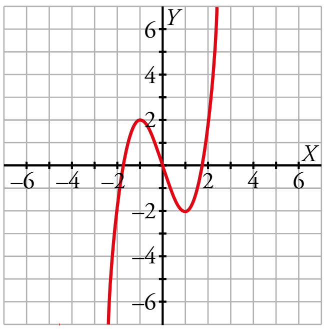
b)



c)



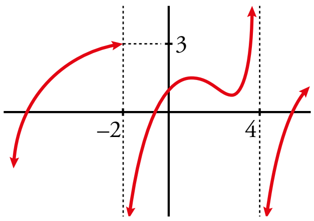
d)



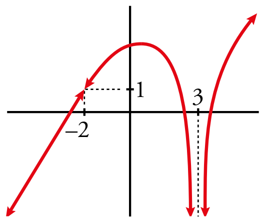
Página 127

4 **Describe con límites las siguientes ramas:**

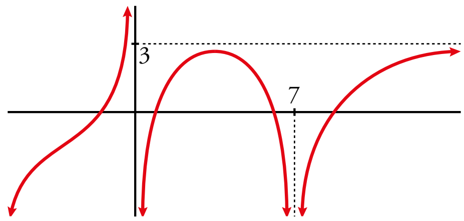
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

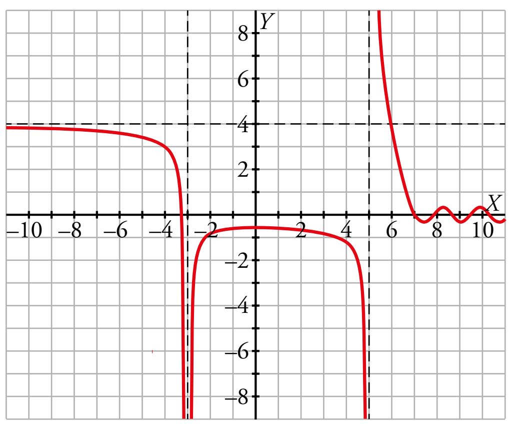
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

5 **Representa una curva que cumpla las seis condiciones siguientes:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **no existe**



2 SENCILLAS OPERACIONES CON LÍMITES

Página 128

1 **[La respuesta clara a las cuestiones planteadas requiere que el alumnado trabaje la destreza expresión escrita de esta clave].**

Todas estas propiedades que acabamos de presentar son muy sencillas y razonables. Y se pueden enunciar en los siguientes términos:

1. ***El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.***

Haz otro tanto con las propiedades 2 a 7 y reflexiona sobre las restricciones que se imponen en algunas de ellas, de modo que las veas razonables (por ejemplo: ¿por qué $b \neq 0$ en la propiedad 4?, ¿por qué $f(x) > 0$ en la propiedad 5?, …).

2. El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.
3. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
4. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea 0 (para que no se produzca una división entre 0).
5. El límite de la potencia de dos funciones es igual a la potencia de sus límites, siempre que la base de la potencia sea positiva (para que tenga sentido la potencia de exponente real).
6. El límite de la raíz de una función es igual a la raíz de su límite. En el caso de que la potencia sea de índice par, además, la función debe ser no negativa (para que se pueda hallar dicha potencia).
7. El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo de su límite (para que tenga sentido el límite y el resultado, es necesario que tanto la función como su límite sean positivos).

Página 129

2 **Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$	**d)** $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$
f) $u(x)^{u(x)}$	**g)** $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$	**j)** $u(x)/h(x)$
k) $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$	**m)** $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}	**r)** $f^2(x) + h^2(x)$	**s)** $f^2(x) - h^2(x)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - h(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminación.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) \cdot h(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \to$ Indeterminación.

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminación.

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \longrightarrow$ Indeterminación.

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \longrightarrow$ No existe.

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^{\infty}} = 0$

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) + h^2(x)) = (+\infty)^2 + (-\infty)^2 = +\infty$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f^2(x) - h^2(x)) = (+\infty)^2 - (-\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty) \longrightarrow$ Indeterminación.

3 INDETERMINACIONES

Página 130

1 **Para $x \to 4$ se dan los siguientes resultados:**

$$f(x) \to +\infty,\ g(x) \to 4,\ h(x) \to -\infty,\ u(x) \to 0$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones cuando $x \to 4$? En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} [f(x) + h(x)] = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indetermninación.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \to$ Indeterminación.

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)} \to$ Indeterminación

f) $\lim\limits_{x \to 4} u(x)^{h(x)} = (0)^{(-\infty)} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)} \to$ Indeterminación

h) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)^{f(x)} = (4)^{(+\infty)} = +\infty$

4 COMPARACIÓN DE INFINITOS. APLICACIÓN A LOS LÍMITES CUANDO $x \to \pm\infty$

Página 131

1 Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $log_2 x$ **e)** $\dfrac{1}{x^3+1}$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

Son infinitos cuando $x \to +\infty$ las expresiones a), c), d), f), g) e i).

No lo son las expresiones b), e) y h).

2 a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$$log_2 x \qquad \sqrt{x} \qquad x^2 \qquad 3x^5 \qquad 1{,}5^x \qquad 4^x$$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2 x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) 4^x; $1{,}5^x$; $3x^5$; x^2; $\sqrt{x}$; $log_2 x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

5 ▶ CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

Página 133

1 Rastreador de problemas. **[La resolución del ejercicio planteado se puede aprovechar para trabajar esta estrategia de pensamiento].**

Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right)$ **b)** $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$ **d)** $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$ **f)** $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$ b) $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$ d) $\lim_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}) = +\infty$ f) $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$

2 **Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$ **b)** $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$ **d)** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$ **f)** $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$$

6 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to -\infty$

Página 134

1 **Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^4 - 6x + 2}{3x^4 + x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 + 6x + 2}{3x^4 - x - 1} = \dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^3 - 5x + 3}}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3 + 5x + 3}}{x^2 + 2x}$

No existe, pues el radicando toma valores negativos cuando $x \to -\infty$.

2 **Halla el $\lim\limits_{x \to -\infty}$ de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2}$

b) $\dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2}$

c) 3^x

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x + 3}}{3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5x + 3}}{-3x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{-3x} = -\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3 + 5}{x + 2} - \dfrac{4x^3 - x}{x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-3x^3 + 5}{-x + 2} - \dfrac{-4x^3 - x}{-x - 2} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4 - 5x + 6x^3 - 10 - 4x^4 + x^2 + 8x^3 - 2x}{x^2 - 4} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^4 + 14x^3 + x^2 - 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

8 ▸ CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to c$

Página 136

1 **[El alumnado, por grupos, puede analizar los pasos a realizar para hacer el cálculo correctamente].**

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \text{sen } 2x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3+2x}{x-3} = -7$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2-5x+4} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \text{sen } 2x) = 3$ d) $\lim\limits_{x \to -1} e^{3x+4} = e$

2 **Halla el límite cuando $x \to 5$ de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-5x+1, & x \le 5 \\ x-4, & x > 5 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 5 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2}, & x \ge 5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (x^2-5x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} (x-4) = 1 \end{array}\right\} \to$ Los límites laterales coinciden y $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 1$.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (2^x) = 32 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{(x-1)^2}{2} = 8 \end{array}\right\} \to$ Los límites laterales no coinciden y no existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Página 137

3 **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-3x+5)}{(x+1)(x-7)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3x+5}{x-7} = \dfrac{9}{-8} = \dfrac{-9}{8}$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{45}{84} = \dfrac{15}{28}$

