

3 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 75

Resuelve

Determinantes de orden 2

- Resuelve los siguientes sistemas y calcula el determinante de cada matriz de coeficientes:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \quad \text{Solución: } x = 4, y = 7$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Solución: } x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, y = \lambda$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{Solución: } x = 5, y = -3$$

$$\text{d) } \begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Sistema incompatible}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Solución: } x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, y = \lambda$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - 7y = 46 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0 \quad \text{Solución: } x = \frac{1402}{109}, y = \frac{886}{109}$$

1 ▶ DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Página 76

1 Siendo A una matriz 2×2 , justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Para que $|A| = 0$ es necesario que sus cuatro elementos sean 0.

b) Si los dos elementos de la segunda columna de A son 0, entonces $|A| = 0$.

c) Si las dos filas de A coinciden, entonces $|A| = 0$.

d) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$, entonces $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 15$.

e) Si $\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 43$, entonces $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 430$.

a) Falso, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Verdadero, porque en los dos sumandos del determinante aparece algún elemento de la segunda fila.

c) Verdadero, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$

d) Verdadero, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(-15) = 15$

e) Verdadero, $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 70m - 30n = 10(7m - 3n) = 10 \begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 43 = 430$

2 Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: $(1.^a) = 3 \cdot (2.^a)$


b) $\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -48$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: $(1.^a) \cdot 7 = (2.^a)$

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: $(2.^a) \cdot (-20) = (1.^a)$

3  [El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].

Sean $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ y $|A| = -13$. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix}$ c) $|3A|$ d) $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 7 \cdot (-13) = -91$

c) $|3A| = \begin{vmatrix} 3l & 3m \\ 3n & 3p \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 9 \cdot (-13) = -117$

d) $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = (-15) \cdot (-13) = 195$

Página 77

4 Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

5 Halla el valor de estos determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000$$

Página 79

6 Dadas estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $|A| = 0$ porque su tercera columna es suma de las dos primeras.

b) $|B| = 0$ porque su tercera columna es diferencia de las dos primeras.

c) $|C| = 0$ porque su tercera columna es producto de las dos primeras.

a) Verdadero por la propiedad 9 de los determinantes. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero.

b) Verdadero por la propiedad 9 de los determinantes. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero.

c) Falso, porque el producto de dos líneas no es una combinación lineal de ellas.

7 Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª:

$$(3.^a) = (-2) \cdot (1.^a) \quad (\text{propiedad 6})$$

c) La 3.ª fila es combinación lineal de las dos primeras:

$$(3.^a) = (1.^a) + 10 \cdot (2.^a) \quad (\text{propiedad 9})$$

8  ¿Qué te hace decir eso? [La presentación de las evidencias paa justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].

Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcula sin desarrollar los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

2 ► MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

Página 80

1 Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz M .

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2 Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12} , a_{33} y a_{43} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{(3+3)} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{(4+3)} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

3 ▶ CÁLCULO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

Página 81

- 1 Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 = 58 + 234 + 164 = 456$$

2 Calcula los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2030$$

(1) Desarrollando por la 2.^a columna.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$$

(1) Desarrollando por la 4.^a fila.

También podríamos haber observado que la 4.^a columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

4 ▶ EL RANGO DE UNA MATRIZ A PARTIR DE SUS MENORES

Página 82

1 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.
La 3.ª fila es la suma de las dos primeras, y la 4.ª fila es la suma de la 2.ª y la 3.ª $\rightarrow \text{ran}(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Tomamos menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow$ Las 3 primeras filas son linealmente independientes.

Tomamos menores de orden 4: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, y $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, entonces $\text{ran}(C) = 4$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ y la 3.ª fila es la suma de las dos primeras, entonces $\text{ran}(D) = 3$.

5 ► CRITERIO PARA SABER SI UN SISTEMA ES COMPATIBLE

Página 83

1 Averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \\ |A'| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2 \end{array} \right\} \text{El sistema es compatible.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{array} \right)$$

$$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$$

El sistema es *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues la 1.ª y la 3.ª columna son iguales)} \rightarrow \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$$

Como la 4.ª columna de A' y la 1.ª son iguales, necesariamente $\text{ran}(A') = \text{ran}(A)$; es decir, el sistema es *compatible*.

$$\text{d) } \begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

Sabemos que $\text{ran}(A) = 2$ (ver apartado anterior).

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

6 ► REGLA DE CRAMER

Página 84

1 Resuelve mediante la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases} \left\{ |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \right.$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7, y = 2, z = -5$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \left\{ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \right.$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto: $x = 5, y = 0, z = 3$

2 Resuelve aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases} \left\{ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13 \right.$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Por tanto: $x = 5, y = 0, z = -2$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases} \left\{ |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0 \right.$$

Por tanto, $\text{ran}(A) < 3$.

Como hay menores de orden 2 distintos de cero, $\text{ran}(A) = 2$.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Por tanto, este sistema es *incompatible*.

3 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ y } |A| = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (la 1.ª y la 3.ª columna son iguales)} \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2.ª ecuación:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1 - 3z \rightarrow x = y + 1 - 3z = 1 + \frac{z}{2} \\ -2y = -7z \rightarrow y = \frac{7z}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda$, $y = 7\lambda$, $z = 2\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array} \right)$$

Sabemos, por el apartado a), que $\text{ran}(A) = 2$.

Calculamos el rango de A' :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$$

El sistema es *incompatible*.

4 Resuelve estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 5 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Calculamos el rango de A' :

$$|A'| = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1, y = 2, z = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 4 \\ 2 & 6 & | & 23 \\ -2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $\text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$.

El sistema es *incompatible*.

7 ▶ SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Página 86

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\begin{cases} x - y = z \\ x + y = -3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

Soluciones: $x = -\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2.º miembro:

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y = 2t \\ x - y + z = t \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Soluciones: $x = \lambda, y = -\lambda, z = 0, t = 2\lambda$

2 Resuelve.

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de las dos últimas ecuaciones y pasar la z al segundo miembro:

$$\begin{cases} x - 2y = -3z \\ y = -z \end{cases} \begin{cases} x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ y = -z \end{cases}$$

Soluciones: $x = -5\lambda$, $y = -\lambda$, $z = \lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

El menor asociado a las 1.^a, 2.^a y 4.^a ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema tiene solución única, que es la solución trivial por ser homogéneo.

Solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$c) \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 < n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación y pasar la t al segundo miembro:

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \\ y = t \\ x + y = -2t \end{cases} \begin{cases} z = \frac{-x}{3} = \frac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{cases}$$

Soluciones: $x = -3\lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$, $t = \lambda$

$$d) \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t = 0 \end{cases} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 4 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema tiene solución única, que es la solución trivial por ser homogéneo.

Solución: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$

8 ► DISCUSIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE DETERMINANTES

Página 88

1 Discute y resuelve.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}; A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & | & 0 \\ a & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

• Si $a = 2$, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \text{Tomamos el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

• Si $a = -\frac{3}{4}$, queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/4 & | & 0 \\ -3/4 & -1 & 0 & | & -1 \\ 1 & 4 & 6 & | & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \text{Tomamos el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

• Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n.^\circ \text{ de incógnitas} = 3$, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \rightarrow k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{5}{3} \end{cases}$$

- Si $k = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Tomamos el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array} \right\} \text{Sumando: } 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

$$y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, y = -3$

- Si $k = \frac{5}{3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3}x - y = 13 \end{array} \right\} \text{Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \rightarrow x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \frac{11}{2}, y = \frac{-23}{6}$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq \frac{5}{3} \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A)$, el sistema es *incompatible*.

2 Discute y resuelve, en función del parámetro a , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, queda:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} y = x \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Soluciones: $x = \lambda$, $y = \lambda$

• Si $a = 1$, queda:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Soluciones: $x = \lambda$, $y = 0$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

El sistema tiene solo la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$

9 ► CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Página 89

1 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A :

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B :

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Calcula la inversa de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A :

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B :

$$|B| = 3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 90

1. Estudio del rango de una matriz que depende de un parámetro

Hazlo tú

- Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro k :

$$\text{a) } M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } N = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) El menor formado por las tres primeras columnas es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ k & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9k^2 - 36k + 36 \rightarrow 9k^2 - 36k + 36 = 0 \rightarrow k = 2$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$
- Si $k = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Todas las columnas son proporcionales, luego $\text{ran}(M) = 1$.

- b) Hallamos los valores que anulan el determinante de N :

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1 \rightarrow \text{ran}(N) = 3$
- Si $k = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(N) = 2$$

- c) Resolvemos la ecuación $|P| = 0$:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & k+1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8k - 16 = 0 \rightarrow k = 2$$

- Si $k \neq 2 \rightarrow \text{ran}(P) = 4$
- Si $k = 2 \rightarrow \text{ran}(P) < 4$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(P) \geq 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(P) = 3$$

2. Regla de Cramer

Hazlo tú

- Resuelve aplicando la regla de Cramer.

$$\text{a) } \begin{cases} 7x - 5y = 8 \\ -3x + 2y = -9 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 5x + y - 3z = 18 \end{cases}$$

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = -29; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -39$$

$$x = \frac{-29}{-1} = 29, \quad y = \frac{-39}{-1} = 39$$

Solución: (29, 39)

$$\text{b) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Quitamos la 3.^a ecuación por ser combinación lineal de las anteriores:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Pasamos z al segundo miembro para tener el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Hacemos $z = \lambda$ (parámetro).

$$\begin{cases} x + y = 4 + \lambda \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 + \lambda & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4 + \lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$$

$$\text{Soluciones: } \left(\frac{\lambda + 7}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} \right)$$

3. Estudio de la compatibilidad de un sistema

Hazlo tú

- Estudia el siguiente sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ x + z = 1 \\ 3x + 4y + z = k \end{cases}$$

Buscamos el valor de k para el cual $|A'| = 0$.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = 15 - 3k = 0 \rightarrow k = 5$$

- Si $k \neq 5 \rightarrow \text{ran}(A') = 4 \rightarrow$ el sistema es *incompatible*.

- Si $k = 5 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, eliminamos la cuarta ecuación y aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{-3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{-3}$$

$$\text{Solución: } \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3} \right)$$

Página 92

4. Discusión de sistemas aplicando el teorema de Rouché

Hazlo tú

- Discute los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

Para cada valor de a distinto de -1 y 2 , tenemos un sistema con solución única, que por la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 3a - 2}$$

Solución: $\left(a + 1, \frac{2-a}{a-1}, -\frac{a}{a-1}\right)$

Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $a = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x + y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \\ \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \end{array} \right\} \text{El sistema es incompatible.}$$

Son tres planos que se cortan dos a dos.

- Si $a = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Como la columna de términos independientes es igual a la columna de coeficientes de z , tenemos que $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 - \lambda, y = 0, z = \lambda$$

Los planos se cortan en una recta.

b) Empezamos estudiando el rango de A' :

$$|A'| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{array} \right|$$

$$\text{Por tanto: } |A'| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{array} \right| = -18m - 36 = 0 \rightarrow m = -2$$

- Si $m \neq -2$, $\text{ran}(A') = 4 \neq \text{ran}(A)$:
- Si $m = -2$, calculamos el menor formado por las tres primeras filas, en el que no interviene m :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right| = 9 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{El sistema es compatible determinado.}$$

Resolvemos el sistema formado por las tres primeras ecuaciones y obtenemos:

$$x = -1, y = 0, z = 2$$

5. Cálculo de la matriz inversa

Hazlo tú

- Dada esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

a) Halla los valores de a para los cuales A es regular.

b) Para $a = 2$, halla la matriz inversa de A .

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 \rightarrow -a^2 + 4a - 3 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

A es regular para $a \neq 3$ y $a \neq 1$.

b) $a = 2$:

$$|A| = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 94

1. Sistema compatible para cualquier valor del parámetro

- Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = 2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

- Comprobar que es compatible para cualquier valor de a .
- Calcular su solución en forma matricial en el caso $a = 0$.
- Resolver para $a = 1$ utilizando el método de Gauss.

$$a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

- Si $a \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*, tiene solución única.
- Si $a = -1$:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A)$$

El sistema *compatible indeterminado*, tiene infinitas soluciones.

