

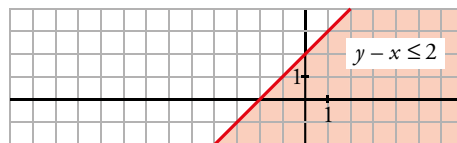
4 PROGRAMACIÓN LINEAL

Página 101

Resuelve

Resolución de inecuaciones lineales

- Para representar $x - y \leq 2$, representa la recta de ecuación $x - y = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.

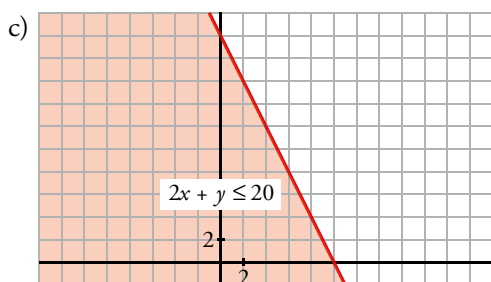
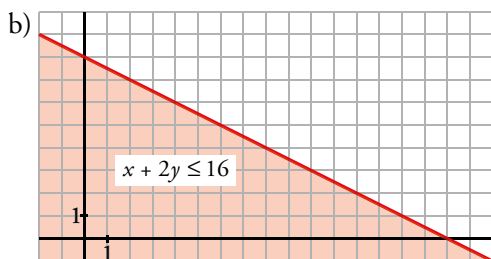
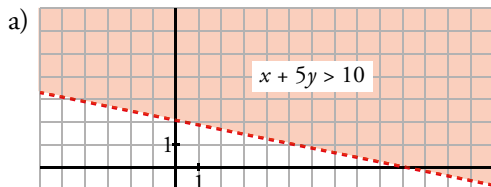


- Representa, de forma análoga, las siguientes inecuaciones:

a) $x + 5y > 10$

b) $x + 2y \leq 16$

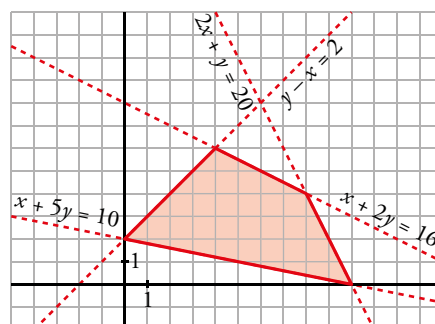
c) $2x + y \leq 20$



Resolución de sistemas de inecuaciones

- Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 2 \\ x + 5y \geq 10 \\ x + 2y \leq 16 \\ 2x + y \leq 20 \end{cases}$$



2 ► PROGRAMACIÓN LINEAL PARA DOS VARIABLES. ENUNCIADO GENERAL

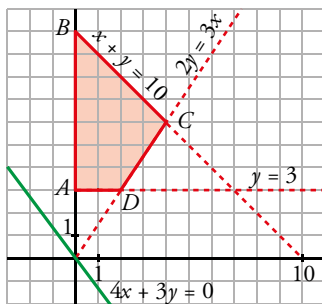
Página 110

1 Representa la región definida por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0, \quad y \geq 3, \quad x + y \leq 10, \quad 2y \geq 3x$$

Averigua en qué puntos se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 4x + 3y$.

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right\} A(0, 3) \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 10 \end{array} \right\} B(0, 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ 2y = 3x \end{array} \right\} C(4, 6) \quad \left. \begin{array}{l} 2y = 3x \\ y = 3 \end{array} \right\} D(2, 3)$$

$$F(A) = F(0, 3) = 9 \quad F(B) = F(0, 10) = 30$$

$$F(C) = F(4, 6) = 34 \quad F(D) = F(2, 3) = 17$$

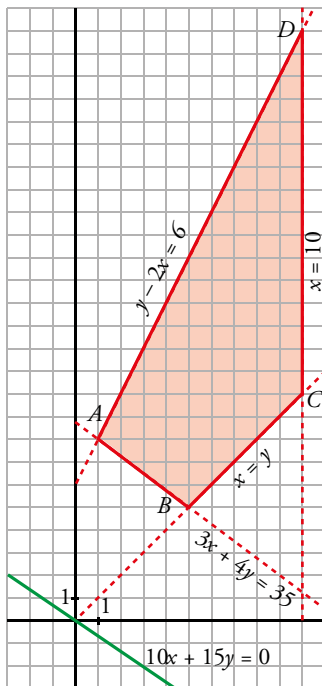
$F(x, y) = 4x + 3y$ se hace mínima en $A(0, 3)$ y máxima en $C(4, 6)$.

2 Representa el recinto definido por estas inecuaciones:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x \leq 10 \quad x \leq y \quad y - 2x \leq 6 \quad 3x + 4y \geq 35$$

¿En qué punto la función $F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo?

Representamos las rectas y vemos en qué puntos se cortan:



$$\left. \begin{array}{l} y - 2x = 6 \\ 3x + 4y = 35 \end{array} \right\} A(1, 8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 35 \\ x = y \end{array} \right\} B(5, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ x = 10 \end{array} \right\} C(10, 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y - 2x = 6 \end{array} \right\} D(10, 26)$$

$$F(A) = F(1, 8) = 130$$

$$F(B) = F(5, 5) = 125$$

$$F(C) = F(10, 10) = 250$$

$$F(D) = F(10, 26) = 490$$

Representamos después la dirección de las rectas que son de la forma $10x + 15y = K$.

$F(x, y) = 10x + 15y$ alcanza el valor máximo en el punto $D(10, 26)$.

3 En una confitería se elaboran tartas de NATA y de MANZANA. Cada tarta de nata requiere medio kilo de azúcar y 8 huevos; y una de manzana, 1 kg de azúcar y 6 huevos. En la despensa quedan 10 kg de azúcar y 120 huevos.

¿Cuántas tartas de cada tipo se deben hacer si pretendemos que los ingresos por su venta sean máximos?

Considera tres casos:

a) Sus precios son: T. NATA, 12 €; T. MANZANA, 15 €.

b) Sus precios son: T. NATA, 16 €; T. MANZANA, 12 €.

c) Sus precios son: T. NATA, 15 €; T. MANZANA, 10 €.

Anotamos los datos en una tabla:

	CANTIDAD (kg)	HUEVOS	AZÚCAR
NATA	x	$8x$	$(1/2)x$
MANZANA	y	$6y$	$1y$

Restricciones del problema:

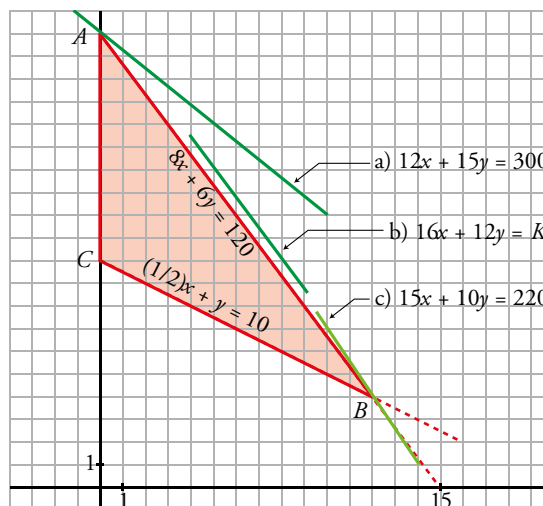
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 6y \leq 120 \\ (1/2)x + y \leq 10 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de intersección:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 8x + 6y = 120 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = 0 \\ 8x + 6y = 120 \end{cases}} \right\} A(0, 20)$$

$$\begin{cases} 8x + 6y = 120 \\ (1/2)x + y = 10 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 8x + 6y = 120 \\ (1/2)x + y = 10 \end{cases}} \right\} B(12, 4)$$

$$\begin{cases} (1/2)x + y = 10 \\ x = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} (1/2)x + y = 10 \\ x = 0 \end{cases}} \right\} C(0, 10)$$



a) Función objetivo: $F_1(x, y) = 12x + 15y$. Dibujamos la dirección de $12x + 15y = K$ trazando $12x + 15y = 300$. $F_1(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $A(0, 20)$. Es decir, hay que hacer 20 tartas de manzana y ninguna de nata.

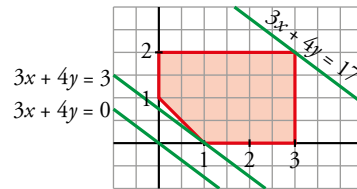
b) Función objetivo: $F_2(x, y) = 16x + 12y$. Dibujamos la dirección de $16x + 12y = K$. El máximo para $F_2(x, y)$ se consigue en cualquier punto, de coordenadas enteras, del lado que pasa por los puntos $A(0, 20)$ y $B(12, 4)$. Además de estas dos, las soluciones son $(3, 16)$, $(6, 12)$ y $(9, 8)$ (la primera coordenada indica las tartas de nata que habría que hacer y la segunda, las tartas de manzana).

c) Función objetivo: $F_3(x, y) = 15x + 10y$. Dibujamos la dirección de $15x + 10y = K$ trazando la recta $15x + 10y = 220$. El máximo de $F_3(x, y)$ está en $B(12, 4)$: 12 tartas de nata y 4 de manzana.

1. Optimización sin contexto. Recinto cerrado

Hazlo tú

- En el mismo recinto, ¿para qué valores es máxima la función $z = 3x + 4y$? ¿Y mínima?



Obtenemos el máximo en el vértice $(3, 2)$:

$$z(3, 2) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17$$

El mínimo está en el vértice $(1, 0)$, en el que:

$$z(1, 0) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 3$$

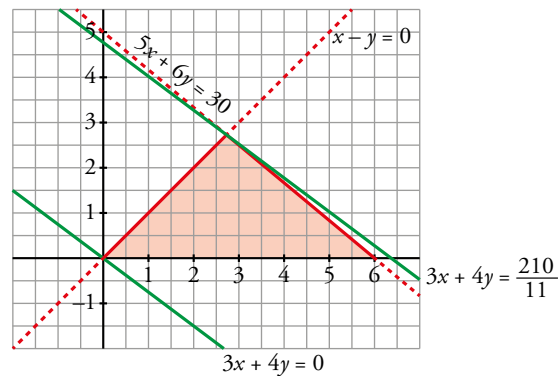
2. Optimización sin contexto. Recinto abierto

Hazlo tú

- Con la misma función, haz lo mismo para este recinto:

$$5x + 6y \leq 30; \quad x - y \geq 0; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

$$F(x, y) = 3x + 4y$$



Obtenemos el máximo en el vértice $\left(\frac{30}{11}, \frac{30}{11}\right)$:

$$F\left(\frac{30}{11}, \frac{30}{11}\right) = 3 \cdot \frac{30}{11} + 4 \cdot \frac{30}{11} = \frac{210}{11} = 19,1$$

El mínimo está en el vértice $(0, 0)$, en el que:

$$F(0, 0) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

3. Puntos de coordenadas enteras

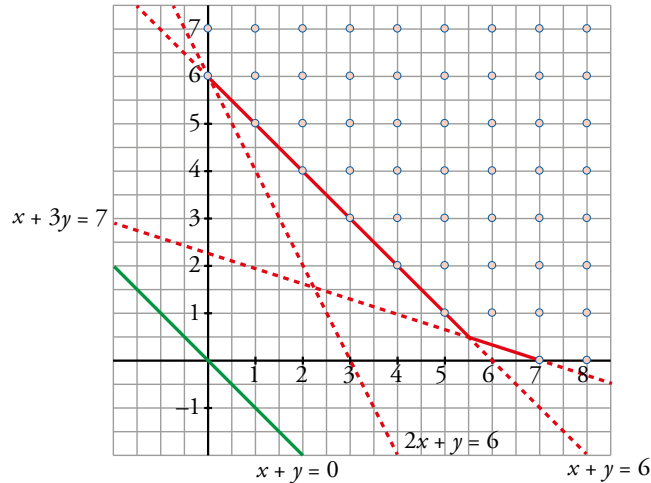
Hazlo tú

- Calcula x e y que hacen máxima y mínima la función $z = x + y$ sujeta a estas restricciones: x e y deben ser números naturales y además:

$$x + y \geq 6; \quad 2x + y \geq 6; \quad x + 3y \geq 7$$

Como deben ser números naturales, añadimos las restricciones: $x \geq 0, y \geq 0$.