4 **Calcula:** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \dfrac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x} - \frac{x^3+2x+1}{x^3+x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-5x+2}{x(x+2)} - \frac{x^3+2x+1}{x(x^2+1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)(x^2-5x+2)-(x+2)(x^3+2x+1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4-5x^3+2x^2+x^2-5x+2-x^4-2x^2-x-2x^3-4x-2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3+x^2-10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2+x-10)}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2+x-10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

9 REGLA DE L'HÔPITAL

Página 139

1 Calcula estos límites aplicando la regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x - 5}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, sen\, x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{ln\,(x+1)}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3 - x^2 - 4x - 2)}{(x^2 - 4x - 5)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 4} = -\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{2x + 3} = \dfrac{-1}{7}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 12x^2 - 10x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \dfrac{6x - 6}{12x^2 - 12x - 10} = \dfrac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x - 4}{2x - 8} = \dfrac{6}{2} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, senx} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{3\, cos\, x} = \dfrac{0}{3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{ln\,(x+1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x}{\dfrac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x \to 0} cos\, x\,(x+1) = 1$

2 Halla estos límites aplicando L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen\, x}{cos\, x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x}{x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - senx}{cos\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-cos\, x}{-senx} = \dfrac{0}{-1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{(1 + tg^2\, 3x) \cdot 3} = \dfrac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\, 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\, 10} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{75x^2} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150} = \dfrac{+\infty}{150} = +\infty$

3 Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - ln\,(1+x)}{x\, ln\,(x+1)}$.

$$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - ln\,(1+x)}{x\, ln\,(x+1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{ln\,(x+1) + \dfrac{x}{x+1}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{(x+1)\, ln\,(x+1) + x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x+1} + ln\,(x+1) + 1} = \dfrac{1}{2}$$

4 **Calcula estos límites aplicando la regla de L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x}$ d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{-x} + 1}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x(1 + cos\, x)}{x\, cos\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x(1 + cos\, x) + sen\, x(-sen\, x)}{cos\, x + x(-sen\, x)} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{sen\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{cos\, x} = 2$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}}}{1} = \dfrac{10}{2\sqrt{25 - 9}} = \dfrac{5}{4}$

5 **Halla el siguiente límite. Para ello, exprésalo como un cociente y aplica la regla de L'Hôpital.**

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})\, x$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot ln\, 2}{(-1/x^2)} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} (-2^{1/x}) \cdot ln\, 2 = -ln\, 2 = ln\, \dfrac{1}{2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 140

1. Operaciones con límites

Hazlo tú

- **Siendo f, g, h, u y v las funciones anteriores, calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $v(x)^{u(x)}$ **b)** $u(x)^{g(x)}$ **c)** $g(x) \cdot u(x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} v(x)^{u(x)} = (0{,}4)^{(+\infty)} = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} u(x)^{g(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\lim_{x \to +\infty} [g(x) \cdot u(x)] = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

3. Comparación de infinitos

Hazlo tú

- **Asigna límite para $x \to +\infty$ para cada una de estas expresiones:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{10x^2 - 5} = +\infty$ porque cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia.

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5 - 1}}{10x^2 - 5} = +\infty$ porque el numerador tiene mayor grado que el denominador.

Página 141

4. Límite en un punto

Hazlo tú

- **Calcula:**

a) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 2x} \right)$ **b)** $\lim_{x \to 0} f(x)$ **siendo:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2 - 2x} \right) = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminación.

Efectuamos la resta:

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x+1}{x(x-2)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x(x-2)} \quad \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} \dfrac{x-1}{x(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \dfrac{x-1}{x(x-2)} = +\infty \end{cases}$$

b) Como la función está definida mediante diferentes expresiones a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x(x-3)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (2x + 3) = 3$$

Como los límites laterales coinciden, el límite existe y vale 3.

5. Límites con radicales

Hazlo tú

- **Calcula:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2-2}-x)$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{1-x} = \lim_{x \to 1} [-(2+\sqrt{x+3})] = -4$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2-2}-x) = (+\infty)-(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2-2}-x)(\sqrt{3x^2-2}+x)}{\sqrt{3x^2-2}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-2-x^2}{\sqrt{3x^2-2}+x} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-2}{\sqrt{3x^2-2}+x} = +\infty$ ya que el denominador equivale a un polinomio de grado 1 y, por tanto, el numerador tiene mayor grado que el denominador.

Página 142

6. Cálculo de límites

Hazlo tú

- **Calcula los límites siguientes:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\log x)^{1-3x}$ **c)** $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|}$ **d)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{(+\infty)} = +\infty$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (\log x)^{1-3x} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

c) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)} \to$ Indeterminación.

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{-x+1} = +\infty$ (cuando $x \to -\infty$, $x-1<0$).

d) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{(+\infty)}{(+\infty)}$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\dfrac{e^{-x}}{e^x}}{1-\dfrac{e^{-x}}{e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}{1-\dfrac{1}{e^{2x}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

7. Discontinuidades

Hazlo tú

- **Determina los puntos de discontinuidad de $f(x)$ y clasifica sus discontinuidades.**

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21}$$

Hallamos las raíces del denominador: $x^2 + 4x - 21 = 0 \to x = 3,\ x = -7$. En estos puntos la función no está definida. Estudiamos los límites en dichos puntos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+7)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+7} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -7} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -7^-} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -7^+} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 21} = -\infty \end{array} \right.$$

En $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable porque el límite es finito en ese punto.

En $x = -7$ tiene una discontinuidad de salto infinito y, por tanto, una asíntota vertical.

Página 143

8. Continuidad

Hazlo tú

- **a) Halla c para que esta función sea continua en $x = c$:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \le c \\ (x-1)^2 - 3 & \text{si } x > c \end{cases}$$

b) Asigna un valor a $f(0)$ para que $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^3 + 5x} + 1$, sea continua en $x = 0$.

a) Calculamos los límites laterales en $x = c$ e imponemos que coincidan:

$2c + 3 = (c-1)^2 - 3 \to 2c + 3 = c^2 - 2c - 2 \to c^2 - 4c - 5 = 0 \to c = -1,\ c = 5$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 4x}{x^3 + 5x} + 1 \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x(x-4)}{x(x2 + 5)} + 1 \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - 4}{x^2 + 5} + 1 \right) = \dfrac{-4}{5} + 1 = \dfrac{1}{5}$

9. Función continua definida en intervalos

Hazlo tú

- **Calcula a y b para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + a & \text{si } x \le -1 \\ 3x^2 + 4 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x^2 + b & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

La función es continua, cualesquiera que sean a y b, siempre que $x \ne -1$ y $x \ne 1$, ya que está definida mediante funciones continuas en los intervalos de definición. Estudiamos los límites en $x = -1$ y en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{1}{x^2} + a\right) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x^2 + 4) = 7 \end{array}\right\} \text{ Para que sea continua en } x = -1, \text{ debe ser } 1 + a = 7 \to a = 6.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 4) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + b) = -1 + b \end{array}\right\} \text{ Para que sea continua en } x = 1, \text{ debe ser } 7 = -1 + b \to b = 8.$$

Si $a = 6$ y $b = 8$, la función es continua en $x = -1$ y en $x = 1$, porque $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 7$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 7$.

Página 144

10. Función continua

Hazlo tú

- **Calcula el valor de a y de b para que la siguiente función sea continua en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - a}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ bx - 6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

La función será continua en $x = 3$ si $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$. Comprobemos esto.