Es *compatible* para cualquier valor de a .

- $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 3 \cdot (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow x = 1, y = 1, z = 1$$

2. Añadir una ecuación a un sistema

• Añadir una ecuación al sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea:

a) incompatible.

b) compatible determinado.

c) compatible indeterminado.

a)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

Hacemos $(1.^a) + (2.^a) \rightarrow 3x + z = 4$

Cambiamos el término independiente $\rightarrow 3x + z = 5$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

es *incompatible*.

b)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \rightarrow x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\lambda, y = \frac{4}{3}\lambda + \frac{5}{3}, z = \lambda$$

Una solución es: $x = \frac{4}{3}, y = \frac{5}{3}, z = 0$

Añadimos la ecuación $5x - 4y = 0$

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$$

es *compatible determinado*.

c) Hacemos $(1.^a) + (2.^a) \rightarrow 3x + z = 4$

Ponemos esta nueva ecuación que es combinación lineal de las anteriores.

El sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

es *compatible indeterminado*.

3. Rango de una matriz que depende de dos parámetros

- Estudiar el rango de esta matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & b \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ran}(B) \leq 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = a + 1$$

Si $a \neq -1 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2b - 4$$

Si $b \neq -2 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

Si $a = -1$ y $b = -2 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

4. Resolver una ecuación matricial

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de m para los que A tiene inversa.

b) Para $m = 1$, calcular la matriz X que verifica $XA + X - 2A = 0$.

a) $\begin{vmatrix} -2 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$$m^2 - 2m = 0 \rightarrow m = 0, m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \rightarrow A$ tiene inversa.

b) $XA + X - 2A = 0 \rightarrow X(A + I) = 2A \rightarrow X = 2A(A + I)^{-1}$

Para comprobar que este paso es válido, veamos si $(A + I)^{-1}$ existe.

$$A + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A + I| = -1$, luego tiene inversa.

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 95

Para practicar

Determinantes

1 Calcula el valor de estos determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

$$d) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \rightarrow a = 1$$

$$b) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = 1, a = -3$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3}, a = -\sqrt{3}$$

$$d) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = -3, a = 0, a = 2$$

3 ¿Qué valor de a anula estos determinantes?:

$$a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2 - a - 1 \end{vmatrix}$$

$$a) \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-1) = (a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + a + a(a-2) = 2(a-1)(a-2) + a(a-1) =$$

$$= (a-1)(3a-4) = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = (1-a)(-2-2a) = -2(1-a)(1+a) = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-a) =$$

$$= a(a+1)(a-1) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

4 Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) = -24$$

(1) Desarrollamos por la 3.^a columna.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 0$$

(1) El determinante se anula, puesto que tiene dos filas iguales.

5 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \qquad \text{b) } \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \qquad \text{c) } \begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \qquad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \qquad \text{f) } \begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} - \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

$$c) \begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$$

$$d) \begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$$

$$f) \begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0, \text{ pues las dos columnas son proporcionales.}$$

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

6 a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$ siendo $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$.

b) Obtén el valor del determinante de la matriz $2A$ para $a = 3$.

$$a) \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{matrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a-1) = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$$

$$b) \text{ Si } a = 3: |2A| = 2^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 18 = 144$$

Rango de una matriz

7 Estudia el rango de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \text{ El rango es 3, ya que el determinante } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

b) 4.^a fila = 2.^a fila - 1.^a fila.

3.^a fila = 1.^a fila + 2.^a fila.

$$\text{Por tanto: } \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango es 2.}$$

8 Halla el rango de estas matrices:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2.^a fila depende linealmente de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{La 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas.}$$

Veamos si la 1.^a fila depende de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Por tanto, } \text{ran}(A) = 3.$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego, $\text{ran}(B) \geq 2$.

Veamos si la 3.^a columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } \text{ran}(B) = 3.$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos $|C|$:

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2(2-1) = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 4 \end{aligned}$$

(1) Desarrollamos por la 1.^a columna.

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$


Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.^a fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{La 3.ª fila depende linealmente de las otras dos.}$$

Por tanto, $\text{ran}(D) = 2$.

9  **Comprobamos.** [El cálculo del rango de las matrices propuestas por el enunciado es una buena ocasión para que el alumnado trabaje esta técnica].

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad c) C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad d) D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$a) |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

• Si $a = 2 \rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

• Si $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

$$b) |B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \rightarrow 2a(2a - 1) = 0 \begin{array}{l} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) \geq 2$

• Si $a = 0 \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

• Si $a = \frac{1}{2} \rightarrow |B| = 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2} \rightarrow |B| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

$$c) |C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{array}{l} a = -8 \\ a = 1 \end{array}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) \geq 2$

Por tanto:

- Si $a = 1 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$
- Si $a = -8 \rightarrow |C| = 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -8 \rightarrow |C| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 3$

$$d) |D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a = -1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq 1 \text{ y } a \neq -1 \rightarrow |D| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 3$$

10 Halla los valores del parámetro m para los que el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ es menor que 3.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2 - m & m^2 - m \\ m & 0 & m^2 - m \end{vmatrix} = (m^2 - m) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m^2 - m & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (m^2 - m)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2 - m)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m^2 - m)^2 \end{aligned}$$

$$(m^2 - m)^2 = 0 \rightarrow m = 1, m = 0$$

Si $m = 0$ o $m = 1$, entonces $\text{ran}(A) < 3$

11 Estudia el rango de la matriz M según los valores de t .

$$a) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad b) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix} \quad c) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad d) M = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 & 0 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ 2 & 2t & 5 & t \end{pmatrix}$$

$$a) M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \\ 1 & 8-3t & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 2 \\ 1 & 8-3t & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 6-3t & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 3t-6 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 3(t-2) & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(M) < 3$$

$$\text{Tomamos un menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2, \text{ para cualquier } t.$$

$$b) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & t & 4 & 0 \\ -1 & 3 & t & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & t & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ t & 4 & 0 \\ 3 & t & -2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 8t - 24$$

$$2t^2 + 8t - 24 = 0 \rightarrow t = 2, t = -6$$

$$\text{Si } t \neq 2 \text{ y } t \neq -6 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$$

$$\text{Tomamos un menor de orden 2: } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{Si } t = 2 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

$$\text{Si } t = -6 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

$$c) M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ t & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2t^2 + 2t - 4$$

$$2t^2 + 2t - 4 = 0 \rightarrow t = 1, t = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ t & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2t - 4$$

$$2t - 4 = 0 \rightarrow t = 2$$

Como se anulan en puntos distintos, tenemos que $\text{ran}(M) = 3$, para cualquier t .