La región que se obtiene es:



Tomamos una recta paralela a la función objetivo y vemos que, al trasladarla, los primeros puntos de la región factible por los que pasa son los de la recta $x + y = 6$.

Por tanto, el valor mínimo se obtiene en los puntos $(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)$ y $(5, 1)$.

No hay máximo. La función $x + y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

4. Coste mínimo

Hazlo tú

- En una granja hay un total de 9000 conejos. La dieta mensual mínima que debe consumir cada conejo es de 48 unidades de hidratos de carbono y 60 unidades de proteínas. En el mercado hay dos productos (A y B) que aportan estas necesidades de consumo. Cada envase de A contiene 2 unidades de hidratos de carbono y 4 unidades de proteínas y cada envase de B contiene 3 unidades de hidratos de carbono y 3 unidades de proteínas. Cada envase de A cuesta 0,24 euros y cada envase de B cuesta 0,20 euros.

Calcula el número de envases de cada tipo que se debe adquirir para que el coste sea mínimo. Halla el valor de dicho coste mensual mínimo.

x = envases del producto A

y = envases del producto B

Hacemos una tabla con los datos:

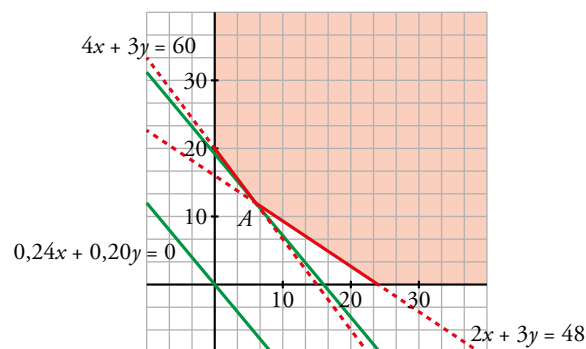
	HIDRATOS DE CARBONO	PROTEÍNAS	COSTE (€)
ENVASE DE A	2	4	0,24
ENVASE DE B	3	3	0,20

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El coste que hay que minimizar es: Coste = $0,24x + 0,20y$

La región factible es:



Tomamos una recta paralela a la función objetivo y vemos que al trasladarla, el primer punto de la región factible por donde pasa es su vértice $A(6, 12)$ (corte de las rectas $2x + 3y = 48$ y $4x + 3y = 60$). Este será el valor mínimo.

Es decir, para cada conejo, para minimizar el coste, hay que comprar 6 envases de tipo A y 12 de tipo B . Para 9000 conejos habrá que comprar $6 \cdot 9000 = 54000$ envases de tipo A y $12 \cdot 9000 = 108000$ envases de tipo B .

El coste mensual mínimo será:

$$\text{Coste} = 0,24 \cdot 54000 + 0,20 \cdot 108000 = 34560 \text{ €}$$

5. Beneficio máximo

Hazlo tú

- En la fabricación de piensos se utilizan tres ingredientes, P , Q y R . Se dispone de 90 toneladas de P , 90 de Q y 70 de R . Se desea fabricar dos tipos de pienso, M_1 y M_2 .

Una vagoneta de pienso M_1 requiere 2 t de P , 1 t de Q y 1 t de R y se vende a 1 200 €, y una vagoneta de M_2 requiere 1 t de P , 2 t de Q y 1 t de R , y se vende a 1 000 €.

¿Cuántas toneladas de cada pienso deben facturarse para obtener el mayor beneficio?

x = toneladas de pienso M_1

y = toneladas de pienso M_2

Hacemos un tabla con los datos:

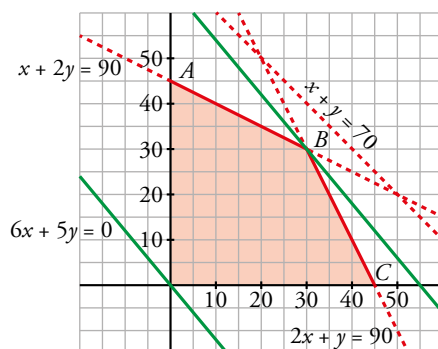
	INGREDIENTE $P(t)$	INGREDIENTE $Q(t)$	INGREDIENTE $R(t)$	COSTE (€)
VAGONETA DE PIENSO M_1	2	1	1	1 200
VAGONETA DE PIENSO M_2	1	2	1	1 000

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 90 \\ x + 2y \leq 90 \\ x + y \leq 70 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar: $z = 1\,200x + 1\,000y$ en euros.

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



El último punto de la región factible en el que tocan las rectas paralelas a la función objetivo es el vértice $B(30, 30)$, punto en el que z será máxima.

Por tanto, deben facturarse 30 toneladas de M_1 y 30 toneladas de M_2 .

6. Solución múltiple

Hazlo tú

- Un tendero va al mercado central con su furgoneta, que puede cargar 700 kg, y con 500 € en el bolsillo, a comprar fruta para su tienda. Encuentra las manzanas a 0,80 €/kg y las naranjas a 0,50 €/kg. El tendero cree que podrá vender las manzanas a 0,88 €/kg y las naranjas a 0,55 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

x = cantidad de manzanas (kg)

y = cantidad de naranjas (kg)

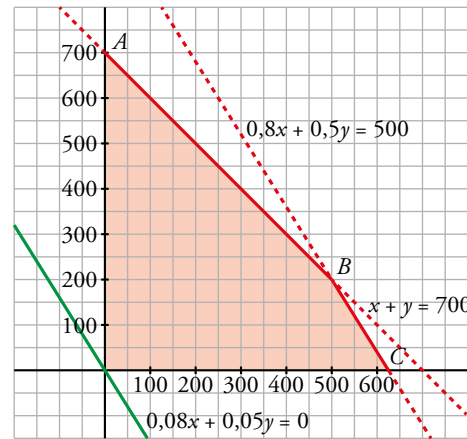
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 700 \\ 0,8x + 0,5y \leq 500 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar:

$$z = 0,08x + 0,05y \text{ en euros.}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo se muestra a la derecha:



Como la recta $0,8x + 0,5y = 500$ es paralela a la función de beneficio, cualquier punto del segmento BC es una solución válida. Es decir, cualquier cantidad de manzanas entre 500 kg y 625 kg y de naranjas entre 0 kg y 200 kg que verifique la igualdad $0,8x + 0,5y = 500$ conseguirá un beneficio máximo. Por ejemplo, comprar 500 kg de manzanas y 200 kg de naranjas, o 500 kg de manzanas y ninguna naranja, o 400 kg de manzanas y 360 kg de naranjas, hace que el beneficio que se obtiene en todos los casos sea máximo:

$$z = 0,08 \cdot 500 + 0,05 \cdot 200 = 50 \text{ €}$$

$$z = 0,08 \cdot 625 + 0,05 \cdot 0 = 50 \text{ €}$$

$$z = 0,08 \cdot 400 + 0,05 \cdot 360 = 50 \text{ €}$$

7. Problema de transporte

Hazlo tú

- Una fábrica de tintas dispone de 1 000 kg del color *A*, 800 kg del color *B* y 300 kg del color *C*, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color *A*, 5 kg del color *B* y 5 kg del color *C* y cada bote de tinta del cartel requiere 5 kg del *A* y 5 kg del *B*.

La fábrica obtiene un beneficio de 30 € por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 € por cada uno de tinta para carteles.

Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

x = número de botes de tinta para etiquetas

y = número de botes de tinta para carteles

Hacemos una tabla con los datos:

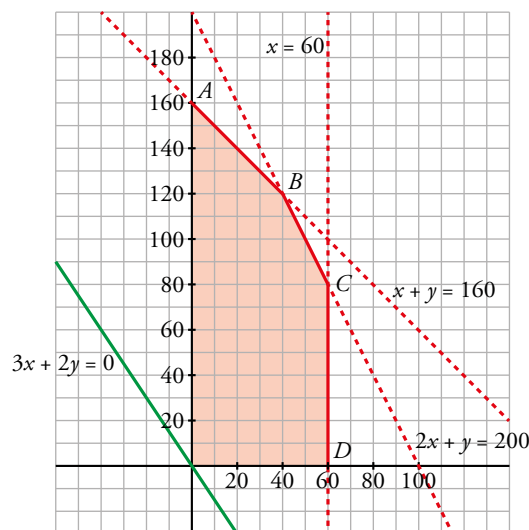
	TINTA A (kg)	TINTA B (kg)	TINTA C (kg)	BENEFICIO (€)
BOTE PARA ETIQUETAS	10	5	5	30
BOTE PARA CARTELES	5	5	0	20

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 10x + 5y \leq 1000 \\ 5x + 5y \leq 800 \\ 5x \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Beneficio que se quiere maximizar: $z = 30x + 20y$ en euros.

La representación de la región de validez y la función de beneficio es:



Evidentemente, la recta variable $30x + 20y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $B(40, 120)$, es decir, debe fabricar 40 botes para etiquetas y 120 botes para carteles para maximizar el beneficio.

El beneficio máximo será de $30 \cdot 40 + 20 \cdot 120 = 3600$ €.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

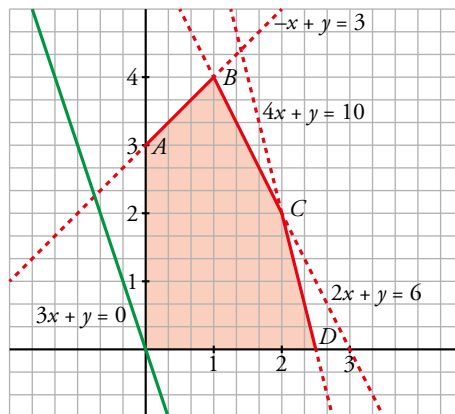
Página 115

1. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos continuos

- Maximizar $F(x, y) = 6x + 2y - 7$ con las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 10 \\ -x + y \leq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $3x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $C(2, 2)$.

El máximo es $F(2, 2) = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 7 = 9$.

2. Optimización de la función objetivo dada una región factible con datos discretos

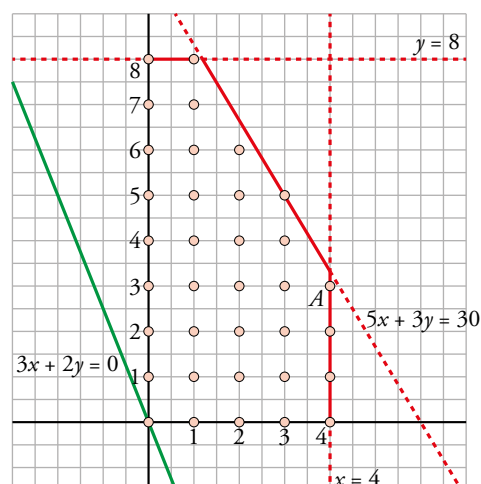
- Maximizar $F(x, y) = 500x + 200y$ teniendo en cuenta que el conjunto de soluciones son puntos de coordenadas enteras y con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ 5x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo se muestra a la derecha:

La recta variable $500x + 200y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(4, 3)$.

El máximo es $F(4, 3) = 500 \cdot 4 + 200 \cdot 3 = 2600$.



3. Maximizar beneficios

- En una empresa van a trabajar mecánicos y electricistas. Por necesidad del mercado debe haber mayor o igual número de electricistas que de mecánicos, y el número de electricistas no debe superar el doble del de mecánicos. Se necesitan al menos 20 electricistas y no hay más de 30 mecánicos disponibles.

Si por cada mecánico se obtienen 2000 € de beneficio mensual y por cada electricista, 2500 €, ¿cuántos de cada clase se deben contratar para maximizar el beneficio?

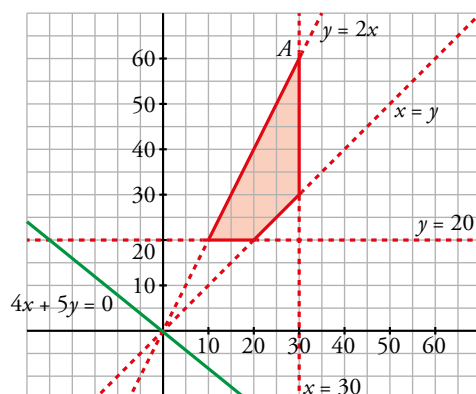
Llamamos x al número de mecánicos e y , al de electricistas.

Restricciones:

$$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Función objetivo: $F(x, y) = 2000x + 2500y$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $2000x + 2500y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(30, 60)$. Hay que contratar 30 mecánicos y 60 electricistas para obtener un beneficio máximo.