$f(3) = 3b - 6$

Para calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, hallamos los límites laterales en $x = 3$:

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - a}{x - 3} = \dfrac{(9 - a)}{(0)}$

  Para que este límite sea finito, el numerador debe tender a 0, y, por tanto, $a = 9$. En tal caso:

  $$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 6$$

- $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (bx - 6) = 3b - 6$

  Para que exista límite debe ser $6 = 3b - 6 \to b = 4$.

  Si $a = 9$ y $b = 4$, la función es continua en $x = 3$ ya que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 6$.

11. Continuidad en un punto

Hazlo tú

- **Estudia la continuidad de la función $f(x)$ y clasifica sus discontinuidades.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{-x} = x^2 - 1$ es una función continua.

Para $x > 0$, $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{x} = x^2 + 1$ es una función continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe el límite porque los límites laterales son distintos.}$$

$f(0) = 1$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable de salto finito.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 145

1. Límite de una diferencia de radicales

- **Calcular el valor de a para que el siguiente límite sea finito y hallar su valor:**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right)$$

Para que el límite se pueda calcular debe existir la raíz y para ello, el radicando debe ser positivo cuando x es muy grande. Por tanto, $a > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right) = (+\infty) - (+\infty) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{ax^2 + 3x}\right)\left(2x + \sqrt{ax^2 + 3x}\right)}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - (ax^2 + 3x)}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(4 - a)x^2 - 3x}{2x + \sqrt{ax^2 + 3x}}$$

Para que el límite exista, los grados del numerador y del denominador deben ser iguales. Como el denominador tiene grado 1, el numerador también debe tener grado 1 y, por tanto, debe ser $a = 4$.

En tal caso, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{2x + \sqrt{4x^2 + 3x}} = -\dfrac{3}{4}$.

2. Función continua

- **Estudiar la continuidad de esta función según los valores de a:**

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - ax + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \ne 1$ porque las funciones que intervienen son continuas al ser funciones polinómicas.

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$\lim_{x \to 1^-} (-2x + a) = -2 + a \qquad \lim_{x \to 1^+} (x^2 - ax + 5) = 6 - a$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales. Por tanto:

$-2 + a = 6 - a \;\rightarrow\; a = 4$

Para el valor obtenido de a la función es continua porque $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Si $a \ne 4$, entonces la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$ al existir los límites laterales en dicho punto y ser distintos.

3. Continuidad en un punto

- **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-2)/x} & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1 - \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua?

b) Hallar el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de la función.

a) Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{x^2-2}{x}} = e^{(+\infty)} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} (1 - \ln x) = +\infty$$

No existe ningún valor de k ya que los límites laterales en el punto $x = 0$ no existen.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{x^2-2}{x}} = e^{(-\infty)} = 0$$

4. Tipos de discontinuidades

- **a) Determinar el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 3$.**

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{|3-x|}{x} & \text{si } x \neq 3 \\ k & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

b) ¿Tiene $f(x)$ alguna discontinuidad? En caso afirmativo, clasifícala.

a) La función, definida por intervalos, es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{3-x}{x} & \text{si } x < 3 \\ k & \text{si } x = 3 \\ 2 - \dfrac{x-3}{x} & \text{si } 3 > x \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x = 3$, se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = k \\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \left(2 - \dfrac{x-3}{x}\right) = 2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2 \end{array}\right\} \to k = 2$$

b) La función no está definida cuando $x = 0$ ya que se anula el denominador de la fracción. Estudiamos el tipo de discontinuidad en este punto:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(2 - \frac{3-x}{x}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2 - \dfrac{3-x}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

En $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

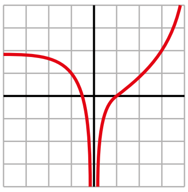
Página 146

Para practicar

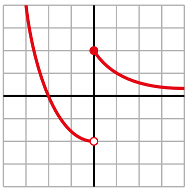
Cálculo de límites

1 **Observa las gráficas y di, en cada caso, cuál es el límite cuando $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.**

a)



b)



a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

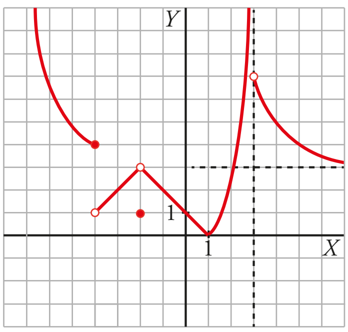
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2 Saco de dudas. **[El uso de la gráfica para calcular los límites puede servir para trabajar esta técnica].**

Observando la gráfica de $f(x)$, di el valor de los siguientes límites:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **i)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

a) $+\infty$ b) 4 c) 1

d) No existe e) 3 f) 0

g) $+\infty$ h) 7 i) 3^+

3 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3}{4} x^3 + 2x^2 - 1 \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4 - 3x^2}{x^2 + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{5 + x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^6 + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 2x}{x + 3\sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-3}{4} x^3 + 2x^2 - 1 \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3}{4} x^3 = \lim\limits_{x \to +\infty} = \frac{-3}{4} \cdot (+\infty) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4 - 3x^2}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^2) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{5 + x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4 - 3x + 2}{x^6 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4}{x^6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2} = \frac{5}{(+\infty)} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{2/3}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 2x}{x + 3\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$

4 Calcula estos límites comparando los órdenes de infinito:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^3) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x + 7}) = +\infty$

5 **Calcula el límite de estas funciones cuando $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2}$ b) $g(x) = \dfrac{x + \log x}{\log x}$ c) $h(x) = \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$ e) $j(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}}$ f) $k(x) = \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

g) $l(x) = 2^x - 3^x$ h) $m(x) = \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{(2x-1)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} = \dfrac{5}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \log x}{\log x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{\log x} + 1 \right) = +\infty + 1 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}\,\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}} = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 - 3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{4x^2}} = 1$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x - 3^x = \lim\limits_{x \to +\infty} -3^x = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x^2}{5-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 - x^3 - x^3 + 3x^2}{(x-3)(5-x)} = -\infty$

6 **Calcula estos límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1}$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + 2x})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1{,}2^x - \dfrac{3x^2}{x+1} \right)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+4}{2x+5} \right)^{x-1}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2x+1} = 0$ porque el numerador tiene menor grado que el denominador.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - x^3) = +\infty$ porque el infinito de una exponencial con base mayor que 1 es de orden superior que el de una potencia.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x-3} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x}{x-3} = -3$ porque el numerador tiene el mismo grado que el denominador.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5}}{1 - 2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{-2x} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 5x}{x+1} - \dfrac{3x}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 - 10x - 3x(x+1)}{2(x+1)} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 10x - 3x^2 - 3x}{2x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - 13x}{2x + 2} = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-\sqrt{x^4+2x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-\sqrt{x^4+2x})(x^2+\sqrt{x^4+2x})}{x^2+\sqrt{x^4+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-(x^4+2x)}{x^2+\sqrt{x^4+2x}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^4-2x}{x^2+\sqrt{x^4+2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x^2+\sqrt{x^4+2x}} = 0$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(1{,}2^x - \frac{3x^2}{x+1}\right) = +\infty$

h) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$

7 Calcula estos límites. Si alguno es infinito, calcula los límites laterales:

a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-7x+6}{1-x}$ **b)** $\lim_{x\to1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{(x^3-1)(x-2)}$

c) $\lim_{x\to0} \frac{x^3+5x^2}{3x^2-15x}$ **d)** $\lim_{x\to2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12}$

a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-7x+6}{1-x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-6)}{1-x} = \lim_{x\to1} [-(x-6)] = 5$

b) $\lim_{x\to1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{(x^3-1)(x-2)} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2-3x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{(x^2+x+1)(x-2)} = 0$

c) $\lim_{x\to0} \frac{x^3+5x^2}{3x^2-15x} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+5x}{3x-15} = 0$

d) $\lim_{x\to2} \frac{x^2+3x-10}{x^3-x^2-8x+12} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x\to2} \frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x^2+x-6)} =$