$$d) M = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 & 0 \\ 1 & t & 2 & 1 \\ 2 & 2t & 5 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 3 \\ 1 & t & 2 \\ 2 & 2t & 5 \end{vmatrix} = -t^2 - 1 = 0 \rightarrow t = \pm 1$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 2 & 2t & t \end{vmatrix} = t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \rightarrow t = \pm 1, t = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 2t & 5 & t \end{vmatrix} = -3t^2 + 8t - 5 = 0 \rightarrow t = 1, t = \frac{5}{3}$$

- Si $t \neq 1 \rightarrow \text{ran}(M) = 3$

- Si $t = 1 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$ porque, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$.

12 Estudia el rango de estas matrices según el valor del parámetro a :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix}$$

a) Si $|A| = 0 \rightarrow a = 2$

- Si $a = 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$
- Si $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 4$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

- Si $a = 4 \rightarrow$ las cuatro filas son proporcionales $\rightarrow \text{ran}(B) = 1$
- Si $a \neq 4 \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & a \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 2$

c) $C = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$

- Si $a = 1$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(C) = 1$$

- Si $a = -1$, queda:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$

d) $D = \begin{pmatrix} a-2 & 1-2a & -1 \\ a & a & 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a-2 & 1-2a \\ a & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a - a + 2a^2 = 3a^2 - 3a = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$

- Si $a = 0 \rightarrow D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(D) = 1$

- Si $a = 1 \rightarrow D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Las dos filas no son proporcionales $\rightarrow \text{ran}(D) = 2$

- Si $a \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

13 Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}}_A$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n.^\circ$ de incógnitas.

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \rightarrow x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array} \right\} \text{Solución: } x = 1, y = -5$$

$$b) \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_A$$

Tenemos que $|A| = 0$ y que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

$$c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}}_A$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$. Luego $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) < n.^\circ$ de incógnitas.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 2x - z = 3 - 3y \\ -x + z = 5y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } x = 3 + 2y \\ z = 5y + x = 5y + 3 + 2y = 3 + 7y \end{array}$$

Soluciones: $x = 3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 3 + 7\lambda$

$$d) \left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right)}_A$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 2$.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$$

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

$$e) \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right)}_A$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ$ de incógnitas.

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3, y = -2, z = 1$

$$f) \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right)}_A$$

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ$ de incógnitas.

El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0, y = -1, z = 2$

14 Resuelve estos sistemas aplicando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 8x + 14y = 2 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \end{array} \right) \rightarrow |A| = -82 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2, y = -1$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ x - y - t = 2 \\ z - t = 0 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Tenemos que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $x = \frac{3+\lambda}{2}, y = \frac{-1-\lambda}{2}, z = \lambda, t = \lambda$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1, y = -5, z = 7$

$$\text{d) } \begin{cases} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1-z+t$$

Soluciones: $x = 3, y = -1 - \lambda + \mu, z = \lambda, t = \mu$

15 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}}_A$$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ$ de incógnitas.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Solución: $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{1}{3}$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ -2 & 1 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}}_A$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego $\text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}}_A$$

Como $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, tenemos que:

$$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^\circ \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y :

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 - y \\ z = 1 - y \end{cases}$$

Soluciones: $x = -1 - \lambda, y = \lambda, z = 1 - \lambda$

$$d) \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5 \\ 1 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 1 & | & 7 \\ 2 & 1 & 1 & | & 11 \end{pmatrix}}_A$$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Luego $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$.

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $x = 2, y = 3, z = 4$

16 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 12 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $\text{ran}(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\begin{cases} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z - 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $x = \frac{\lambda}{3}, y = \frac{2\lambda}{3}, z = \lambda$

$$b) \begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces $\text{ran}(A) = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

17 Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $\text{ran}(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego $\text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) < n.^\circ \text{ de incógnitas}$.

El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left. \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases} \right\} \begin{cases} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x = 3 - z \end{cases} \left. \begin{matrix} x = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \frac{7z}{3} \end{matrix} \right\} \text{Hacemos } z = 3\lambda.$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda$, $y = -1 - 7\lambda$, $z = 3\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que:

$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n.^\circ \text{ de incógnitas} = 3$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

Cálculo de la matriz inversa con determinantes

18 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $|M| = 2 \neq 0 \rightarrow$ la matriz M tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(M) \longrightarrow (\text{Adj}(M))^t \longrightarrow Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} (\text{Adj}(M))^t$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la matriz inversa.}$$

b) $|N| = 6 \neq 0 \rightarrow$ la matriz N tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(N) \longrightarrow (\text{Adj}(N))^t \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|} (\text{Adj}(N))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = N^{-1}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ es la matriz inversa.}$$

c) $\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(P) \longrightarrow (\text{Adj}(P))^t \longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{|P|} (\text{Adj}(P))^t$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

d) $\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(Q) \longrightarrow (\text{Adj}(Q))^t \longrightarrow Q^{-1} = \frac{1}{|Q|} (\text{Adj}(Q))^t$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1}$$

19 a) Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve las ecuaciones $AX = B$ y $XB = A$ siendo A y B las matrices del apartado anterior.

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$\text{b) } AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

20 Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares y calcula:

a) A^{-1} si $t = 1$. b) B^{-1} si $t = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) |A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \begin{cases} t = 2 \\ t = -6 \end{cases}$$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -7$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(A) \longrightarrow (\text{Adj}(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{7} \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow \text{Adj}(B) \longrightarrow (\text{Adj}(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Para resolver

21 Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a :

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$.

$$|A| = -5a - 25 = 0 \rightarrow a = -5$$

• Si $a = -5 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -5 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

• Si $a = -3$ o $a = 2 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -3$ y $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

$$c) \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$.

$$|A| = -2a - 5 = 0 \rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

• Si $a = -\frac{5}{2} \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq -\frac{5}{2} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

$$d) \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3a - 46 = 0 \rightarrow a = \frac{46}{3}$$

• Si $a = \frac{46}{3} \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq \frac{46}{3} \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$.