4. Minimizar gastos

- Ana debe fertilizar los terrenos de su finca con dos abonos, A y B . El abono A cuesta 0,90 €/kg y el B , 1,50 €/kg. El abono A tiene un 20% de nitrógeno y un 10% de fósforo, mientras que el B contiene un 18% y un 15%, respectivamente.

Los terrenos están bien fertilizados con al menos 180 kg de nitrógeno y 120 kg de fósforo.

¿Cuál es el gasto mínimo que debe hacer Ana para fertilizar de manera correcta sus terrenos?

Llamamos x al número de kilos de abono A e y al número de kilos de abono B .

Hacemos una tabla con los datos:

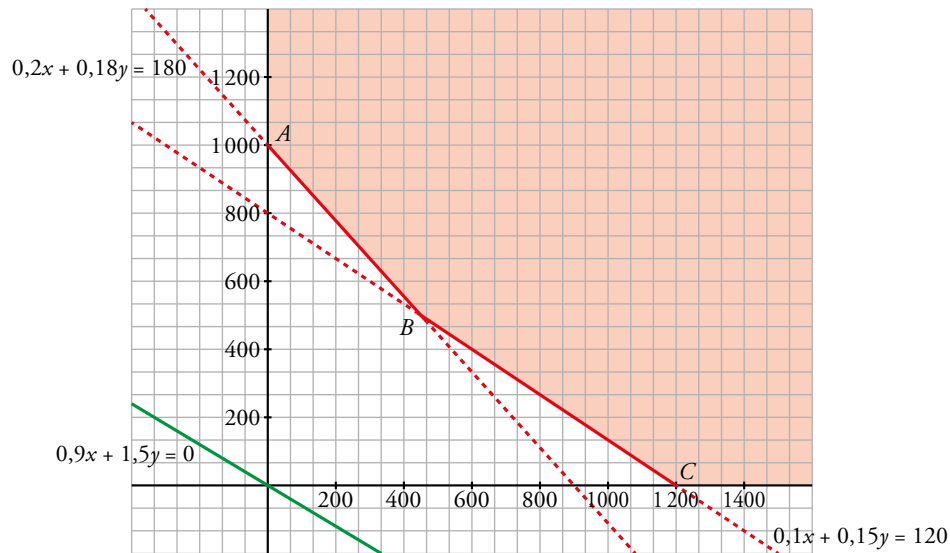
	FERTILIZANTE A	FERTILIZANTE B	NECESIDADES
NITRÓGENO	20 %	18 %	180 kg
FÓSFORO	10 %	15 %	120 kg
COSTE	0,90	1,50	

La función objetivo es $F(x, y) = 0,9x + 1,5y$ en euros.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 0,2x + 0,18y \geq 180 \\ 0,1x + 0,15y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función beneficio es:



La recta variable $0,9x + 1,5y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $C(1200, 0)$.

Ana debe comprar solo 1200 kg de fertilizante A para realizar un gasto mínimo.

Este gasto será de $F(1200, 0) = 0,9 \cdot 1200 = 1080 \text{ €}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

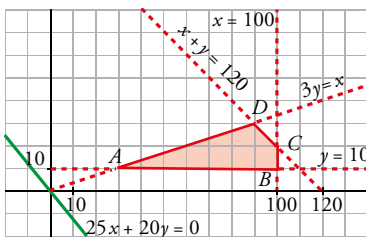
Página 116

Para practicar

1 Maximiza la función $F(x, y) = 25x + 20y$ sometida a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ 3y \leq x \\ x \leq 100, y \geq 10 \end{cases}$$

Dibujamos las rectas y hallamos los puntos de corte:



$$\begin{cases} 3y = x \\ y = 10 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 3y = x \\ y = 10 \end{cases}} \right\} A(30, 10)$$

$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 100 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} y = 10 \\ x = 100 \end{cases}} \right\} B(100, 10)$$

$$\begin{cases} x = 100 \\ x + y = 120 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = 100 \\ x + y = 120 \end{cases}} \right\} C(100, 20)$$

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ 3y = x \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x + y = 120 \\ 3y = x \end{cases}} \right\} D(90, 30)$$

$$F(A) = F(30, 10) = 950$$

$$F(B) = F(100, 10) = 2700$$

$$F(C) = F(100, 20) = 2900$$

$$F(D) = F(90, 30) = 2850$$

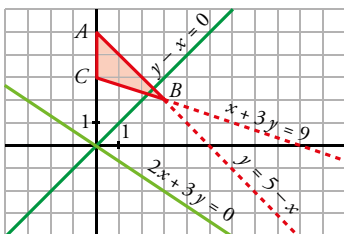
El máximo se alcanza en $C(100, 20)$ y vale 2900.

2 a) Maximiza y minimiza la función $F(x, y) = 2x + 3y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Haz lo mismo con la función $G(x, y) = y - x$.

Representamos las rectas y la región que cumple las condiciones del problema:



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - x \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 - x \end{cases}} \right\} A(0, 5)$$

$$\begin{cases} y = 5 - x \\ x + 3y = 9 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} y = 5 - x \\ x + 3y = 9 \end{cases}} \right\} B(3, 2)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x = 0 \end{cases}} \right\} C(0, 3)$$

a) Dibujamos $2x + 3y = 0$ para ver la dirección de las rectas $2x + 3y = K$.

$$F(A) = F(0, 5) = 15; F(B) = F(3, 2) = 12; F(C) = F(0, 3) = 9.$$

El máximo de $F(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $C(0, 3)$.

b) Dibujamos $y - x = 0$ para ver la dirección de las rectas $y - x = K$.

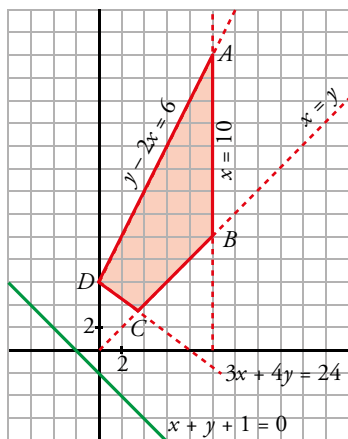
$$G(A) = G(0, 5) = 5; G(B) = G(3, 2) = -1; G(C) = G(0, 3) = 3.$$

El máximo de $G(x, y)$ se alcanza en $A(0, 5)$, y el mínimo, en $B(3, 2)$.

3 Maximiza la función $z = x + y + 1$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 0 \leq y \\ 0 \leq x \leq 10 \\ x \leq y \\ y - 2x \leq 6 \\ 3x + 4y \geq 24 \end{cases}$$

Representamos las rectas y la dirección de $x + y + 1 = K$. Obtenemos la región que cumple las condiciones del problema:



$$\begin{cases} y - 2x = 6 \\ x = 10 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} y - 2x = 6 \\ x = 10 \end{cases}} \right\} A(10, 26)$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ x = y \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = 10 \\ x = y \end{cases}} \right\} B(10, 10)$$

$$\begin{cases} x = y \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = y \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}} \right\} C\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ y - 2x = 6 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ y - 2x = 6 \end{cases}} \right\} D(0, 6)$$

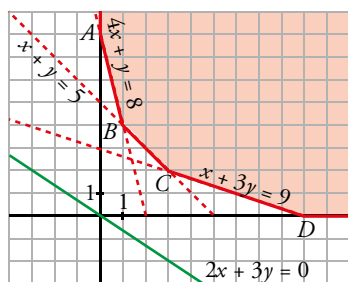
$$z = F(x, y) = x + y + 1$$

$$F(A) = F(10, 26) = 37; F(B) = F(10, 10) = 21; F(C) = F\left(\frac{24}{7}, \frac{24}{7}\right) = \frac{55}{7}; F(D) = F(0, 6) = 7$$

El máximo se alcanza en el punto $A(10, 26)$ y vale 37.

4 En la región determinada por $x + y \geq 5$, $x + 3y \geq 9$, $4x + y \geq 8$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en el que la función $F(x, y) = 2x + 3y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?

Representamos las rectas, la dirección de $2x + 3y = K$ y la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.



$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x + y = 8 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x = 0 \\ 4x + y = 8 \end{cases}} \right\} A(0, 8)$$

$$\begin{cases} 4x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 4x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}} \right\} B(1, 4)$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{cases}} \right\} C(3, 2)$$

$$\begin{cases} x + 3y = 9 \\ y = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x + 3y = 9 \\ y = 0 \end{cases}} \right\} D(9, 0)$$

El mínimo de $F(x, y)$ se encuentra en uno de los vértices de la región factible:

$$F(A) = F(0, 8) = 24$$

$$F(B) = F(1, 4) = 14$$

$$F(C) = F(3, 2) = 12$$

$$F(D) = F(9, 0) = 18$$

El mínimo se alcanza en el punto $C(3, 2)$ y vale 12.

No tiene máximo, pues hay puntos en la región en los que $F(x, y)$ toma valores tan grandes como queramos.

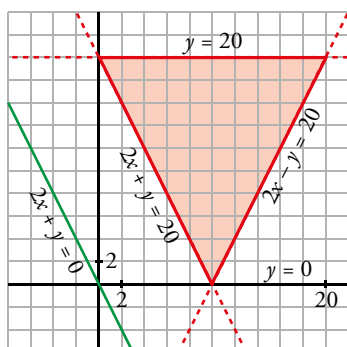
5 Calcula los puntos del siguiente recinto:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 20 \\ 2x - y \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

que hacen mínima o máxima la función $z = 2x + y$. ¿Cuántas soluciones hay?

Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{cases}$ y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.

Representamos la dirección de las rectas $2x + y = K$ dibujando $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto.



Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $2x + y = 20$, con $0 \leq x \leq 10$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 2x - y = 20 \\ y = 20 \end{cases} \text{ Punto } (20, 20)$$

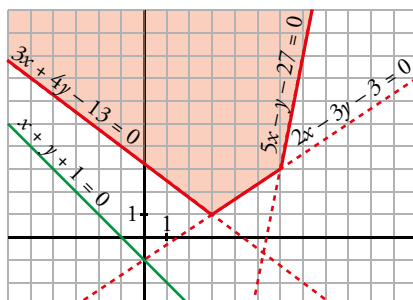
6 ¿Es posible maximizar y minimizar la función $z = x + y + 1$ sujeta a estas restricciones?:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ 5x - y - 27 \leq 0 \end{cases}$$

Para obtener el recinto que cumple las restricciones del problema, representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{cases}$$

Para ver la dirección de $z = x + y + 1$, representamos la recta $x + y + 1 = 0$.



No existe máximo ni mínimo.

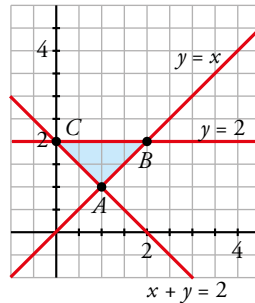
7 Dada la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2, \quad x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible y halla sus vértices, así como el valor de la función objetivo en cada uno de ellos.

b) Indica dónde se alcanzan el máximo y el mínimo, y di sus respectivos valores.

a) La región factible es la siguiente:



Los vértices son:

$$A(1, 1) \quad B(2, 2) \quad C(0, 2)$$

$$f(A) = 3 + 4 = 7$$

$$f(B) = 6 + 8 = 14$$

$$f(C) = 8$$

b) El máximo se alcanza en el vértice B , es 14, el mínimo se alcanza en el vértice A , es 7.

8 Dibuja el recinto determinado por:

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima.

b) Sobre el mismo recinto, halla el máximo y el mínimo de la función $G(x, y) = 5x + y$.

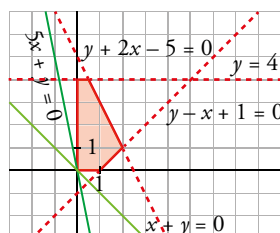
Representamos las rectas:

$$\begin{cases} x = 0, y = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.

Representamos la dirección de las rectas $x + y = K$ dibujando la recta $x + y = 0$.

Representamos la dirección de las rectas $5x + y = K$ dibujando la recta $5x + y = 0$.



a) $F(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de intersección de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array}} \right\} \text{Punto } \left(\frac{1}{2}, 4 \right)$$

$F(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto $(0, 0)$.

b) $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto de corte de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}} \right\} \text{Punto } (2, 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 11$.

$G(x, y)$ alcanza el mínimo en el punto $(0, 0)$ y vale $G(0, 0) = 0$.