$= \lim_{x\to2} \frac{x+5}{x^2+x-6} = \begin{cases} \lim_{x\to2^-} \frac{x+5}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim_{x\to2^+} \frac{x+5}{x^2+x-6} = +\infty \end{cases}$

8 Aplica la regla de L'Hôpital para resolver estos límites:

a) $\lim_{x\to0} \frac{tg\ x}{5x}$ **b)** $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{sen\ x}$

c) $\lim_{x\to0} \frac{sen\ x}{x+tg\ x}$ **d)** $\lim_{x\to0} \frac{1-cos\ x}{(e^x-1)^2}$

a) $\lim_{x\to0} \frac{tg\ x}{5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{1+tg^2 x}{5} = \frac{1}{5}$

b) $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{sen\ x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{e^x}{cos\ x} = 1$

c) $\lim_{x\to0} \frac{sen\ x}{x+tg\ x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{cos\ x}{1+1+tg^2 x} = \frac{1}{2}$

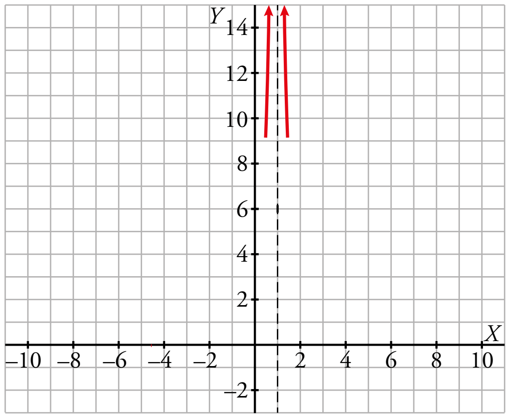
d) $\lim_{x\to0} \frac{1-cos\ x}{(e^x-1)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{sen\ x}{2(e^x-1)e^x} = \lim_{x\to0} \frac{sen\ x}{2e^{2x}-2e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to0} \frac{cos\ x}{4e^{2x}-2e^x} = \frac{1}{2}$

9 **Calcula y representa los resultados obtenidos.**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right]$

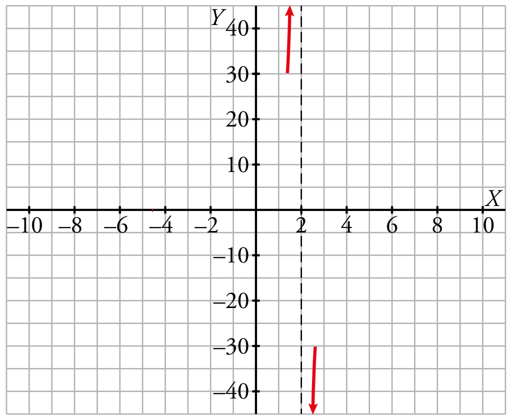
b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x-2} \right]$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)} \right] = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x(x-1)^2} = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} - \dfrac{4}{x-2} \right] = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-4x + 15}{x^2 - 5x + 6} =$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = -\infty \end{cases}$$



10 **Estudia el límite de las siguientes funciones en los puntos en los que se anula su denominador. Representa gráficamente los resultados obtenidos:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8}$

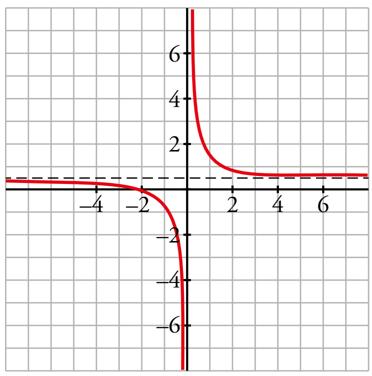
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x}$

a) $2x^2 - 2x = 0 \ \to \ x = 0, \ x = 1$

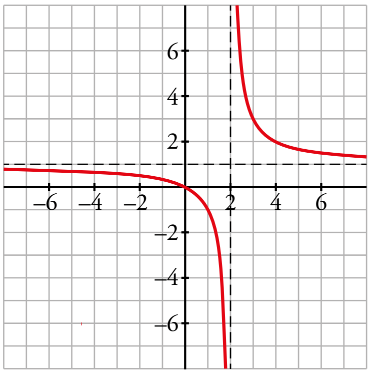
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2-2x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 2x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{2x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{2x} = \frac{3}{2}$$



b) $x^2 - 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 2,\; x = 4$

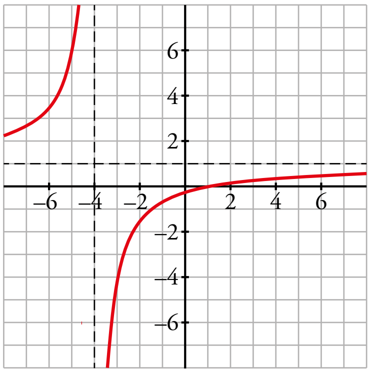


$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 4} \frac{x(x-4)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x}{x-2} = 2$$

c) $x^2 + 5x + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = -4,\; x = -1$



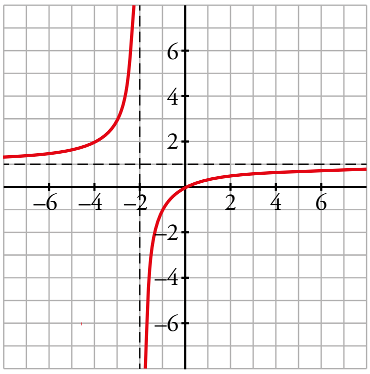
$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+4)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+4} = -\frac{2}{3}$$

d) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 3x - 10) = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 0,\; x = 5$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = -\infty \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x-5)}{x(x^2 - 3x - 10)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)}{x^2 - 3x - 10} = 0$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 3x^2 - 10x} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2(x-5)}{x(x+2)(x-5)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x}{x+2} = \frac{5}{7}$$

11 Halla el valor de los límites que se piden, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \dfrac{3}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

a) 0^+ b) 1 c) –3

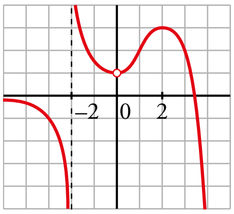
d) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{3}{(0^-)} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{3}{(0^+)} = +\infty$ Por tanto, el límite no existe.

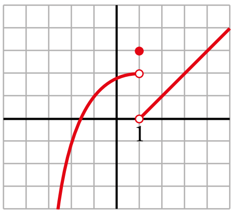
e) 3 f) 0^+

Página 147

Continuidad

12 Estudia la continuidad de cada una de estas funciones. En los puntos en los que sean discontinuas, di cuál es el límite por la derecha y por la izquierda e indica el tipo de discontinuidad.

a) 

b) 

a) La función es discontinua en $x = -2$ y $x = 0$.

En $x = 2$ tiene una discontinuidad de salto infinito: el límite por la izquierda es $-\infty$ mientras que el límite por la derecha es $+\infty$.