El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

22 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

$$a) \begin{cases} 7y + 5z = -7 \\ 3x + 4y + mz = -1 \\ 7x + 5z = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + mz = 6 \\ mx = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 7y + 5z = -7 \\ 3x + 4y + mz = -1 \\ 7x + 5z = 7 \end{cases} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & -7 \\ 3 & 4 & m & -1 \\ 7 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_A$$

El sistema tendrá solución si $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$, según el teorema de Rouché.

Buscamos los valores que hacen $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 49m - 245 = 0 \rightarrow m = 5$$

• Si $m = 5 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49 + 196 - 147 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 5 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

b)
$$\left. \begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} m & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 3 & 4 & -2 & | & -3 \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4m - 4 + 3 - 6 - 4m + 2 = -5$$

Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m , $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado* para todo m .

c)
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 5 & -5 & 2 & | & m \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 5 - 10 + 10 - 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -5 & m \end{vmatrix} = -4m - 5 + 15 + 10 + 30 - m = -5m + 50 = 0 \rightarrow m = 10$$

• Si $m = 10 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m \neq 10 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$. El sistema es *incompatible*.

d)
$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + mz = 6 \\ mx = 0 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & 2 & m & | & 6 \\ m & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & m \\ m & 0 & 0 \end{vmatrix} = m(m-2) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

• Si $m = 0 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $m = 2 \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

23 Discute, según los valores de a , el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo en el caso $a = 2$, si es posible:

$$\begin{cases} a^2x + a^3y + az = 1 \\ x + a^2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^4 - a^3 = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A')$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 0$, la primera ecuación queda $0 = 1$, por tanto, el sistema es incompatible.

Si $a = 1$, la primera ecuación queda $x + y + z = 1$, mientras que la segunda queda $x + y + z = 0$, por tanto, el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\begin{cases} 4x + 8y + 2z = 1 & (1.^a) \\ x + 4y + z = 0 & 4 \cdot (2.^a) - (1.^a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 8y + 2z = 1 \\ 8y + 2z = -1 \end{cases}$$

Por tanto: $z = -1/2 - 4y$

$4x + 8y - 1 - 8y = 1 \rightarrow x = 1/2$

Solución: $x = 1/2, y = \lambda, z = -1/2 - 4\lambda$

Página 97

24 ¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + ay + 3z = 1 \\ x + y + (2-a)z = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = a \\ -2x - y + (a-1)z = 2 \\ x + 3y - z = a \end{cases}$$

a) $|A| = a - a^2 = 0 \rightarrow a = 0, a = 1$

Si $a = 0$, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$ porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. Por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Si $a = 1$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, por tanto $\text{ran}(A') = 3$ pero $\text{ran}(A) = 2$. Por tanto, el sistema es incompatible.

b) $|A| = 1 - 2a = 0 \rightarrow a = 1/2$

Si $a = 1/2$, $\text{ran}(A) = 2$ (no es difícil encontrar menores no nulos).

Falta ver si $\text{ran}(A') = 3$ o $\text{ran}(A') = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 \end{vmatrix} = -6$$

Por tanto $\text{ran}(A') = 3$ y el sistema es incompatible.

25 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

a)
$$\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{cases}$$

a)
$$\left. \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

• Si $m = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

• Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible determinado*.

b)
$$\left. \begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m - 1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Si $m = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right). \text{ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales.}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = \text{ran}(A) = 2 < n.º \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.º \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible determinado*.

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$|A| = -2m + 2 = 0 \rightarrow m = 1$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces: $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3$

El sistema es *incompatible*.

- Si $m \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.º \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible determinado*.

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\} A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline m & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$

$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$

- Si $m = 3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right). \text{ La 1.ª y la 3.ª fila son iguales.}$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.º \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m \neq 3$ y $m \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.º \text{ de incógnitas.}$

El sistema es *compatible determinado*.

26 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que cumple la igualdad $ABX = C + I$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ 1/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

$$ABX = C + I \rightarrow X = (AB)^{-1} (C + I) = \begin{pmatrix} 1/7 & 4/7 \\ 1/7 & -3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -27/7 \\ 2/7 & -27/7 \end{pmatrix}$$

27 Estudia el rango de esta matriz según los valores de a y calcula su matriz inversa cuando $a = 0$, si es posible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6a^2 - 6a - 12 = 0 \rightarrow a = -1, a = 2$$

$$\text{Si } a \neq -1 \text{ y } a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 3.$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$ y que, por tanto, como este menor no depende de a , $\text{ran}(A) = 2$ si $a = -1$ o $a = 2$.

Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

28 Discute los siguientes sistemas según los valores de a y resuélvelos en el caso $a = -3$, si es posible.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + ay + az = 4 \\ -x + ay + z = a \\ x + y + az = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } |A| = 0 \rightarrow 2a^2 - 2 = 0 \rightarrow a = -1, a = 1$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

$$\text{Si } a = -1: \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \neq \text{ran}(A) \rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

• Si $a = 1$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $\text{ran}(A') < 3$

Buscamos ahora menores no nulos de orden 2 como, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$.

Por tanto $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A')$ y, por tanto, el sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a = -3$:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -9 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) - (3.^a)}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & -9 & -1 & -2 \\ 0 & -32 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Tercera ecuación: $-32y = -8 \rightarrow y = 1/4$

Segunda ecuación: $-9/4 - z = -2 \rightarrow z = -1/4$

Primera ecuación: $2x - 3/4 + 3/4 = 4 \rightarrow x = 2$

Solución: $x = 2, y = 1/4, z = -1/4$

b) $|A| = 0 \rightarrow -6a^2 + 6a + 36 = 0 \rightarrow a = -2, a = 3$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Si $a = -2$ o $a = 3$, el sistema es compatible indeterminado, porque el sistema es homogéneo.