9 Considera el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 8)$ y $(10, 3)$. Determina razonadamente el punto en el que cada una de las siguientes funciones alcanza su máximo:

a) $F(x, y) = -4x + y + 9$

b) $F(x, y) = 4x + y + 12$

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

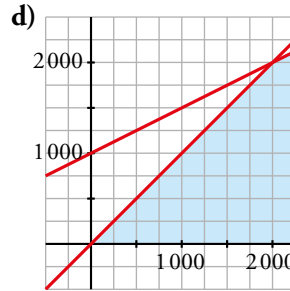
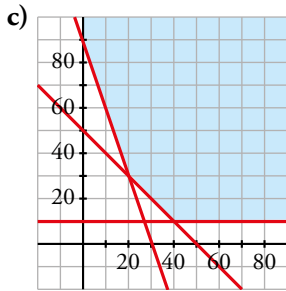
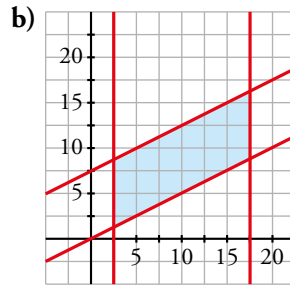
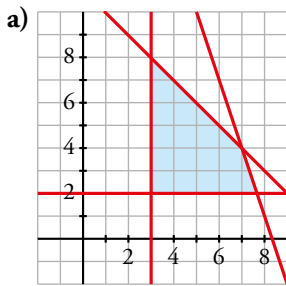
a) $F(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left. \begin{array}{l} F(0, 0) = 9 \\ F(2, 8) = 9 \\ F(10, 3) = -28 \end{array} \right\} \text{Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices } (0, 0) \text{ y } (2, 8).$$

b) $F(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left. \begin{array}{l} F(0, 0) = 12 \\ F(2, 8) = 28 \\ F(10, 3) = 55 \end{array} \right\} \text{La función alcanza el máximo en el punto } (10, 3).$$

10 Define mediante un sistema de inecuaciones cada uno de los recintos representados en las siguientes figuras:



a)
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 2 \\ x + y \leq 11 \\ 3x + y - 25 \leq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x \geq 2,5 \\ x \leq 17,5 \\ x - 2y \leq 0 \\ x - 2y + 15 \geq 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 10 \\ x + y \geq 50 \\ 3x + y - 90 \geq 0 \end{cases}$$

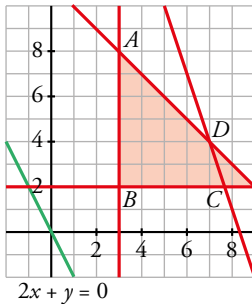
d)
$$\begin{cases} y \leq x \\ 2y - 2000 - x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- 11 a) Calcula los puntos donde se hace máxima y mínima la función $F(x, y) = 2x + y$ para la región de validez del apartado a) del ejercicio anterior.

Haz lo mismo para estas otras funciones:

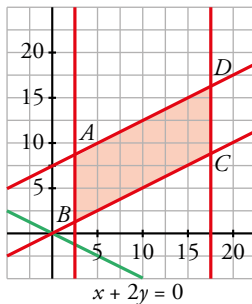
- b) Para el apartado b): $G(x, y) = x + 2y$
 c) Para el apartado c): $H(x, y) = 3x + 4y$
 d) Para el apartado d): $I(x, y) = x - 3y$

- a) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



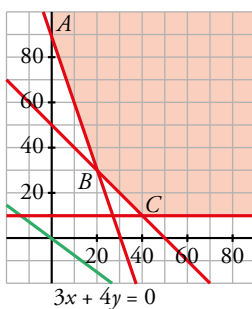
La recta variable $2x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $D(7, 4)$; y su valor mínimo en el vértice $B(3, 2)$.

- b) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $x + 2y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $D(17,5; 16,25)$; y su valor mínimo en el vértice $B(2,5; 1,25)$.

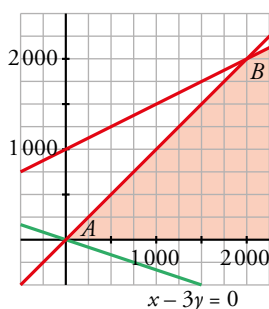
- c) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $3x + 4y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $C(40, 10)$.

No hay máximo en esta región pues $H(x, y)$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

- d) La representación de la región de validez y la función objetivo es:



La recta variable $x - 3y = K$ no toma un valor máximo ni mínimo en esta región. La función $I(x, y)$ se puede hacer tan grande y tan pequeña como se quiera en el recinto propuesto.

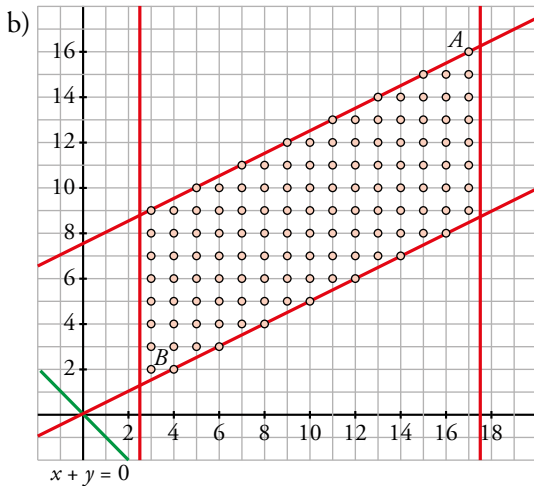
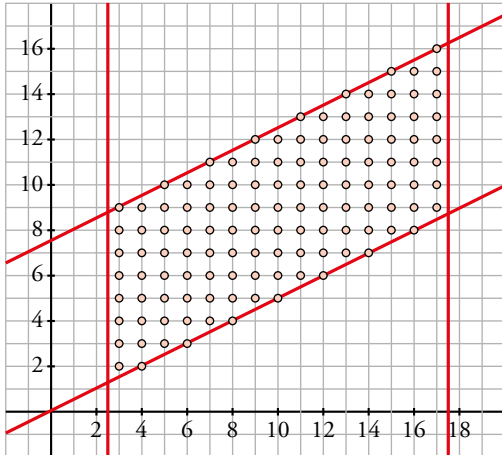
12 Suponemos que en el apartado b) del ejercicio 10 solo consideramos los números enteros de la región de validez.

a) Indica todas las posibles soluciones de dicha región.

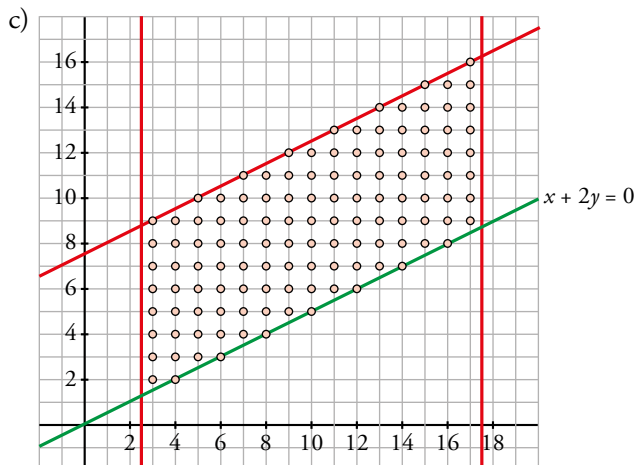
b) Calcula los puntos de la región que hacen máxima y mínima la función $F(x, y) = x + y$.

c) Halla los puntos que hacen máxima y mínima la función $G(x, y) = x - 2y$.

a) Las soluciones posibles son los puntos señalados en la siguiente figura:



La recta variable $x + y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el punto $A(17, 16)$, y su valor mínimo en el punto $B(3, 2)$.



Como las rectas $x - 2y = 0$ y $x - 2y + 15 = 0$ son paralelas a la función objetivo, $G(x, y)$ alcanza el máximo en: $(4, 2)$, $(6, 3)$, $(8, 4)$, $(10, 5)$, $(12, 6)$, $(14, 7)$, $(16, 8)$; y alcanza el mínimo en: $(3, 9)$, $(5, 10)$, $(7, 11)$, $(9, 12)$, $(11, 13)$, $(13, 14)$, $(15, 15)$ y $(17, 16)$.

Para resolver

13 Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta imperial y la tarta de lima.

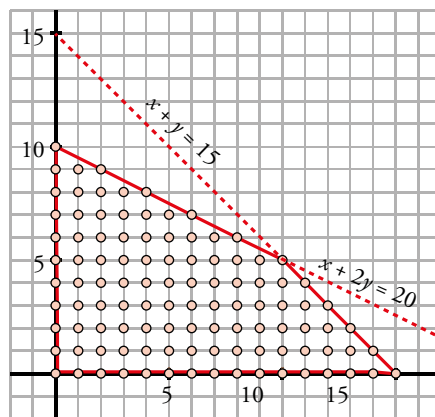
La tarta imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 8 €. La tarta de lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €. En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

- ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?
 - ¿Se cumplirían los requisitos si decidieran elaborar 3 tartas imperiales y 9 tartas de lima?
 - ¿Cuántas unidades de cada tipo de tarta debe elaborar la confitería para obtener el mayor ingreso por ventas?
- a) Llamamos x al número de tartas de tipo imperial e y al número de tartas de lima.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0,5x + y \leq 10 \rightarrow x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \rightarrow x + y \leq 15 \\ x, y \text{ enteros} \end{cases}$$

Representamos el conjunto de restricciones:



Las posibles combinaciones de especialidades que pueden hacer se corresponden con los puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto, incluida la frontera.

- Por tanto, sí se cumplirían los requisitos si decidieran elaborar 3 imperiales y 9 de lima.
- La función que da los ingresos por ventas es $F(x, y) = 8x + 10y$.

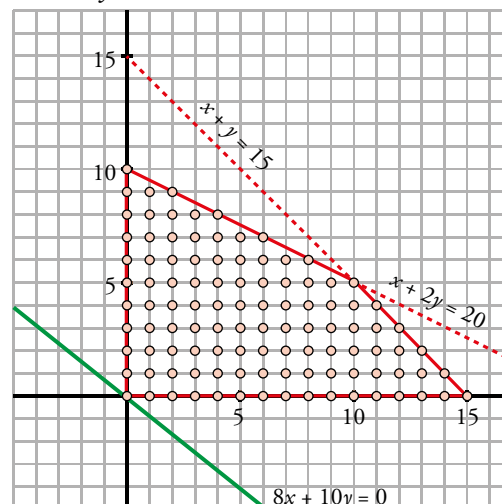
Tendremos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $8x + 10y = K$.

El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \text{ Punto } (10, 5)$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas imperiales y 5 de lima.



14 Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, coser y teñir) se emplean en la producción.

- Hacer una chaqueta representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 3 h, y la de teñir, 1 h.
- Hacer unos pantalones representa usar la máquina de cortar 1 h; la de coser, 1 h y la de teñir, ninguna hora.

La máquina de teñir se puede usar durante 3 horas; la de coser, 11 horas, y la de cortar, 7 horas.

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de 8 € por chaqueta y 5 € por pantalón. ¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

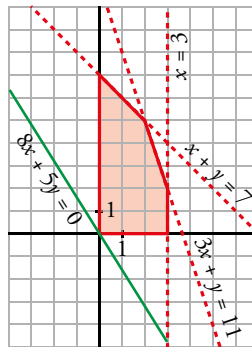
Llamamos x al número de chaquetas e y al número de pantalones.

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0; x, y \text{ enteros} \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 11 \end{cases}$$

$F(x, y) = 8x + 5y$ es la función que nos da el beneficio. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas que son de la forma $8x + 5y = K$.



El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.

15 Una empresa constructora dispone de un terreno de 100 dam² para construir dos tipos de casas. Las casas de tipo A ocuparían una superficie de 4 dam² y las de tipo B, de 2 dam². Sobre plano ya se han vendido 4 casas de tipo A y 18 de tipo B, por tanto, deben construir al menos esas unidades. Además, por estudios de mercado han decidido construir al menos el triple de casas de tipo B que de tipo A.

a) ¿Cuántas casas pueden construir de cada tipo? Plantea el problema y representa el conjunto de soluciones.