En $x = 0$ tiene una discontinuidad evitable aunque en este punto no está definida, los límites laterales coinciden, siendo 1.

b) La función es discontinua en $x = 1$. En este punto tiene una discontinuidad de salto finito. La función vale 3 mientras que el límite por la izquierda vale 2 y el límite por la derecha vale 0.

13 Estudia la continuidad de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } 3 < x < 6 \\ 0 & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$

a) • Continuidad:

— Si $x \ne 0$ y $x \ne 1$ → Es continua, pues está formada por funciones continuas.

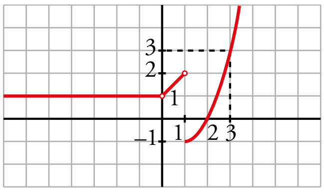
— En $x = 0$ → $\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \text{No existe } f(0). \end{cases}$

Hay una discontinuidad evitable en $x = 0$.

— En $x = 1$ → $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 2x) = -1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

- Gráfica:



b) • Continuidad:

— Si $x \neq 3$ y $x \neq 6$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.

— En $x = 3$ $\rightarrow$ $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (3x - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$

$f(x)$ es continua en $x = 3$.

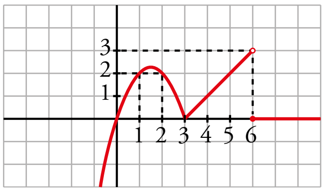
— En $x = 6$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^-} (x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 6^+} 0 = 0 \\ f(6) = 0 \end{cases}$

Discontinuidad de salto finito en $x = 6$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3x - x^2) = -\infty$

- Gráfica:



14 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4 + \ln x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} & \text{si } x \le -1 \\ \dfrac{-1}{x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x^2-4} & \text{si } x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = -2 \end{cases}$

a) La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq 1$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 0$:

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (3x^2 + 1) = 1 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ $\rightarrow$ Es continua en $x = 0$.

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (3x^2 + 1) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4 + \ln x) = 4 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1)$ $\rightarrow$ Es continua en $x = 1$.

b) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que no está definida cuando $x = 0$.

Cuando $x \neq 0$ y $x \neq -1$ la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En $x = 0$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^-} e^{1-x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-1}{x} = 1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1) \to \text{Es continua en } x = -1.$$

c) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{2\}$ ya que no está definida cuando $x = 2$.

Cuando $x \neq -2$ y $x \neq 2$ la función es continua porque la función que interviene lo es.

En $x = 2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Veamos la continuidad en $x = -2$:

$$f(-2) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

Como existe el límite pero no coincide con el valor de la función, tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.

15 **[La búsqueda del valor que pide el enunciado permite poner en práctica la asunción de riesgos de la dimensión productiva de esta clave].**

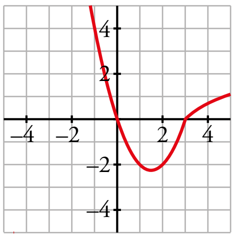
Calcula el valor de k para que las siguientes funciones sean continuas en todo su dominio. Represéntalas para el valor de k obtenido:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx & \text{si } x < 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **b)** $g(x) = \begin{cases} kx^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) La función es continua cuando $x \neq 3$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + kx) = 9 + 3k \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x-2) = 0 \end{array}\right\} \to 9 + 3k = 0 \to k = -3$$

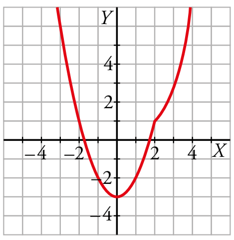


Cuando $k = -3$ la función también es continua en $x = 3$.

b) La función es continua cuando $x \neq 2$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} g(2) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (kx^2 - 3) = 4k - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} e^{x-2} = 1 \end{array}\right\} \to 4k - 3 = 1 \to k = 1$$



Cuando $k = 1$, la función también es continua en $x = 2$.

16 **Calcula el valor de a y b para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x < 0 \\ ax + b & si \;\; 0 \le x < 1 \\ 2 & si \;\; 1 \le x \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \ne 0$ y $x \ne 1$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Veamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \end{array}\right\} \to b = -1$$

Veamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (ax - 1) = a - 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2 \end{array}\right\} \to a - 1 = 2 \to a = 3$$

Cuando $a = 2$ y $b = -1$ la función es continua en todo su dominio.

Para resolver

17 **a) Calcula el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 0$, $x \to 2$, $x \to 3$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$:**

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

b) Representa gráficamente los resultados.

a) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

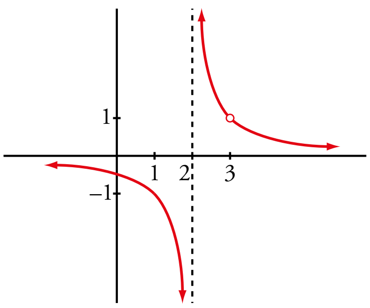
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

b)



18 **a) Calcula el límite de la función** $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ **en aquellos puntos en los que no está definida.**

b) Halla su límite cuando $x \to +\infty$ **y cuando** $x \to -\infty$**.**

c) Representa la función con los datos que has obtenido.

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0, 3\}$, pues el denominador se anula en:

$$x^2 - 3x = 0 \to x(x-3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

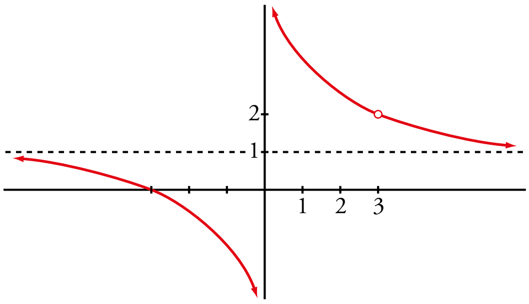
$$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{6}{3} = 2$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} = 1$; $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{x} = 1$

c)



19 **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x}$**.**

a) Calcula:

$$\lim_{x \to 0} f(x); \quad \lim_{x \to 1} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

b) ¿Cuál es la función que coincide con $f(x)$ **excepto en** $x = 0$ **y en** $x = 1$**?**

c) ¿En qué puntos no es continua $f(x)$**?**

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2(x-2)(x-1)}{x(x-1)}$$

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} [x(x-2)] = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} [x(x-2)] = -1$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $g(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$

c) En $x = 0$ y en $x = 1$ la función no está definida (hay discontinuidades evitables).

20 **Considera la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en $x = 3$.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a) Para analizar la continuidad en $x = 3$ estudiamos si se cumple que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

$$f(3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{ El límite no existe.}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y tiene una discontinuidad de salto infinito.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2}{(x+1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2}{x^2-2x-3} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{(x-4)(x-5)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{x^2-9x+20} = 0$

21 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2-\sqrt{x^4-1}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(1-\sqrt{3-x})(1+\sqrt{3-x})}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-(3-x)}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-3+x}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(1+\sqrt{3-x})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{1+\sqrt{3-x}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+9-9}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} =$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2(\sqrt{x+9}+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty \end{cases}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-\sqrt{x^2+2x}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2+2x})(x+\sqrt{x^2+2x})}{x+\sqrt{x^2+2x}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-(x^2+2x)}{x+\sqrt{x^2+2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{x+\sqrt{x^2+2x}} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-\sqrt{x^4-1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2-\sqrt{x^4-1})(x^2+\sqrt{x^4-1})}{x^2+\sqrt{x^4-1}} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4-(x^4-1)}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}} = 0$

22 En los juzgados centrales de una determinada región ha comenzado una campaña para ahorrar papel. El ahorro se concreta en la siguiente función:

$$A(x) = \begin{cases} e^{0,02x} & \text{si } 1 \le x \le 100 \\ -\dfrac{1}{50}x + 8 & \text{si } 100 < x \le 390 \end{cases}$$

donde x son los días transcurridos desde que se inició la campaña y $A(x)$ es el número de miles de hojas de papel ahorradas.

a) Estudia la continuidad de $A(x)$.

b) ¿Qué sucede cuando han transcurrido 100 días desde el inicio de la campaña?

c) ¿En qué momento el ahorro es de 5 000 hojas?

a) La función es continua cuando $x \neq 100$ ya que está definida mediante funciones continuas en sus intervalos de definición.