Si $a = -3$, la solución es $(0, 0, 0)$.

29 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A(2I - A)$.

b) Justifica si existen las matrices inversas de A y $2I - A$.

c) ¿Para qué valor de k se verifica $A^{-1} = kI - A$?

a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \rightarrow A$ y $2I - A$ tienen inversa y cada una es la inversa de la otra:

$$A^{-1} = 2I - A$$

$$(2I - A)^{-1} = A$$

c) $k = 2$

30 Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

31 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, encuentra la matriz X tal que $AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AXB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos B^{-1} :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

32 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

$$(AB^t + C)X = D \rightarrow (AB^t + C)^{-1} (AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1} D \rightarrow X = (AB^t + C)^{-1} D$$

- Sea $E = AB^t + C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Calculamos E^{-1} ($|E| = 6 \neq 0 \rightarrow$ existe E^{-1}):

$$(E_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow (E_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow (E_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow E^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = (AB^t + C)^{-1} D = E^{-1} D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

33 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3AX = B \rightarrow X = \frac{1}{3}A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existe A^{-1}):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

34 Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1} ?

b) Para $m = 1$, halla la matriz X tal que $XA + B = C$.

$$a) |A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m$$

Existe A^{-1} si $m \neq 0$.

$$b) XA + B = C \rightarrow XA = C - B \rightarrow X = (C - B)A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

35 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de k la matriz AB tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $ABX = 3I$ para $k = 0$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

$$\text{a) } AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3k - 2 = 0 \rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Existe $(AB)^{-1}$ para $k \neq -\frac{2}{3}$.

$$\text{b) } ABX = 3I \rightarrow X = 3(AB)^{-1}$$

$$k = 0 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = 3 \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

36 Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 3y = 4 - 2\lambda \\ x - y = \lambda \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-\lambda}{-4} = \frac{4+\lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4+3\lambda}{-4} = \frac{4-3\lambda}{4}$$

$$\text{Soluciones: } x = \frac{4+\lambda}{4}, \quad y = \frac{4-3\lambda}{4}, \quad z = \lambda$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A')$, el sistema es *incompatible*.

37 Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, y

resuélvelo.

$$AX = B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer término:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y = 5 \\ -x + z = 2 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{2em}}_B$

$|A| = 8 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$. Sistema compatible determinado.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solución: $x = 1, y = 2, z = 3$

38 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_B$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1} . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1, y = 0, z = 0$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{array} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_B$$

$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1} . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 \\ -5 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{array} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_B$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1} . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 2$, $y = -3$, $z = 1$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{array} \right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}_B$$

$|A| = 3 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1} . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$

39 Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geoméricamente las soluciones obtenidas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$$

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \rightarrow 1 - a^2 = 0 \rightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a-1}; \quad y = \frac{1}{a+1}; \quad z = \frac{2}{a^2-1}$$

- Si $a = -1$:

$$\left. \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{cases} \right\} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la 4.^a columna y la 3.^a fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 1$:

$$\left. \begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la 4.^a columna y la 2.^a fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = -1$, el primer y el tercer plano son paralelos y el segundo los corta.
- Si $a = 1$, el primer y el segundo plano son paralelos y el tercero los corta.

$$b) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 \rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \rightarrow a = 2, a = 1$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{a-1}{a-2}; \quad y = \frac{a-1}{a-2}; \quad z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones 1.^a y 3.^a son iguales. Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda, y = 0, z = \lambda$

- Si $a = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{array} \right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la 4.^a columna y la 3.^a fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Luego, $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, dos planos son coincidentes y se cortan en una recta con el tercero.
- Si $a = 2$, los planos se cortan dos a dos.

40  [Este tipo de trabajo con parámetros requiere que el alumnado trabaje la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m la matriz es singular.

b) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema para $m = 1$ y $m = -1$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } |A| &= \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} = \\ &= (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1) = 0 \rightarrow m = \\ &\pm 1 \end{aligned}$$

A es singular para $m = -1$ y $m = 1$.

b) • Si $m = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ -2x + y + 2z = 8 \\ -2x + y = 8 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la 4.ª columna y la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

El sistema es *incompatible*.

• Si $m = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = 8 \end{array} \right\} \text{Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son iguales.}$$

Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y tomamos x como parámetro.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \end{array} \right\}$$

Soluciones: $x = \lambda$, $y = 2$, $z = 1$

41 a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA .

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA .

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t .

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(AA^t) = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A^tA) = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -z \\ 2x + y = -z \end{cases} \rightarrow x = z, y = -3z$$

$$\text{Soluciones: } x = \lambda, y = -3\lambda, z = \lambda$$

c) Como $\text{ran}(AA^t) = 2 = n.º \text{ de incógnitas}$, el sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0, y = 0$.

42 Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina B para que se verifique $B - I = A^tA^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1} :

$|A| = 4 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1} . La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

43 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Encuentra la expresión general de A^n donde n es un número natural cualquiera.

b) Razona que A^n tiene inversa para cualquier $n \geq 1$ y calcula dicha matriz inversa.

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } |A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow A^n \text{ tiene inversa.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

44 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$:

a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$.

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

$$\text{a) } |A| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

$$\text{b) Si } x = -1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ran}(A) = 1$$

$$\text{Si } x = 2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\text{Si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

45 Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:

a) $A = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & -2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) - 2 \cdot (4.^a)}} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\ = -5 \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 5 & k \end{vmatrix} = -40k = 0 \rightarrow k = 0$

(1) Desarrollamos por la 4.^a columna.

(2) Desarrollamos por la 3.^a columna.