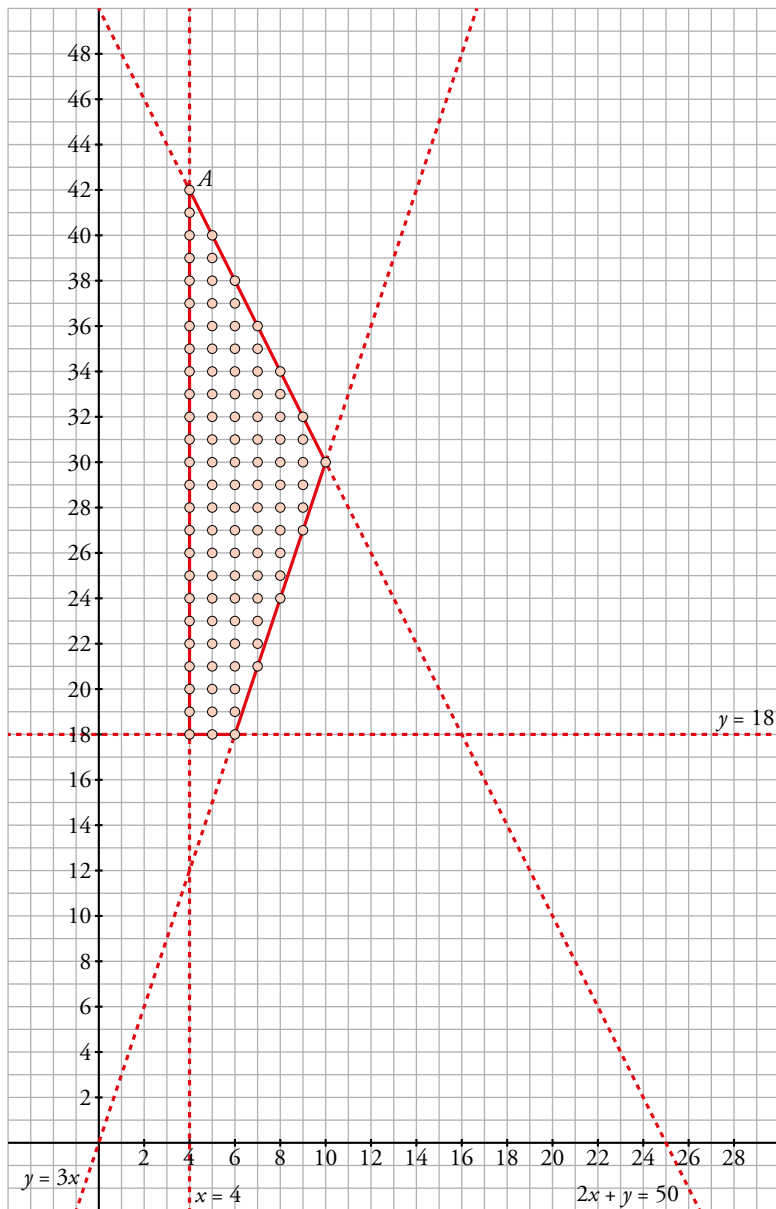
b) Si por cada casa de tipo A obtienen un beneficio de 100 000 €, y por cada casa de tipo B, uno de 60 000 €, ¿cuántas deben construir de cada tipo para maximizar beneficios?

a) Llamamos x al número de casas de tipo A e y al número de casas de tipo B.

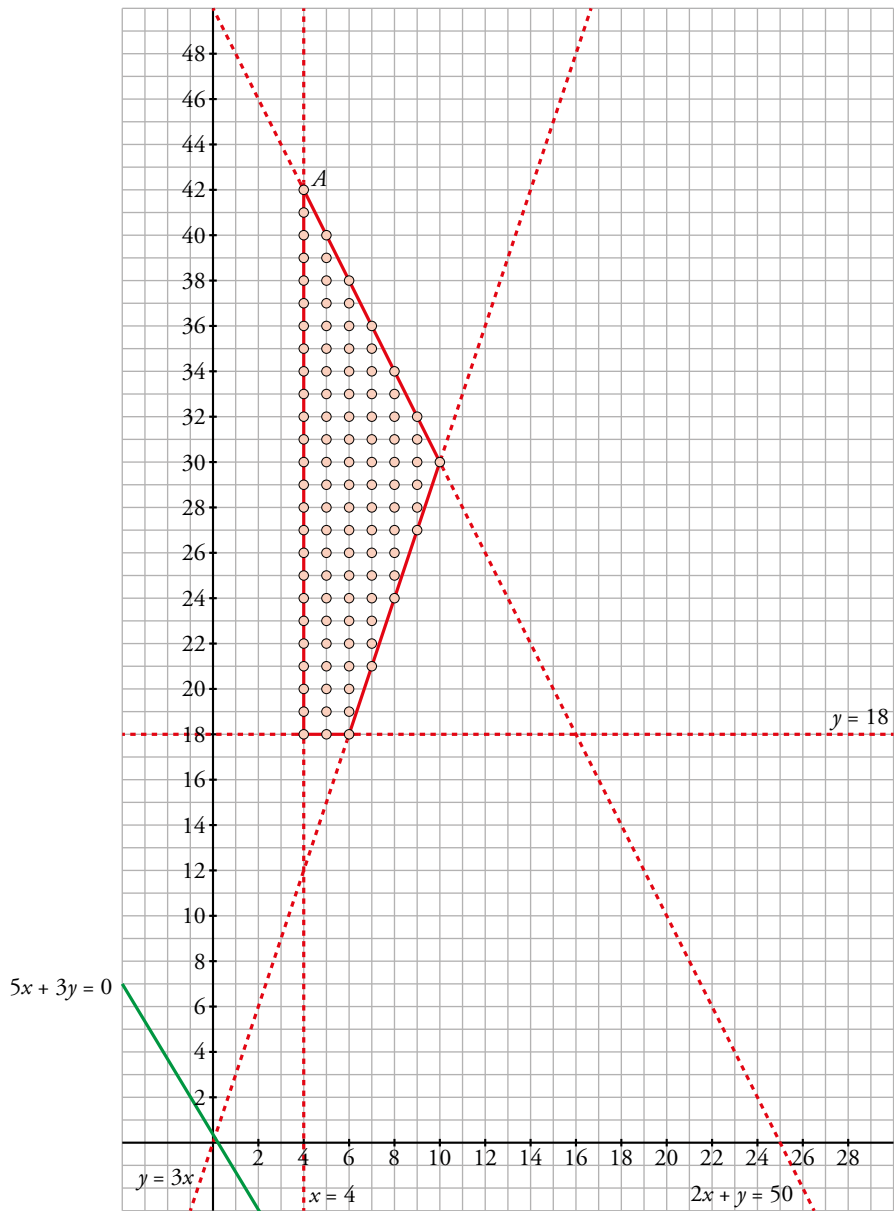
Restricciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y \leq 100 \rightarrow 2x + y \leq 50 \\ x \geq 4 \\ y \geq 18 \\ y \geq 3x \end{cases}$$

El conjunto de soluciones son todos los puntos de la región de validez cuyas coordenadas son números naturales. Son los puntos de la cuadrícula que están dentro de la región siguiente:



b) La función que nos da el beneficio es: $F(x, y) = 100\,000x + 60\,000y$



La recta variable $100\,000x + 60\,000y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(4, 42)$. Se deben construir 4 casas de tipo A y 42 casas de tipo B para maximizar beneficios.

- 16** Un tren de mercancías puede arrastrar un máximo de 27 vagones. En cierto viaje transporta coches y motocicletas. Para los coches ha de dedicar un mínimo de 12 vagones, y para las motocicletas, no menos de la mitad de los vagones dedicados a los coches. Si los ingresos de la compañía ferroviaria son de 540 € por cada vagón de coches y de 360 € por cada vagón de motos, ¿cómo se han de distribuir los vagones para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es ese ingreso?

Llamamos x al número de vagones para coches e y al número de vagones para motos.

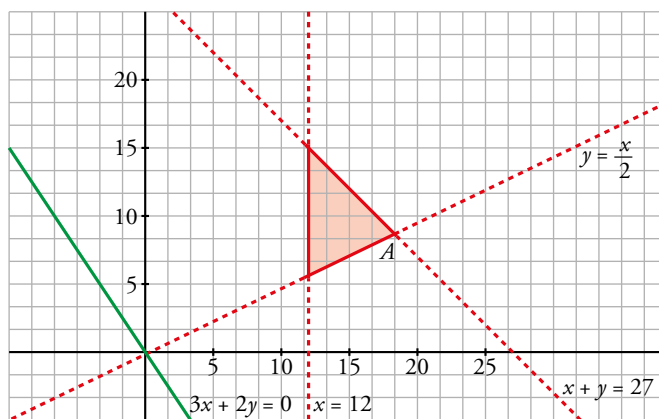
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da los ingresos es:

$$F(x, y) = 540x + 360y$$

La representación de la región de validez y la función de beneficio es:



El conjunto de soluciones son todos los puntos de la región de validez cuyas coordenadas son números naturales.

La recta variable $540x + 360y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(18, 9)$.

Se deben transportar 18 vagones de coches y 9 vagones de motos para maximizar el ingreso.

- 17** Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de B en el pienso que da a sus reses.

Dispone para ello de dos tipos de pienso, P_1 y P_2 , cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo aparecen en la tabla.

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

El kilogramo de pienso P_1 vale 0,40 € y el de P_2 vale 0,60 €. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para dar a las reses las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

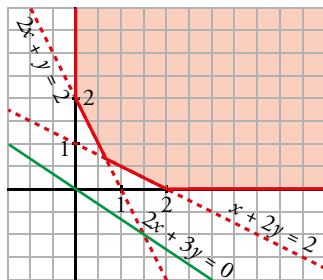
Si llamamos x a los kilos de pienso P_1 e y a los kilos de pienso P_2 , las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \rightarrow x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \rightarrow 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es $F(x, y) = 0,4x + 0,6y$.

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $0,4x + 0,6y = 0 \rightarrow 2x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $0,4x + 0,6y = K$.



El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array} \right\} \text{Punto} \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2 .

- 18** Una persona tiene 15 000 € para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene un interés anual del 9%, y el tipo B, del 5%.

Decide invertir, como máximo, 9 000 € en A, y como mínimo, 3 000 € en B. Además, quiere invertir en A tanto o más que en B.

a) Dibuja la región factible.

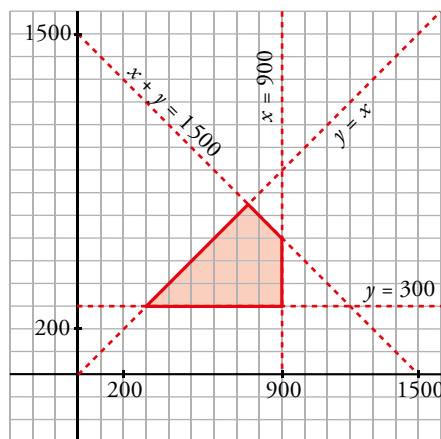
b) ¿Cómo debe invertir los 15 000 € para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio anual máximo?

a) Llamamos x a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo A e y a la cantidad de euros invertidos en acciones de tipo B.

Las restricciones del problema son:

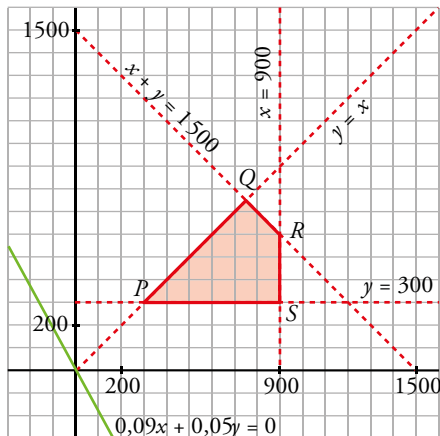
$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq 900 \\ y \geq 300 \\ x \geq y \\ x + y \leq 1500 \end{array} \right.$$

Representamos las rectas y obtenemos la región factible, que es la zona sombreada:



b) La función objetivo es $F(x, y) = 0,09x + 0,05y$.

Vemos cuál es el valor de esta función en los vértices de la región factible:



$$P(300, 300) \quad S(900, 300)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = y \end{array} \right\} Q(750, 750)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1500 \\ x = 900 \end{array} \right\} R(900, 600)$$

$$F(P) = F(300, 300) = 42$$

$$F(Q) = F(750, 750) = 105$$

$$F(R) = F(900, 600) = 111$$

$$F(S) = F(900, 300) = 96$$

Para que el beneficio sea máximo, se deben invertir 900 € en acciones de tipo A y 600 € en acciones de tipo B. El beneficio máximo anual es de 111 €.

- 19** Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camiseta lisa necesita 70 gramos de algodón y 20 gramos de poliéster, y para cada camiseta estampada, 60 gramos de algodón y 10 gramos de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 gramos de algodón y 800 gramos de poliéster. Para que sea rentable, debe fabricar, al menos, 10 estampadas y, además, el doble de las estampadas debe ser igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 € y cada estampada de 4 €, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

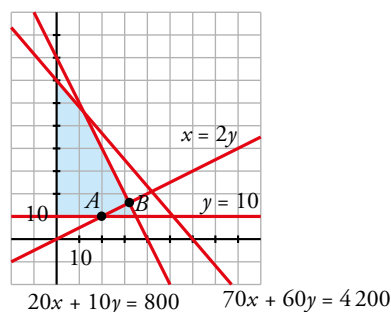
Sean x, y el número de camisetas lisas y estampadas que la empresa debe fabricar, respectivamente.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 70x + 60y \leq 4200 \\ 20x + 10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x = 2y \end{cases}$$

La función objetivo es:

$$F(x, y) = 5x + 4y$$



El máximo debe de alcanzarse en A o en B ya que se tiene que cumplir que $x = 2y$.

$$\text{Coordenadas de } A: \begin{cases} y = 10 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow A(20, 10)$$

$$\text{Coordenadas de } B: \begin{cases} 20x + 10y = 800 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow B(32, 16)$$

$$F(A) = 100 + 40 = 140 \quad F(B) = 160 + 64 = 224$$

Por tanto, debería fabricar 32 camisetas lisas y 16 camisetas estampadas. El beneficio sería de 224 euros.

20 Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos, A y B. Tiene dos factorías, F_1 y F_2 .

- En F_1 se producen diariamente 6 coches tipo A y 4 tipo B, con un coste de 32 000 € diarios. F_1 no funciona más de 50 días.
- En F_2 se producen 4 de A y 4 de B, con un coste de 24 000 € diarios.

Para abastecer el mercado, se han de poner a la venta al menos 360 coches de tipo A y al menos 300 de tipo B.

¿Cuántos días debe funcionar cada factoría para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

Llamamos x al número de días que debe funcionar F_1 e y al número de días que debe funcionar F_2 .

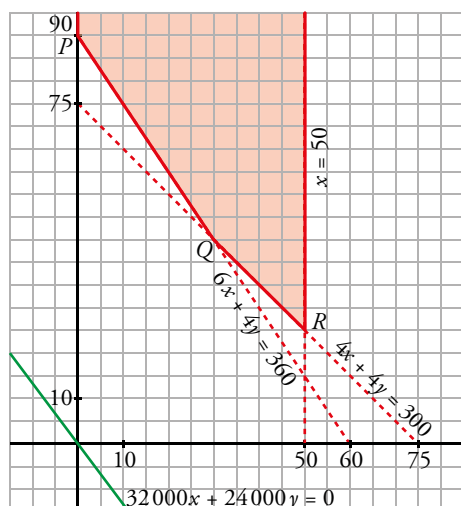
Colocamos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema:

	FACTORÍA F_1	FACTORÍA F_2	N.º DE COCHES
MODELO A	$6x$	$4y$	360
MODELO B	$4x$	$4y$	300
COSTE	$32\,000x$	$24\,000y$	

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 50 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 360 \\ 4x + 4y \geq 300 \end{cases}$$

Hemos de minimizar la función objetivo, $F(x, y) = 32\,000x + 24\,000y$.

Representamos las restricciones del problema y la dirección de la función objetivo. La región factible es la zona sombreada:



$$P(0, 90)$$

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 360 \\ 4x + 4y = 300 \end{array} \right\} Q(30, 45)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 4y = 300 \\ x = 50 \end{array} \right\} R(50, 25)$$

$$F(P) = F(0, 90) = 2\,160\,000$$

$$F(Q) = F(30, 45) = 2\,040\,000$$

$$F(R) = F(50, 25) = 2\,200\,000$$

El coste mínimo, 2 040 000 €, se obtiene cuando la factoría F_1 funciona 30 días y la F_2 funciona 45 días.

Página 118

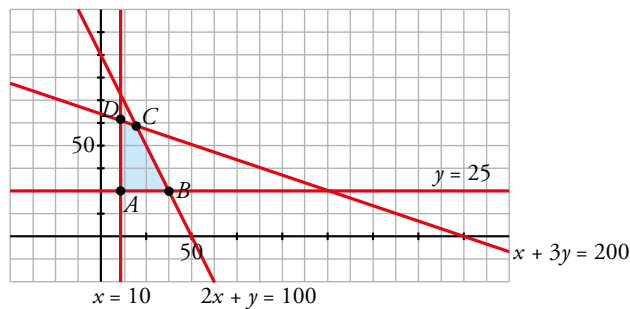
- 21** Una empresa está empaquetando dos lotes diferentes. El lote de A tiene 1 queso y 2 botellas de vino, y el transporte cuesta 0,90 €. El lote B tiene 3 quesos y 1 botella de vino, y cuesta 1,50 € transportarlo. La empresa dispone de 200 quesos y 100 botellas de vino, y tiene que elaborar, por lo menos, 10 lotes de tipo A y 25 de tipo B. ¿Cuántos lotes de cada clase deben elaborar para que los gastos en transporte sean mínimos?

Sean x, y el número de lotes del tipo A y del tipo B, respectivamente.

Restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ x \geq 10 \\ y \geq 25 \end{cases}$$

La función objetivo es $F(x, y) = 0,90x + 1,50y$.



Los vértices son $A(10, 25)$, $B(37,5; 25)$, $C(20, 60)$, $D(10; 63,3)$.

$$F(A) = 46,5$$

$$F(B) = 71,25$$

$$F(C) = 108$$

$$F(D) = 103,95$$

El mínimo se alcanza en el vértice A. Se deben elaborar 10 lotes del tipo A y 25 del tipo B.

- 22** Una tienda desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior y lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende por 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, y se vende por 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 lotes de la oferta 2. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

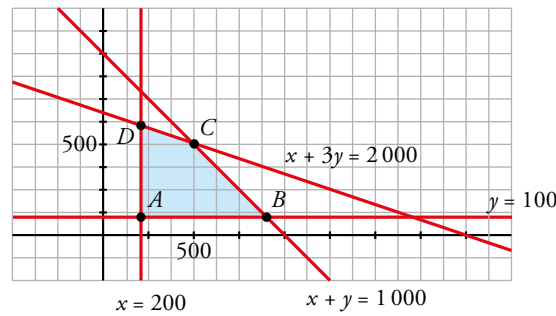
Restricciones:

Sean x, y el número de lotes de tipo 1 y 2, respectivamente.

Restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 2000 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 200 \\ y \geq 100 \end{cases}$$

La función objetivo es: $F(x, y) = 30x + 50y$



Los vértices son:

$A(200, 100)$	$B(900, 100)$	$C(500, 500)$	$D(200, 600)$
$F(A) = 11\,000$	$F(B) = 32\,000$	$F(C) = 40\,000$	$F(D) = 36\,000$

Ha de vender 500 lotes del tipo 1 y 500 del tipo 2 para obtener un beneficio máximo de 40 000 euros.

23 Una peña de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1 200 socios a ver un partido de su equipo. La empresa dispone de autobuses de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio de cada autobús es de 1 260 €, y el de cada microbús, de 900 €. La empresa solo dispone, ese día, de 28 conductores. ¿Qué número de autobuses y microbuses deben contratarse para conseguir el mínimo coste posible? ¿Cuál es ese coste?

a) Llamamos x al número de autobuses a y al de microbuses.

Las restricciones del problema son las siguientes:

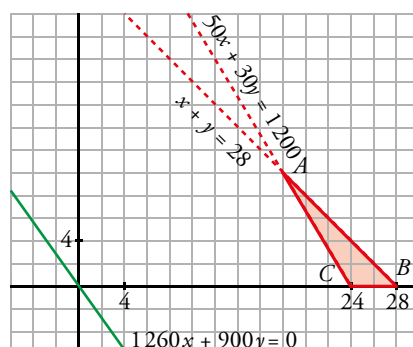
$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ x + y \leq 28 \\ 50x + 30y \geq 1\,200 \\ x, y \text{ enteros} \end{cases}$$

La función que nos da el coste, función objetivo, es:

$$F(x, y) = 1\,260x + 900y$$

Hemos de minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representado el conjunto de restricciones, la región factible es la zona coloreada:



El mínimo se alcanzará en uno de los vértices de esta zona (representamos también, $1\,260x + 900y = 0$).

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 28 \\ 5x + 3y = 120 \end{array} \right\} A(18, 10) \rightarrow F(A) = F(18, 10) = 6\,336 \text{ €}$$

$$B(28, 0) \rightarrow F(B) = F(28, 0) = 7\,056 \text{ €}$$

$$C(24, 0) \rightarrow F(C) = F(24, 0) = 6\,048 \text{ €}$$

El mínimo se alcanza en el punto $(24, 0)$. Es decir, deben contratarse 24 autobuses y ningún microbús.

b) El valor del coste mínimo es 6048 €.

OTRA RESOLUCIÓN

Este problema se puede resolver de forma trivial sin programación lineal.

Precio por persona en autobús $\rightarrow 1260 : 50 = 25,20 \text{ €}$

Precio por persona en microbús $\rightarrow 900 : 30 = 30 \text{ €}$

Por tanto, es más barato ubicar en autobuses a tantos viajeros como sea posible, y si pueden ser todos, mejor.

$1200 \text{ viajeros} : 50 \text{ plazas/autobús} = 24 \text{ autobuses}$

En 24 autobuses caben los 1200 aficionados.

24 Una fábrica hace dos tipos de mesas: clásicas y modernas.

- Cada mesa del modelo clásico requiere 4 horas de lijado y 3 horas de barnizado, y deja un beneficio de 200 €. No deben fabricarse más de 9 de estas mesas.
- Cada mesa moderna necesita 3 horas de lijado y 4 horas de barnizado, y su beneficio es de 100 €.
- Entre mesas clásicas y modernas no pueden fabricarse más de 17.

a) Si se dispone de 48 horas para lijado y de 60 horas para barnizado, ¿cuántas mesas de cada tipo ha de fabricar para que sus beneficios sean máximos?

b) ¿Qué información ha resultado superflua para la resolución del problema?

a) Llamamos x al número de mesas clásicas e y al número de mesas modernas. Disponemos los datos en una tabla y definimos las restricciones del problema:

	MESA CLÁSICA	MESA MODERNA	DISPONIBLE
LIJADO (h)	$4x$	$3y$	48
BARNIZADO (h)	$3x$	$4y$	60
BENEFICIO (€)	$200x$	$100y$	

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ y \geq 0 \\ 4x + 3y \leq 48 \\ 3x + 4y \leq 60 \\ x + y \leq 17 \end{cases}$$

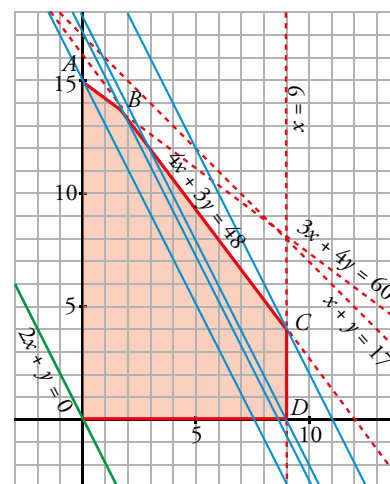
La función objetivo que hay que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es $F(x, y) = 200x + 100y$.

Representamos el recinto y la recta de ecuación $2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $200x + 100y = K$.

El máximo se alcanza en un punto de coordenadas enteras de la región factible.

Trazamos paralelas a la recta $2x + y = 0$ por cada vértice de esta región: $A(0, 15)$, $B(12/7, 96/7)$, $C(9, 4)$, $D(9, 0)$. De estas rectas, la que pasa por $C(9, 4)$ es la de mayor ordenada en el origen. En ese punto se alcanza el máximo de la función objetivo.

Por tanto, hay que fabricar 9 mesas clásicas y 4 mesas modernas.



b) Es superfluo el dato que nos indica que no pueden fabricarse más de 17 mesas entre clásicas y modernas.

25 En una bodega se producen vinos de crianza y de reserva. Por problemas de diseño, la producción de ambos tipos de vino no debe superar los 60 millones de litros y la producción de vino de reserva no debe superar el doble de la de vino de crianza ni ser inferior a su mitad.

Si la bodega comercializa el litro de vino de crianza a 4 € y el de reserva a 9 €, ¿cuál es el diseño de producción que maximiza los ingresos?

Llamamos x a los millones de litros de crianza e y a los millones de litros de reserva.

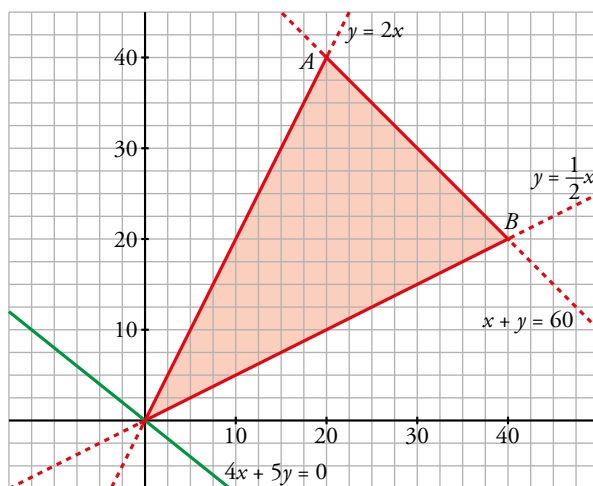
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 60 \\ y \leq 2x \\ y \geq \frac{1}{2}x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da los ingresos en millones de euros es:

$$F(x, y) = 4x + 5y$$

La representación de la región de validez y la función de ingresos es:



La recta variable $4x + 5y = K$ toma su valor máximo (dentro de los válidos) en el vértice $A(20, 40)$. El diseño de producción que maximiza los ingresos es en el que se producen 20 millones de litros de crianza y 40 millones de litros de reserva.

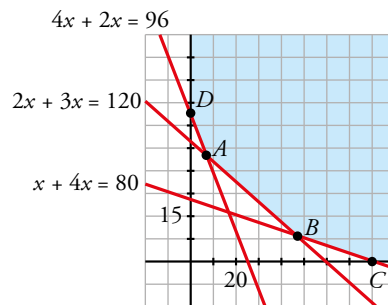
26 Una empresa de joyería tiene dos máquinas, A y B, con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina A realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina B realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir, al menos, 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la B?

b) El coste por cada hora de trabajo de la máquina A es de 2 500 € y el de la máquina B es de 2 000 €. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿A cuánto asciende dicho coste mínimo?

a) Sean x, y el número de horas de trabajo de la máquina A y B, respectivamente.

$$\begin{cases} x + 4y \geq 80 \\ 4x + 2y \geq 96 \\ 2x + 3y \geq 120 \end{cases}$$



No puede usarse 10 horas la máquina A y 30 horas la máquina B porque no se cumpliría la 3ª restricción en el punto (10, 30):

$$20 + 90 = 110 < 120$$

b) $C(x, y) = 2500x + 2000y$

Los vértices de la región objetivo son $A(6, 36)$, $B(48, 8)$, $C(80, 0)$ y $D(0, 48)$.

$$C(A) = 87\,000$$

$$C(B) = 136\,000$$

$$C(C) = 200\,000$$

$$C(D) = 96\,000$$

El coste mínimo, 87 000 euros, se consigue si la máquina A trabaja 6 horas y la máquina B otras 36 horas.

27 Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos, A y B. El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3 000 € y 1 500 € respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kg para el cultivo A y 10 horas y 300 kg para el cultivo B. Determina cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas de maquinaria y de 2 400 kg de abono.

a) Plantea el problema.

b) Resuélvelo gráficamente.

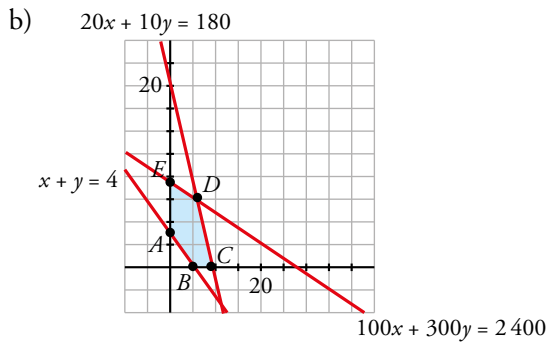
c) Analiza gráficamente qué ocurriría si, además, se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo B sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo A.

a) Sean x, y el número de hectáreas dedicadas al cultivo A y al cultivo B, respectivamente.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 20x + 10y \leq 180 \\ 100x + 300y \leq 2\,400 \end{cases}$$

La función objetivo es: $F(x, y) = 3\,000x + 1\,500y$



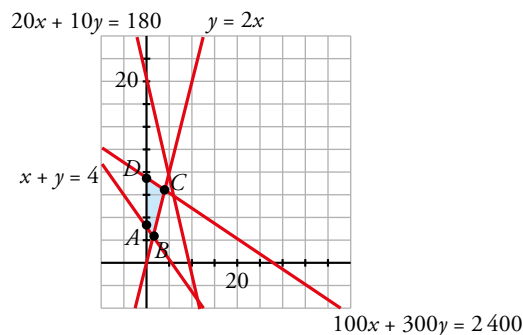
Los vértices de la región factible son:

$$A(0, 4) \quad B(4, 0) \quad C(9, 0) \quad D(6, 6) \quad E(0, 8)$$

$$F(A) = 6000 \quad F(B) = 12000 \quad F(C) = 27000 \quad F(D) = 27000 \quad F(E) = 12000$$

El máximo beneficio, 27 000 euros, se obtiene en los vértices C y D , es decir, en todo lado de la región factible que los tiene (como extremos sobre los puntos de la recta $20x + 10y = 180$ comprendidos entre C y D , ambos incluidos).

c) Si añadimos la restricción $y \geq 2x$:



En este caso, los vértices de la región son:

$$A(0, 4) \quad B(4/3, 8/3) \quad C(24/7, 48/7) \quad D(0, 8)$$

$$F(A) = 6000 \quad F(B) = 8000 \quad F(C) = 20571,43 \quad F(D) = 12000$$

Por tanto, el máximo, 20 571,43 euros, se alcanza en C , es decir, que hay que cultivar $24/7 = 3,43$ hectáreas de A y $48/7 = 6,86$ hectáreas de cultivo B .

28 Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas.

Halla el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumimos la información en la tabla siguiente:

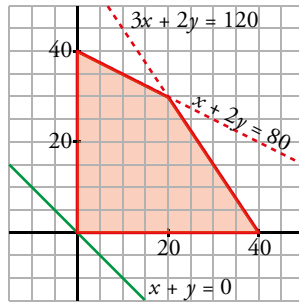
	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	$3x$
VESTIDO	$2y$	$2y$
TOTAL	$x + 2y$	$3x + 2y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $F(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $k(x + y) = K$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{cases} \text{ Punto } (20, 30)$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

29 Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 24$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T . Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante.

a) Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S .

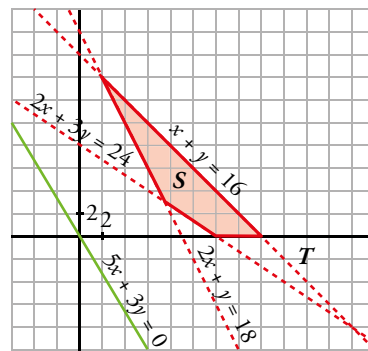
b) Expresa el recinto mediante un sistema de inecuaciones.

a) Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 24 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

para obtener el triángulo T y la región que hemos sombreado, S .

Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y = K$ dibujando $5x + 3y = 0$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X ; es decir, en el punto $(16, 0)$.

El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$.

b) El sistema de inecuaciones que representa el recinto es:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + y \geq 18 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ x + y \leq 16 \end{cases}$$

Para profundizar

30 Un pastelero fabrica dos tipos de tartas, T_1 y T_2 , para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2 , necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.

- a) Si se venden las tartas T_1 a 10 € y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?
- b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2 ?

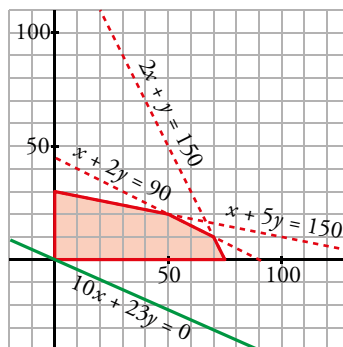
Llamamos x al número de tartas de tipo T_1 e y al número de tartas de tipo T_2 .

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

- a) La función que nos da los ingresos es $F(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones, así como la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $10x + 23y = K$:



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{cases} \text{ Punto } (50, 20)$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2 .

- b) Si llamamos p al precio de la tarta de tipo T_2 , los ingresos vendrían dados por la siguiente función: $G(x, y) = 15x + py$.

Si la función $G(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $(60, 15)$, que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + py = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\begin{cases} 15x + py = 0 \rightarrow \text{pendiente} = -\frac{15}{p} \\ x + 2y = 90 \rightarrow \text{pendiente} = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{15}{p} = -\frac{1}{2} \rightarrow p = 30$$

Así, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

- 31** Una empresa de automóviles tiene dos plantas P_1 y P_2 de montaje de vehículos en las que producen tres modelos: M_1 , M_2 y M_3 . De la planta P_1 salen semanalmente 10 unidades del modelo M_1 , 30 del M_2 y 15 del M_3 . De la planta P_2 salen 20 unidades del M_1 , 20 del M_2 y 70 del M_3 cada semana. La empresa necesita al menos 800 unidades de M_1 , al menos 1 600 de M_2 y al menos 1 800 de M_3 . Si el gasto de mantenimiento de cada planta es de 36 000 € semanales, ¿cuántas semanas ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? ¿Cuál es el coste mínimo?

Llamamos x a las semanas que debe funcionar la planta P_1 e y a las semanas que debe funcionar la planta P_2 .

	M_1	M_2	M_3	GASTO (€/SEMANA)
PLANTA P_1	10	30	15	36 000
PLANTA P_2	20	20	70	36 000
NECESIDADES	800	1 600	1 800	

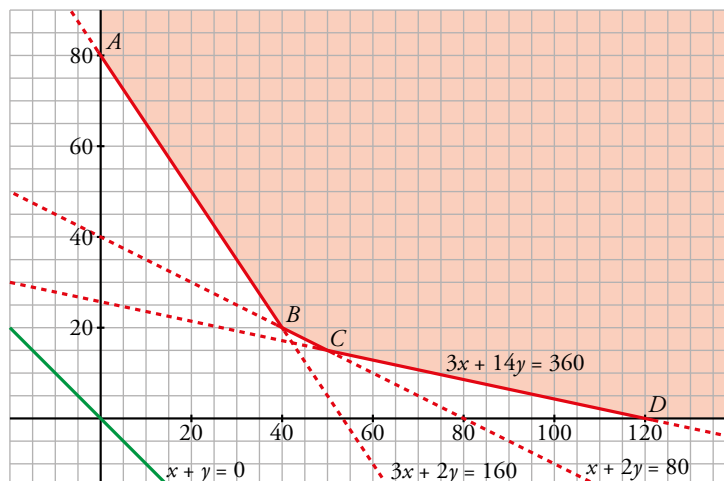
Restricciones:

$$\begin{cases} 10x + 20y \geq 800 \rightarrow x + 2y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 1\,600 \rightarrow 3x + 2y \geq 160 \\ 15x + 70y \geq 1\,800 \rightarrow 3x + 14y \geq 360 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es:

$$F(x, y) = 36\,000x + 36\,000y$$

La representación de la región de validez y la función de coste es:



La recta variable $36\,000x + 36\,000y = K$ toma su valor mínimo (dentro de los válidos) en el vértice $B(40, 20)$.

Para minimizar los gastos debe funcionar 40 semanas la planta P_1 y 20 semanas la planta P_2 .

El coste es:

$$F(40, 20) = 36\,000 \cdot 40 + 36\,000 \cdot 20 = 2\,160\,000 \text{ €}.$$

32 Arancha decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA. El precio de cada acción es de 10 € en ambos casos.