Para que sea continua en $x = 100$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 100} f(x) = f(100)$:

$$f(100) = e^2 \approx 7{,}389$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 100^-} e^{0,02x} = e^2 \\ \lim\limits_{x \to 100^+} \left(-\dfrac{1}{50}x + 8\right) = 6 \end{array}\right\} \text{ Por tanto, no existe límite.}$$

En consecuencia, la función no es continua en $x = 100$.

b) Cuando transcurren 100 días desde el inicio de la campaña, se produce una brusca caída en el ahorro de papel ya que disminuye desde más de 7 000 hojas a solo 6 000.

c) Igualando cada una de las expresiones a 5, obtenemos que:

$$e^{0,02x} = 5 \;\rightarrow\; x = \frac{\ln 5}{0,02} \approx 80{,}47$$

$$-\frac{1}{50}x + 8 = 5 \;\rightarrow\; x = 150$$

Se ahorran 5 000 hojas en los días 81 y 150 desde el inicio de la campaña.

Página 148

23 El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 € y 8 €. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x) = \begin{cases} 3 + Ax & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ 53 + 2x + Bx^2 & \text{si } 5 < x \le 8 \end{cases}$$

siendo $F(x)$ la facturación de la empresa en bolsa, en miles de euros, y x el precio por cada acción, en €. Se sabe que para un precio de la acción de 5 €, la facturación es de 13 000 € y que la función es continua. Determina los parámetros A y B.

En primer lugar:

$$F(5) = 13 \;\rightarrow\; 3 + 5A = 13 \;\rightarrow\; A = 2$$

Y como la función es continua:

$$3 + 5A = 53 + 10 + 25B \;\rightarrow\; 3 + 10 = 53 + 10 + 25B \;\rightarrow\; B = -2$$

24 **Sea la función** $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$.

a) **Estudia su continuidad, analizando los distintos tipos de discontinuidad que existan.**

b) **En aquellos puntos donde $f(x)$ no es continua, ¿es posible definir de nuevo la función para evitar la discontinuidad?**

a) Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-6=0 \to x=-3,\ x=2$

En $x=-3$ y $x=2$ la función no es continua ya que no está definida en dichos puntos. Veamos los tipos de discontinuidad:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to -3} \frac{x-1}{x-2} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, en $x=-3$ tiene una discontinuidad evitable y en $x=2$ tiene una discontinuidad de salto infinito.

b) Solo es posible en $x=-3$, definiéndola con el valor $\dfrac{4}{5}$.

25 **Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6}$

a) $x^2-x-2=0 \to x=-1,\ x=2 \to$ El dominio de definición es $\mathbb{R}-\{-1, 2\}$.

La función es continua cuando $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

En $x=-1$ y $x=2$ no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor.

En $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = +\infty \end{cases}$$

En este caso es inevitable de salto infinito.

En $x=2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-x-2} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

b) $x^2-x-6=0 \to x=-2,\ x=3 \to$ El dominio de definición es $\mathbb{R}-\{-2, 3\}$.

La función es continua cuando $x \neq -2$ y $x \neq 3$.

En $x=-2$ y $x=3$ no es continua al no estar definida en ellos. Veamos el tipo de discontinuidad en cada valor.

En $x=-2$:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6} = +\infty \end{cases}$$

Se trata de una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-3x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+x)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{12}{5}$$

En esta ocasión se trata de una discontinuidad evitable.

26 **Estudia la continuidad de estas funciones para los distintos valores del parámetro a:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ f(2) = 4 + 2a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ 4 + 2a = a - 4 \;\to\; a = -8 \end{array}$$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua ha de ser: } 1 = 2a \;\to\; a = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

27 **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ ax^2 - 6ax + 5 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en $x = -1$.

b) Halla a para que la función sea continua en $x = 2$.

c) Representa la función para $a = 1$.

a) Analizamos si se cumple que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} (3x + 1) = -2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (x - 1) = -2 \\ f(-1) = -2 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -2$$

La función es continua en $x = -1$.

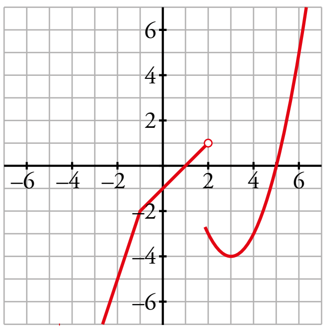
b) Para que sea continua en $x = 2$ se deben cumplir que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (x - 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (ax^2 - 6ax + 5) = -8a + 5 \\ f(2) = -8a + 5 \end{array}\right\} \to 1 = -8a + 5 \to a = \frac{1}{2}$$

Si $a = \frac{1}{2}$, los límites laterales coinciden con el valor de la función y esta será continua en $x = 2$.

c) Para $a = 1$ la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x - 1 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



28 Calcula los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital. Para ello, convierte los productos en cocientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot e^{1/x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot e^{1/x} = (0) \cdot \infty$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot e^{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} e^{1/x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty \end{cases}$$

Por tanto, no existe el límite buscado.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \infty \cdot 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{1+x} \cdot \left(\frac{x-1-x}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

29 El rendimiento físico de un deportista, durante 60 minutos, varía con el tiempo según esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -t(t-a) & \text{si } 0 \le t < 15 \\ 3,5a + 5 & \text{si } 15 \le t < 30 \\ 100 - bt & \text{si } 30 \le t \le 60 \end{cases}$$

Calcula a y b para que la función rendimiento sea continua.

La función es continua cuando $x \neq 15$ y $x \neq 30$ ya que está definida mediante funciones continuas.

Comprobamos la continuidad en $x = 15$:

$$\left. \begin{array}{l} f(15) = 3,5a + 5 \\ \lim\limits_{t \to 15^-} [-t(t-a)] = -225 + 15a \\ \lim\limits_{t \to 15^+} (3,5a + 5) = 3,5a + 5 \end{array} \right\} \to -225 + 15a = 3,5a + 5 \to a = 20$$

Cuando $a = 20$, la función es continua en $x = 15$, ya que $f(15) = \lim\limits_{x \to 15} f(x)$.

Comprobamos la continuidad en $x = 30$:

$$\left. \begin{array}{l} f(30) = 100 - 30b \\ \lim\limits_{t \to 30^-} 75 = 75 \\ \lim\limits_{t \to 30^+} (100 - bt) = 100 - 30b \end{array} \right\} \to 75 = 100 - 30b \to b = \frac{5}{6}$$

Cuando $b = \frac{5}{6}$ la función es continua en $x = 30$, ya que $f(30) = \lim\limits_{x \to 30} f(x)$.