• Si $k = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$

• Si $k \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 4$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6k - 18 \rightarrow 6k - 18 = 0 \rightarrow k = 3$

• Si $k = 3 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

• Si $k \neq 3 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$

Por tanto, $\text{ran}(B) = 3$ para cualquier valor de k .

c) Observamos que $\text{ran}(C) \leq 3$ porque solo hay tres filas.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0 \begin{cases} k = -1 \\ k = 3 \end{cases}; \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$

• Si $k = -1 \rightarrow \text{ran}(C) = 2$

• Si $k \neq -1 \rightarrow \text{ran}(C) = 3$

d) Observamos que $\text{ran}(D) \leq 3$ porque solo hay tres filas.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(D) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -t & 6 & 3-t \end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = t - 9 = 0 \rightarrow t = 9$

• Si $t \neq 9 \rightarrow \text{ran}(D) = 3$

• Si $t = 9 \rightarrow \text{ran}(D) = 2$

46 Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases} \right\} \text{ Este sistema es compatible por ser homogéneo.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a^3 - 2a = 0 \rightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

- Si $a = 0$:

$$\left. \begin{cases} y = 0 \\ -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son equivalentes. El sistema queda:

$$\left. \begin{cases} y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \right\} \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

Soluciones: $x = 0, y = 0, z = \lambda$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 2, m = 1$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Utilizando la regla de Cramer: $x = 0, y = -\frac{1}{m-1}, z = \frac{1}{m-1}$

- Si $m = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la última columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

- Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la última columna.


$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Sistema *compatible indeterminado*. Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } x = \frac{1-\lambda}{5}, y = -\frac{3\lambda-2}{5}, z = \lambda$$

Cuestiones teóricas

- 47**  [La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].

¿Verdadero o falso? Justifica las respuestas y pon ejemplos.

- a) Si c_1 , c_2 y c_3 son las columnas 1.^a, 2.^a y 3.^a de una matriz cuadrada de orden 3 tal que

$$|c_1 \ c_2 \ c_3| = 5, \text{ entonces:}$$

i) $|c_2 \ 2c_3 \ c_1| = 10$

ii) $|c_1 + c_2 \ c_2 - c_1 \ c_3| = 0$

iii) $|c_1 + c_3 \ c_2 \ c_3 + c_1| = 5$

iv) $|-c_2 \ 2c_1 - c_3 \ c_3 + c_2| = 10$

- b) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b .

- c) Si el determinante de la matriz ampliada de un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es distinto de cero, el sistema tiene solución única.

- d) Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

- a) i) Verdadero:

$$|c_2 \ 2c_3 \ c_1| = 2|c_2 \ c_3 \ c_1| = (-1)^2 2|c_1 \ c_2 \ c_3| = 10$$

- ii) Falso:

$$|c_1 + c_2 \ c_2 - c_1 \ c_3| = |c_1 + c_2 \ 2c_2 \ c_3| = 2|c_1 + c_2 \ c_2 \ c_3| = 2|c_1 \ c_2 \ c_3| = 10$$

- iii) Falso:

$$|c_1 + c_3 \ c_2 \ c_3 + c_1| = |c_1 + c_3 \ c_2 \ 0| = 0$$

- iv) Verdadero:

$$\begin{aligned} |-c_2 \ 2c_1 - c_3 \ c_3 + c_2| &= |-c_2 \ 2c_1 - c_3 \ c_3| = |-c_2 \ 2c_1 \ c_3| = 2|-c_2 \ c_1 \ c_3| = \\ &= -2|c_2 \ c_1 \ c_3| = (-1)(-2)|c_1 \ c_2 \ c_3| = 10 \end{aligned}$$

- b) Verdadero, $\text{ran}(A) = 2$, y como solo hay dos filas, A' no puede tener más rango. Es *compatible determinado* para cualquier valor de a y b .

c) Falso, puede ser también *incompatible*. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2y + 2z = 3 \\ 3y + 3z = 1 \\ x - y = -1 \end{array} \right\}$$

Tiene $|A'| = 7 \neq 0$, pero $\text{ran}(A) = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

d) Falso, puede ser también *incompatible*. Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{array} \right\}$$

$$\text{ran}(A) = 1, \text{ran}(A') = 2$$

48 El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.

Al ser el sistema homogéneo con 3 incógnitas, tenemos que:

$$\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = n.^\circ \text{ de incógnitas} = 3$$

El sistema sería *compatible determinado*. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

49 Si en un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas se verifica que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$, ¿se puede aplicar la regla de Cramer? En caso afirmativo, explica las transformaciones que hay que hacer en el sistema para aplicarla.

Sí se puede aplicar la regla de Cramer. Para ello, nos tenemos que quedar solo con las dos ecuaciones y las dos incógnitas con las que hemos formado el menor de orden 2 distinto de cero. Las dos incógnitas sobrantes pasan como parámetros al segundo miembro.

50 En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') < n.º \text{ de incógnitas}$.

b) No, pues al ser $\text{ran}(A) < n.º \text{ de incógnitas}$, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al segundo miembro las incógnitas que sea necesario.

Para profundizar

51 Discute, en función de los parámetros a y b , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 3a = 0 \rightarrow a = 2$$

• Si $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

• Si $a = 2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix} = 25 - 5b = 0 \rightarrow b = 5$$

Si $b \neq 5 \rightarrow \text{ran}(A') = -3 \neq \text{ran}(A) = 2 \rightarrow$ Sistema incompatible.

Si $b = 5 \rightarrow \text{ran}(A') = 2 = \text{ran}(A) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

52 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+3 \\ b \\ c+3 \end{pmatrix}$.

Justifica que si el sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces el sistema $AX = C$ también lo es.

Si $AX = B$ es compatible determinado, entonces $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$.

Para ello, el siguiente determinante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c = 0$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada correspondiente al sistema $AX = C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c+3 \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c$$

Los dos determinantes calculados tienen el mismo valor, luego este último vale cero. Por tanto, el sistema $AX = C$ es *compatible determinado* ya que también verifica que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$.

53 Discute y resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} kx + 2z = 0 \\ kx - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} kx + 2z = 0 \\ kx - z = k \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = k^2 + k = 0 \rightarrow k = -1, k = 0$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Usando la regla de Cramer:

$$x = -\frac{4}{k+1}, y = \frac{k+3}{k+1}, z = \frac{2k}{k+1}$$

Si $k = 0$:

$$\begin{cases} 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son equivalentes.

$$\begin{cases} -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

Sistema *compatible indeterminado*.

Pasamos y al segundo miembro como parámetro.

$$\text{Soluciones: } x = -3k + 5, y = k, z = 0$$

Si $k = -1$:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y - z = -1 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

Añadimos la cuarta columna.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (m+2)x + (m-1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - m = 0 \rightarrow m = 0, m = -1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$$\text{Usando la regla de Cramer: } x = \frac{2m+1}{m^2+m}, y = \frac{1}{m}, z = \frac{2m+1}{m^2+m}$$

Si $m = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ -y + z = 2 \\ x - z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) < 3, \text{ pero } \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

Si $m = -1$:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 3 \\ -x - y + z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) < 3, \text{ pero } \text{ran}(A') = 3 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

54 Discute los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x - z = b \\ x + z = c \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay = b + 1 \\ -x + z = b \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array} \right. \quad A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array} \right)}_A$$

$$|A| = 5a = 0 \rightarrow a = 0$$

• Si $a = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array} \right); \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0; \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{array} \right| = 5b + 20 = 0 \rightarrow b = -4$$

— Si $a = 0$ y $b = -4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

— Si $a = 0$ y $b \neq -4 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

• Si $a \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b .

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = b \end{array} \right. \quad A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & b \end{array} \right)}_A$$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

• Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right\} \text{Contradictorias, a no ser que } b = 0.$$

— Si $a = 1$ y $b \neq 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

— Si $a = 1$ y $b = 0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{La 1.ª fila y la 3.ª son iguales.}$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow \text{Compatible indeterminado.}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array} \right) \text{ La 1.ª columna y la 3.ª son iguales.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.º \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.º \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b .

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x - z = b \\ x + z = c \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array} \right)}_A$$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.º \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a , b y c .

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} ax + y - z = b - 1 \\ 2x + ay = b + 1 \\ -x + z = b \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & b - 1 \\ 2 & a & 0 & b + 1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array} \right)}_A$$

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b - 1 \\ 2 & -1 & 0 & b + 1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & b - 1 \\ 2 & -1 & b + 1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = -3b = 0 \rightarrow b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

— Si $a = -1$ y $b = 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.º \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b - 1 \\ 2 & 2 & 0 & b + 1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & b - 1 \\ 2 & 2 & b + 1 \\ -1 & 0 & b \end{vmatrix} = 3b - 3 = 0 \rightarrow b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1 \rightarrow \text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^{\circ}$ de incógnitas \rightarrow El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b .

55 Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:

$$\text{a) } \begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k = 0 \rightarrow k = 0$$

- Si $k \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 4 \neq \text{ran}(A) \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $k = 0$:

$$\begin{cases} -z = 2 \\ 3x = 0 \\ 5x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a son equivalentes, nos queda:

$$\begin{cases} -z = 2 \\ 3x = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

El determinante de la matriz ampliada en este caso es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) < 3$, el sistema es *incompatible*.

Este sistema no tiene solución para ningún valor de k .

$$\text{b) } \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7m - m^2 = 0 \rightarrow m = 7, m = 0$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 7 \rightarrow \text{ran}(A') = 4 \neq \text{ran}(A) \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

- Si $m = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a son equivalentes, por tanto el sistema es equivalente a:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes en este caso es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Usando la regla de Cramer obtenemos la *solución*: $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = 0$

- Si $m = 7$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ 7x + 2z = 0 \\ 7y - z = 7 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

El menor formado por los coeficientes de las tres primeras ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A') \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Nos quedamos solo con las tres primeras ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ 7x + 2z = 0 \\ 7y - z = 7 \end{array} \right\}$$

Usando la regla de Cramer obtenemos la *solución*: $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{4}$, $z = \frac{7}{4}$

AUTOEVALUACIÓN

Página 99

1 Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y .

$$B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0$$

Luego $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y .

2 Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -2 & 6 \end{array} \right)$$

A

$$|A| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \quad \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.
- Si $a = -2$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 3$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- Resolvemos ahora el sistema para $a = 3$:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$$

Sabemos que el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación, pasamos z al segundo miembro como parámetro y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-z}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}$$

Soluciones: $x = \frac{15-\lambda}{5}$, $y = \frac{4\lambda}{5}$, $z = \lambda$

3 Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -2(a^3 - a) = 0 \rightarrow -2a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

- Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad |M| = -12$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{12} (M_{ji}) = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

4 Halla en cada caso la matriz X que verifica la igualdad:

a) $A^{-1}XA = B$

b) $(A + X)B = 1$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) $A^{-1}XA = B \rightarrow AA^{-1}XAA^{-1} = ABA^{-1} \rightarrow X = ABA^{-1}$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -3 + 2 = -1$):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (A_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (A + X)B = I &\rightarrow AB + XB = I \rightarrow XB = I - AB \rightarrow XBB^{-1} = (I - AB)B^{-1} \rightarrow \\ &\rightarrow X = (I - AB)B^{-1} \rightarrow X = B^{-1} - A \end{aligned}$$

Calculamos B^{-1} ($|B| = 1 + 2 = 3$):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5 a) Discute, en función de a , el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

$$\text{a) } \left. \begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a + 1) \\ ax + y + z = a \end{cases} \right\} A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a + 2 \\ 1 & 1 & a & -2(a + 1) \\ a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}}_A$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a - 1)^2(a + 2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

• Si $a = 1$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Las tres ecuaciones resultantes son contradictorias.}$$

El sistema es *incompatible*.

• Si $a = -2$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ entonces } \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < n.^\circ \text{ de incógnitas.}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

b) Para $a = -1$:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_A \text{ y sabemos que } |A| = 4.$$

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$$

6 Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array} \right\} A' = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array} \right)}_A$$

$$|A| = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$$

• Si $m = 4$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

La 4.^a columna se obtiene sumando la 2.^a y la 3.^a. Luego, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$. El sistema es *compatible indeterminado* pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2$$

Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.^a ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

Soluciones: $x = -1 + \lambda$, $y = 2 - \lambda$, $z = \lambda$

• Si $m \neq 4 \rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n. de incógnitas. El sistema es *compatible determinado*.$

Lo resolvemos en este caso:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

Solución: $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$

Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

7 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n.^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ El sistema será *compatible determinado*.
- Si $\text{ran}(A) = 3 \neq \text{ran}(A') = 4 \rightarrow$ El sistema será *incompatible*.

8 En un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2.

Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada siempre coinciden ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 = n.^\circ \text{ de incógnitas}$. El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0, y = 0$.