- BLL dedica el 35 % de su actividad al sector seguros, el 45 % al sector inmobiliario y el 20 % al industrial.
- ISSA dedica el 30 % de sus recursos al sector seguros, el 25 % al inmobiliario y el 45 % al industrial.

Arancha no quiere invertir más del 40 % de su capital en el sector industrial ni más del 35 % en el inmobiliario.

¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,20 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

Llamamos x al número de acciones que adquiere de BLL e y al número de acciones que adquiere de ISSA.

Hagamos una tabla que resuma la información que nos dan:

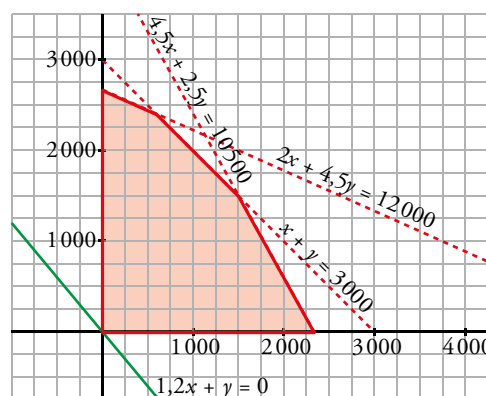
	PRECIO	SEGUROS	INMOBILIARIA	INDUSTRIAL
ACCIONES BBL	$10x$	$3,5x$	$4,5x$	$2x$
ACCIONES ISSA	$10y$	$3y$	$2,5y$	$4,5y$
TOTAL	$10x + 10y$	$3,5x + 3y$	$4,5x + 2,5y$	$2x + 4,5y$

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \rightarrow x + y \leq 3\,000 \\ 2x + 4,5y \leq 12\,000 \\ 4,5x + 2,5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

La función que nos da los beneficios es $F(x, y) = 1,2x + y$. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el conjunto de restricciones y la recta $1,2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $1,2x + y = K$.



El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left. \begin{cases} x + y = 3\,000 \\ 4,5x + 2,5y = 10\,500 \end{cases} \right\} \text{ Punto } (1\,500, 1\,500)$$

Debe adquirir 1 500 acciones de cada una de las dos sociedades.

33 Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):

	A	B	C
N	6	15	3
S	4	20	5

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

Resumimos los datos en una tabla y escribimos las restricciones del problema (tendremos en cuenta que todos los datos de la tabla deben ser positivos o cero y que x e y deben ser enteros):

	A	B	C	TOTAL
N	x	y	$11 - x - y$	11
S	$9 - x$	$10 - y$	$x + y - 4$	15
TOTAL	9	10	7	26

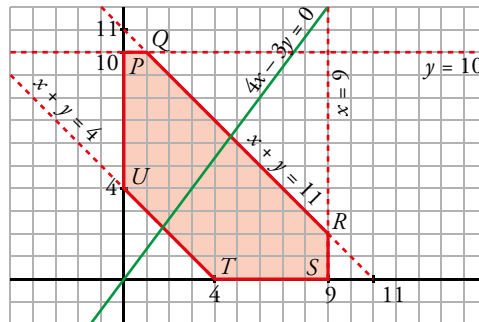
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 11 \\ x \leq 9 \\ y \leq 10 \end{cases}$$

La función que nos da el coste (en miles de euros) es:

$$F(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) = 4x - 3y + 249$$

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Representamos el recinto de restricciones:



Los vértices del recinto son:

$$P(0, 10) \quad Q(1, 10) \quad R(9, 2) \quad S(9, 0) \quad T(4, 0) \quad U(0, 4)$$

Hallamos $F(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$$\begin{aligned} F(P) = F(0, 10) &= 219 & F(Q) = F(1, 10) &= 223 \\ F(R) = F(9, 2) &= 279 & F(S) = F(9, 0) &= 285 \\ F(T) = F(4, 0) &= 265 & F(U) = F(0, 4) &= 237 \end{aligned}$$

El coste mínimo, 219 miles de euros, se alcanza en el punto $P(0, 10)$.

Por tanto, el reparto de locomotoras debe efectuarse como se indica en la tabla:

	A	B	C	TOTAL
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
TOTAL	9	10	7	26

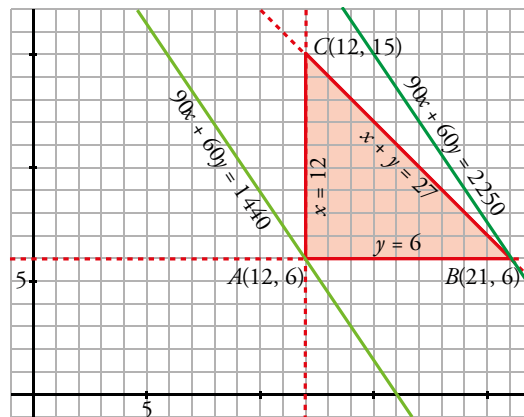
AUTOEVALUACIÓN

Página 119

1 Representa el recinto limitado por estas inecuaciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

Halla los valores máximo y mínimo de $F(x, y) = 90x + 60y$ en ese recinto.



$F(x, y)$ toma el valor máximo en $B(21, 6)$:

$$F(21, 6) = 90 \cdot 21 + 60 \cdot 6 = 2250$$

$F(x, y)$ toma el valor mínimo en $A(12, 6)$:

$$F(12, 6) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 6 = 1440$$

2 Representa el recinto descrito por las inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \\ 10 - y \geq 0 \\ x + y \leq 13 \\ x + 2y \geq 12 \end{cases}$$

Halla el máximo y el mínimo de las siguientes funciones:

a) $F(x, y) = 2x + y$

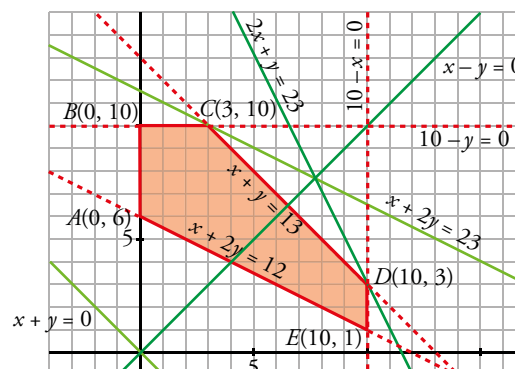
b) $G(x, y) = x + 2y$

c) $H(x, y) = x - y - 5$

d) $I(x, y) = x + y + 2$

La región factible es la zona sombreada de la siguiente figura:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 10 \\ 10 - y \geq 0 \rightarrow y \leq 10 \\ x + y \leq 13 \rightarrow y \leq 13 - x \\ x + 2y \geq 12 \rightarrow y \geq \frac{12 - x}{2} \end{cases}$$



a) $F(x, y) = 2x + y$ toma el valor máximo en el vértice $D(10, 3)$:

$$F(10, 3) = 2 \cdot 10 + 3 = 23 \text{ es máximo de } F.$$

$F(x, y) = 2x + y$ toma el valor mínimo en el vértice $A(0, 6)$:

$$F(0, 6) = 6 \text{ es el valor mínimo de } F \text{ en el recinto.}$$

b) $G(x, y) = x + 2y$ toma el valor máximo en $C(3, 10)$:

$$G(3, 10) = 3 + 2 \cdot 10 = 23 \text{ es máximo de } G.$$

$G(x, y)$ toma el valor mínimo en cualquier punto del segmento AE . Por ejemplo:

$$\text{En el vértice } A \text{ su valor es } G(0, 6) = 0 + 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{En el vértice } E \text{ su valor es } G(10, 1) = 10 + 2 \cdot 1 = 12$$

c) $H(x, y) = x - y - 5$ toma el valor máximo en el vértice $E(10, 1)$:

$$H(10, 1) = 10 - 1 - 5 = 4 \text{ es máximo de } H.$$

$H(x, y) = x - y - 5$ toma el valor mínimo en el vértice $B(0, 10)$:

$$H(0, 10) = 0 - 10 - 5 = -15 \text{ es el valor mínimo de } H \text{ en el recinto.}$$

d) $I(x, y) = x + y + 2$ toma el valor máximo en el vértice $C(3, 10)$:

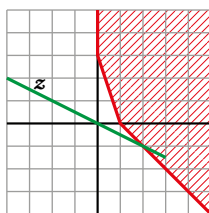
$$I(3, 10) = 10 + 3 + 2 = 15 \text{ es máximo de } I.$$

$I(x, y) = x + y + 2$ toma el valor mínimo en el vértice $A(0, 6)$:

$$I(0, 6) = 0 + 6 + 2 = 8 \text{ es mínimo de } I.$$

3 ¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?

En caso afirmativo, indícalo.



No tiene ni máximo ni mínimo.

4 Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio.

Para fabricar 100 m de cable de tipo A, se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene de él un beneficio de 1 500 €. Para fabricar 100 m de cable de tipo B, se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio, y se obtiene un beneficio de 1 000 €.

Calcula cuántos metros de cable hay que fabricar de cada tipo para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

Llamamos:

x = metros de cable de tipo A

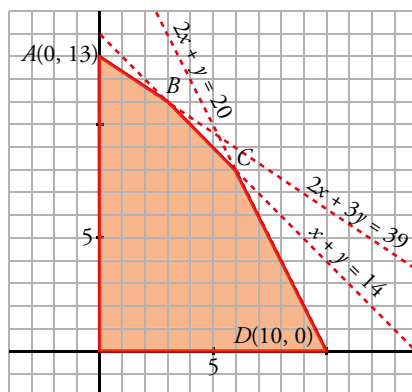
y = metros de cable de tipo B

	CABLE TIPO A	CABLE TIPO B	DISPONIBLE
COBRE (kg)	$10x$	$15y$	195
TITANIO (kg)	$2x$	$1y$	20
ALUMINIO (kg)	$1x$	$1y$	14
BENEFICIO (€)	1 500	1 000	

Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 15y \leq 195 \rightarrow 2x + 3y \leq 39 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \end{cases}$$

La región factible es la zona sombreada:



Calculamos las coordenadas de los vértices B y C :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 39 \\ x + y = 14 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} 39 - 2x = 42 - 3x \\ \rightarrow x = 3 \end{array} \right\} \rightarrow B(3, 11)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x + y = 14 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} 20 - 2x = 14 - x \\ \rightarrow x = 6 \end{array} \right\} \rightarrow C(6, 8)$$

La función objetivo que hay que maximizar es: $F(x, y) = 1500x + 1000y$

$$F(A) = F(0, 13) = 13000$$

$$F(B) = F(3, 11) = 15500$$

$$F(C) = F(6, 8) = 17000$$

$$F(D) = F(10, 0) = 15000$$

El beneficio máximo, que es de 17000 euros, se obtiene en el punto $C(6, 8)$.

Es decir, para obtener el beneficio máximo será necesario fabricar 600 metros de cable del tipo A y 800 metros de cable del tipo B.

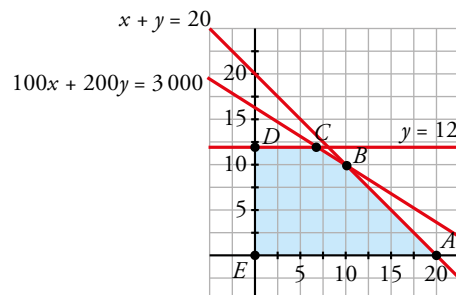
- 5** Una tienda de electrodomésticos desea adquirir dos tipos de cocinas: vitrocerámicas y de inducción. Disponen de 3000 €. Cada vitrocerámica le cuesta 100 € y cada cocina de inducción 200 €. Solo tienen espacio para 20 cocinas. El beneficio obtenido sobre su precio de coste es del 30% por cada vitrocerámica y del 25% por cada una de inducción. Además, el número de cocinas de inducción no puede ser superior a 12. ¿Cuántas cocinas de cada tipo debe comprar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Sean x, y las unidades de vitrocerámicas y de cocinas de inducción, respectivamente.

Restricciones:

$$\begin{cases} y \leq 12 \\ x + y \leq 20 \\ 100x + 200y \leq 3000 \end{cases}$$

La función objetivo es: $B(x, y) = 30x + 50y$



Los vértices son:

$$A(20, 0) \quad B(10, 10) \quad C(6, 12) \quad D(0, 12) \quad E(0, 0)$$

$$B(A) = 600 \quad B(B) = 800 \quad B(C) = 780 \quad B(D) = 600 \quad B(E) = 0$$

Para alcanzar el máximo beneficio, 800 euros, debe comprar 10 cocinas de cada tipo.