30 Sabemos que $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^3+bx^2+8x-4}$ es discontinua en $x = 2$. Calcula b y estudia el comportamiento de la función en las proximidades de los puntos de discontinuidad.

Para que la función sea discontinua en $x = 2$, este valor debe ser una raíz del denominador. Por tanto,

$$2^3 + b \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 0 \ \to \ b = -5$$

De donde $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^3-5x^2+8x-4}$.

Hallamos todas las raíces del denominador:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2$$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

La función no es continua en $x = 1$ y en $x = 2$. Veamos ahora el comportamiento de la función en las proximidades de estos puntos:

En $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(-1)}{(0)} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = -\infty \end{cases}$$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{(2)}{(0)} = +\infty$$ ya que la fracción es un cociente de números positivos en las proximidades de $x = 2$.

31 Estudia la continuidad de $f(x)$ según los distintos valores de m.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - mx^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{mx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \ne 1$ al estar definida mediante funciones continuas.

Comprobamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3 - m \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} (3 - mx^2) = 3 - m \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{mx} = \frac{2}{m} \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$ debe ser $3 - m = \dfrac{2}{m} \ \to \ m = 1, 2$.

Cuando $m = 1$ o $m = 2$ la función es continua en $x = 1$.

Si $m \ne 1$ y $m \ne 2$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

32 **Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ con $a \neq 0$, calcula los valores de a y b para que la función pase por el punto (2, 3) y $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -4$.**

f pasa por (2, 3) $\to f(2) = 3 \to \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{ax^2 + b}{a - x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a \to -a = -4 \to a = 4$$

Así:

$$\frac{16 + b}{2} = 3 \to b = -10$$

33 **Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua. ¿Alguna de ellas es continua en todo $\mathbb{R}$?:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ \ln k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + x^2 + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + x^2 + 1) = 3$$

$$f(1) = \ln k$$

Para que sea continua $\ln k = 3 \to k = e^3$.

Además, es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que el cociente de polinomios solo se anula cuando $x = 1$.

b) Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$g(1) = 2^k$$

Para que sea continua $2^k = \dfrac{1}{2} \to k = -1$.

Esta función también es continua en todo $\mathbb{R}$ porque el cociente solo se anula cuando $x = 1$.

34 **Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{2-|x|}$ y clasifica sus discontinuidades.**

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La función es continua en él.

En $x = -2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2+x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2+x} = +\infty \end{cases}$$

Presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-|x|} = \frac{(1)}{(0)} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty \end{cases}$$

Tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

NOTA: Podríamos haber usado la simetría de la función respecto del eje Y (es una función par) para haber deducido el comportamiento en $x = 2$ a partir del estudio en $x = -2$.

35 **Estudia la continuidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \ne -1$ y $x \ne 1 \to$ la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1 \to$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.
  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

36 **[La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

Halla el valor de t para que la siguiente función sea continua en $x = 2$. Represéntala en el caso $t = 2$ y di qué tipo de discontinuidad tiene:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| - t & \text{si } x \le 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

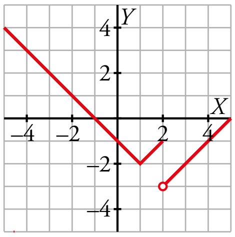
Estudiamos la continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (|x-1| - t) = 1 - t \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-5) = -3 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 2$ debe ser $1 - t = -3 \to t = 4$.

Supongamos ahora que $t = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1|-2 & \text{si } x \le 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -(x-1)-2 & \text{si } x < 1 \\ x-1-2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x-1 & \text{si } x < 1 \\ x-3 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



37 **Calcula el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, definiéndolas previamente por intervalos:**

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ **b)** $g(x) = |x-3| - |x|$ **c)** $h(x) = |2x-1| + x$ **d)** $i(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

b) $|x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ $\quad |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$g(x) = |x-3| - |x| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 2x-3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x+3) = +\infty$$

c) $|2x-1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$h(x) = |2x-1| + x = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ 3x-1 & \text{si } x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x+1) = +\infty$$

d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to +\infty} i(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} i(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1$$

38 **Estudia la continuidad en $x = 0$ de esta función:**

$$f(x) = 2x + \frac{|x|}{x}$$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

entonces: $\lim\limits_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

Página 149

Cuestiones teóricas

39 **Sabiendo que:**

$$\lim_{x \to 2} p(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2} q(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2} r(x) = 3 \qquad \lim_{x \to 2} s(x) = 0$$

di, en los casos en que sea posible, el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)|$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)|$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{s(x)}{p(x)} = \dfrac{0}{+\infty} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [s(x)]^{p(x)} = 0^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 2} |s(x) \cdot q(x)| = (0) \cdot (-\infty) \rightarrow$ Indeterminado.

d) $\lim\limits_{x \to 2} |p(x) - 2q(x)| = +\infty - 2(-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

40 **Dibuja, en cada caso, la gráfica de una función que verifique las siguientes condiciones:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

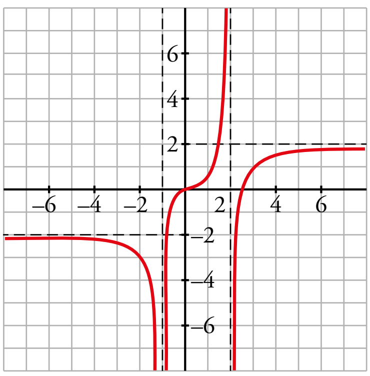
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x < 2 \\ -\infty & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

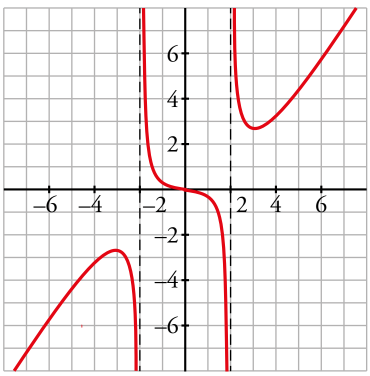
$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < 2 \\ +\infty & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } x < -2 \\ +\infty & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a)



b)



Para profundizar

41 Estudia los valores que pueden tomar a y b para que la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2-2x}$ tenga una discontinuidad evitable.

Primero calculamos su dominio:

$$x^2 - 2x = 0 \to x = 0, \; x = 2$$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

La función puede tener discontinuidades evitables en $x = 0$ o $x = 2$.

Si $b = 0$ y $a \neq 0$ la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$, ya que existe el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax}{x(x-2)} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{x-2} = -\frac{a}{2}$$

Si $b \neq 0$, solo puede tener una discontinuidad evitable en $x = 2$. Para ello, $x = 2$ debe ser una raíz del numerador de la fracción, es decir:

$$2a + b = 0 \to a = -\frac{b}{2}$$

En tal caso:

$$\lim_{x \to 2} \frac{-\frac{b}{2}x + b}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-bx + 2b}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{b(-x+2)}{2x(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-b}{2x} = -\frac{b}{4}$$

La discontinuidad es evitable ya que existe el límite.

En conclusión:

- Si $b = 0$ y $a \neq 0$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.
- Si $b \neq 0$ y $a = -\dfrac{b}{2}$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

42 Halla el valor de a y de b para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$ y pase por el punto (1, –2):

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| \le 2 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

La función es par, ya que está definida mediante dos funciones pares en intervalos de definición simétricos respecto del origen. Por tanto, la continuidad en $x = 2$ garantiza la continuidad en $x = -2$.

Como pasa por el punto (1, –2), se cumple que $f(1) = -2 \to a + b = -2$.

Comprobamos la continuidad en $x = 2$:

$$f(2) = 4a + b$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 + b) = 4a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Para que sea continua en $x = 2$, deben coincidir $4a + b = \dfrac{1}{4}$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 4a + b = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \to a = \frac{3}{4}, \; b = -\frac{11}{4}$$

43 Define la función $f(x) = |x+3| - |x-3|$ por intervalos y calcula sus límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} |x+3| = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x < -3 \\ x+3 & \text{si } x \ge -3 \end{cases} \\ |x-3| = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases} \end{array}\right\} \to f(x) = |x+3| - |x-3| = \begin{cases} -6 & \text{si } x < -3 \\ 2x & \text{si } -3 \le x < 3 \\ 6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 6 = 6$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-6) = -6$$

44 Halla los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \\ sen\,(ax) & \text{si } 0 \le x < \pi \\ (x-\pi)^2 + 1 & \text{si } x \ge \pi \end{cases}$$

La función es continua cuando $x \ne 0$ y $x \ne \pi$ ya que está definida mediante funciones continuas en sus intervalos de definición. Veamos ahora la continuidad en $x = 0$ y en $x = \pi$:

- $f(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + b) = b \\ \lim_{x \to 0^+} sen\,(ax) = 0 \end{array}\right\} \to b = 0$$

- $f(\pi) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to \pi^-} sen\,(ax) = sen\,(a\pi) \\ \lim_{x \to \pi^+} [(x-\pi)^2 + 1] = 1 \end{array}\right\} \to sen\,(a\pi) = 1 \to a\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \text{ con } k \in \mathbb{Z} \to a = \frac{1}{2} + 2k \ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Para los valores de a y b obtenidos, la función es continua en todo su dominio.

45 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{sen\,x}\right)^{\frac{1}{x}}$ **b)** $\lim_{x \to \pi} \frac{sen\,x}{1 - cos\,x}$ **c)** $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\,x}{1 + sen\,x}$ **d)** $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 + sen\,x}{1 - cos\,x}$

a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{sen\,x}\right)^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

b) $\lim_{x \to \pi} \frac{sen\,x}{1 - cos\,x} = \frac{sen\,\pi}{1 - cos\,\pi} = \frac{0}{2} = 0$

c) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{tg\,x}{1 + sen\,x} = \begin{cases} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{tg\,x}{1 + sen\,x} = +\infty \\ \lim_{x \to (\pi/2)^+} \frac{tg\,x}{1 + sen\,x} = -\infty \end{cases}$

d) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 + sen\,x}{1 - cos\,x} = \frac{2}{1} = 2$

AUTOEVALUACIÓN

Página 149

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2+e^x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2+e^x) = 2+0=2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

2 Halla el límite de la función $f(x) = \left(\dfrac{2x^2+4}{x^2-1} - \dfrac{3}{x-1}\right)$ **cuando** $x \to 1,\ x \to -1,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$.

Representa gráficamente la información que obtengas.

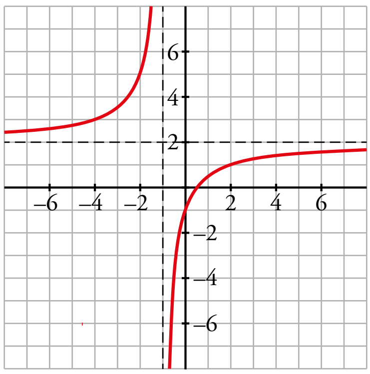
$$f(x) = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3}{x-1} = \frac{2x^2+4}{(x+1)(x-1)} - \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2+4-3x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(0)}{(0)} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x-1)} = 2$$



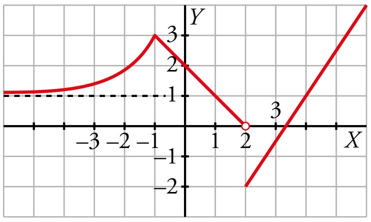
3 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y di el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \end{cases}$ f no tiene límite cuando $x \to 2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

4 Considera la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

a) Halla a para que la función sea continua en $x = 1$.

b) ¿Es discontinua en algún punto?

c) Para $a = -2$, representa la función.

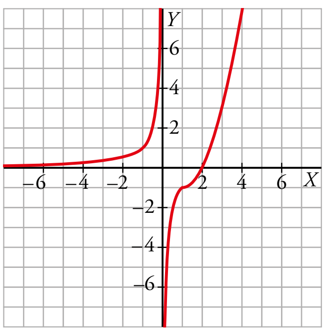
a) Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a \end{array}\right\} \to -1 = 1 + a \to a = -2$$

Si $a = -2$, la función es continua en $x = 1$.

b) La función es discontinua en $x = 0$, ya que no está definida en dicho valor al anularse el denominador de la fracción. En $x = 0$ hay una discontinuidad de salto infinito.

c) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$



5 **Se considera la función** $f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{ax-3}{x^2-4x+3} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Estudia la continuidad de f para los distintos valores del parámetro a.

La función está definida por intervalos. Para analizar su continuidad debemos estudiar la continuidad cuando $x < 0$, cuando $x > 0$ y en el punto de ruptura $x = 0$.

- Para que sea continua en $x = 0$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (-e^x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ax-3}{x^2-4x+3} = \dfrac{-3}{3} = -1 \end{array}\right\} \to \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = -1$$

  Por tanto, la función es continua en $x = 0$, para cualquier valor del parámetro a.

- Cuando $x < 0$, la función también es continua ya que es de tipo exponencial.
- Veamos ahora qué ocurre cuando $x > 0$. Para ello, empezamos calculando las raíces del denominador:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1,\ x = 3$$

— Cuando $x \ne 1$ y $x \ne 3$ la función es continua por ser un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula.

— En $x = 1$ y en $x = 3$ la función no es continua al no estar definida. Analicemos el tipo de discontinuidad en función del parámetro a.

- En $x = 1$:

  $f(1)$ no existe.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{ax-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 1} \frac{ax-3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \ne 3 \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 3 \to \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{x-3} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

  Por tanto, si $a = 3$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable. Si $a \ne 3$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

- En $x = 3$:

  $f(3)$ no existe.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{ax-3}{x^2-4x+3} = \lim_{x \to 3} \frac{ax-3}{(x-1)(x-3)} = \frac{(3a-3)}{(0)} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{Si } a \ne 1 \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(3a-3)}{(0)} = \pm\infty \\ \text{Si } a = 1 \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{(0)}{(0)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  Por tanto, si $a = 1$, $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad evitable. Si $a \ne 1$, $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito.

Resumiendo, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$; en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable si $a = 3$ o una discontinuidad de salto infinito si $a \ne 3$, y en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable si $a = 1$ o una discontinuidad de salto infinito si $a \ne 1$.

6 a) Calcula a y b para que f sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) Representa la función obtenida.

a) • f es continua si $x < -2$, si $-2 < x < 1$ y si $1 < x$, por estar definida por funciones continuas.

• Para que f sea continua en $x = -2$, debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$:

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = -2(-2) + a = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to -2^-} (-2x + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = 4 - 5 = 1 \end{array} \right\} \text{ Por tanto: } 4 + a = -1 \rightarrow a = -5$$

• Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, debe ser $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = b \cdot 1 + 3 = b + 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 5) = -4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (bx + 3) = b + 3 \end{array} \right\} \text{ Por tanto: } b + 3 = -4 \rightarrow b = -7$$

b) $f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

La representación gráfica se muestra a la derecha: