2 ÁLGEBRA DE MATRICES

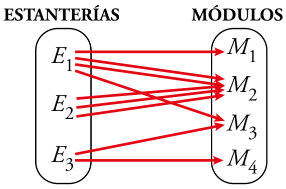
Página 47

Resuelve

Estanterias modulares

Una empresa vende tres modelos de estanterías modulares, E_1, E_2, E_3, que, a su vez, están formadas por cuatro tipos de módulos, M_1, M_2, M_3, M_4.

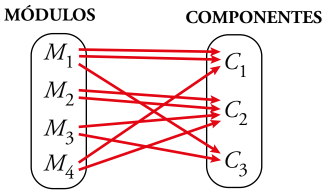
Los módulos que componen cada modelo de estantería se describen en el siguiente gráfico.



Esta información se puede representar mediante esta tabla.

	M_1	M_2	M_3	M_4
E_1	1	2	1	0
E_2	0	3	0	0
E_3	0	0	1	1

A su vez, los módulos están formados de distintos componentes: elementos de fijación, C_1, piezas de madera grandes, C_2, y piezas de madera pequeñas, C_3.



Representa mediante una tabla la información recogida en el diagrama de componentes de los módulos.

	C_1	C_2	C_3
M_1	2	0	1
M_2	0	2	0
M_3	0	1	1
M_4	1	1	0

1 NOMENCLATURA. DEFINICIONES

Página 49

1 Escribe las matrices traspuestas de:

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\\7&6\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&5&7\\4&1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&2&4&1\\6&1&0&3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}7&4&1\\2&1&0\\0&1&7\\6&3&2\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}1&7&4\\7&-1&0\\4&0&3\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}5&4&6&1\end{pmatrix}$$

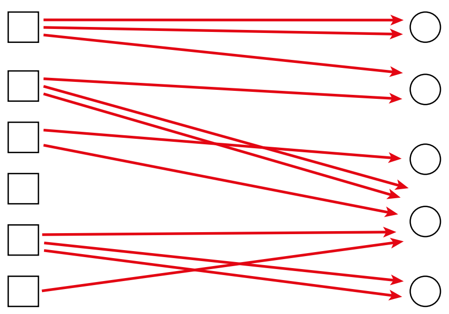
$$A^t=\begin{pmatrix}3&2&7\\1&5&6\end{pmatrix};\qquad B^t=\begin{pmatrix}2&4\\5&1\\7&0\end{pmatrix};\qquad C^t=\begin{pmatrix}1&0&6\\3&2&1\\5&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix};$$

$$D^t=\begin{pmatrix}7&2&0&6\\4&1&1&3\\1&0&7&2\end{pmatrix};\qquad E^t=\begin{pmatrix}1&7&4\\7&-1&0\\4&0&3\end{pmatrix};\qquad F^t=\begin{pmatrix}5\\4\\6\\1\end{pmatrix}$$

2 Escribe una matriz X tal que $X^t = X$; esto es, que sea simétrica.

Por ejemplo, $X=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&0\\-1&0&4\end{pmatrix}$.

3 Escribe una matriz que describa lo siguiente:



$$\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

2 OPERACIONES CON MATRICES

Página 50

1 Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $\boldsymbol{E = 2A - 3B + C - 2D}$**.**

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

Página 53

2 Cabezas pensantes. **[Una vez que el alumnado haya leído el enunciado, compartirá las propuestas para decidir qué productos pueden realizarse tal y como se explica en esta técnica].**

Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \qquad A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \qquad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3 Intenta conseguir una matriz $\boldsymbol{I_3}$ **de dimensión** $\boldsymbol{3 \times 3}$ **que, multiplicada por cualquier matriz cuadrada** $\boldsymbol{A_{(3 \times 3)}}$**, la deje igual.**

Es decir: $\boldsymbol{A \cdot I_3 = I_3 \cdot A = A}$

La matriz $\boldsymbol{I_3}$ **que verifica la igualdad anterior se llama matriz unidad de orden 3.**

Una vez que sepas cuál es su fisonomía, sabrás obtener la matriz unidad de cualquier orden.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 ▸ PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES

Página 54

1 Comprueba las propiedades 2 y 3 del producto de números por matrices, tomando:

$$\boldsymbol{a = 3,\ b = 6} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD 2:

$$9A = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3A + 6A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 12 & -18 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 \\ 18 & -27 & 0 \end{pmatrix}$$

$9A = 3A + 6A$

PROPIEDAD 3:

$$3\,(A + B) = 3\begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$$3A + 3B = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -6 & 3 \\ 12 & 18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 0 \\ 18 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

$3(A + B) = 3A + 3B$

Página 55

2 Comprueba las propiedades distributivas para las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{9} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 42 & -1 \\ 15 & 0 & 45 & -10 \\ 17 & 5 & 60 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 26 & 20 \\ 0 & -5 & 25 & 25 \\ 4 & -5 & 36 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 68 & 19 \\ 15 & -5 & 70 & 15 \\ 21 & 0 & 96 & 25 \end{pmatrix}$$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$(B + C) \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & 7 \\ 3 & -1 & 14 & 3 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D + C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

4 MATRICES CUADRADAS

Página 57

1 Calcula, utilizando el método de Gauss, la inversa de cada una de las siguientes matrices en el supuesto de que la tengan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)-(2.^a)\\(2.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)-3\cdot(1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)+(2.^a)\\(2.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)-(2.^a)\\(-1/2)\cdot(2.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)+2\cdot(1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 2.ª fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

2 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices o averigua que no la tiene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)-4\cdot(1.^a)\\(3.^a)-7\cdot(1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-2\cdot(2.^a)\end{smallmatrix}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$

En la parte de la izquierda, la 3.ª fila está compuesta por ceros.

Por tanto, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)-3\cdot(3.^a)\\(2.^a)-2\cdot(3.^a)\\(3.^a)\end{smallmatrix}}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a)-2\cdot(2.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Así, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ -5 \cdot (2.^a) + (3.^a) \\ -(1/10) \cdot (3.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ -(1/5) \cdot (2.^a) \\ (3.^a) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

Así, $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 & -1/5 \\ 2/5 & -1/5 & -1/10 \end{pmatrix}$$

Página 59

3 **[El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].**

Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **comprueba:**

a) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

b) $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

c) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

a) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \\ A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 41 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (A + B) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \\ A \cdot C + B \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 15 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 30 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right\} (A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$$

c) $$\left.\begin{array}{l} A \cdot (B + C) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \\ (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 26 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 107 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

4 **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Encuentra X **que cumpla:** $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$.

$$3X = 5B + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 30 \\ 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 30 \\ 15 & -17 \end{pmatrix} \to X = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -17/3 \end{pmatrix}$$

5 **Encuentra dos matrices, A y B, de dimensión 2×2 que cumplan:**

$$2A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } 3A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = A - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6 **Encuentra dos matrices X e Y que verifiquen:**

$$2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2X - 3Y &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando: } -Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -10 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

7 **Averigua cómo ha de ser una matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumpla la siguiente condición:**

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= a + c \\ a + b &= b + d \\ c &= c \\ c + d &= d \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} a &= d \\ \\ c &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales cualesquiera.

8 **Efectúa las siguientes operaciones con las matrices dadas:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C)$ **b)** $(A - B) \cdot C$ **c)** $A \cdot B \cdot C$

a) $(A \cdot B) + (A \cdot C) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

b) $(A - B) \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 12 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

9 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $(A - I)^2 = 0$**.**

$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

10 **Halla la inversa de estas matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7x + 3z & 7y + 3t \\ 2x + z & 2y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} 7x + 3z = 1 \\ 2x + \ \ z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = -2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 7y + 3t = 0 \\ 2y + \ \ t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ t = 7 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3x - 2z & 3y - 2t \\ -8x + 5z & -8y + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 1 \\ -8x + 5z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -5 \\ z = -8 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 3y - 2t = 0 \\ -8y + 5t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2 \\ t = -3 \end{array}$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a = 1,\ b = 0,\ c = 0,\ 2d = 0,\ 2e = 1,\ 2f = 0,\ g = 0,\ h = 0,\ i = 1$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} a+2d+3g=1 \\ d+2g=0 \\ d+\ g=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ d=0 \\ g=0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} b+2e+3h=0 \\ e+2h=1 \\ e+\ h=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b=-1 \\ e=-1 \\ h=1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} c+2f+3i=0 \\ f+2i=0 \\ f+\ i=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c=-1 \\ f=2 \\ g=-1 \end{array}$$

Por tanto, la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11 **Resuelve estas ecuaciones:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

b) $Y \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z - \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$.

La ecuación es $AX + B = C \Rightarrow X = A^{-1}(C - B)$.

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ 3\cdot(2.^a)+8\cdot(1.^a) \end{subarray}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{subarray}{l} -1\cdot(1.^a)+2\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \end{subarray}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 6 \\ 0 & -1 & 8 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{subarray}{l} (1.^a)/(-3) \\ (2.^a)/(-1) \end{subarray}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) La ecuación es, siendo A, B y C las mismas matrices del apartado anterior:

$YA + B = C \Rightarrow Y = (C - B)A^{-1}$

$$Y = \left[\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -15 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -16 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 & -27 \\ 184 & 71 \end{pmatrix}$$

c) Llamamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La ecuación es $AZ - B = C \Rightarrow Z = A^{-1}(C + B)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{subarray}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\begin{subarray}{l} (1.^a)-2\cdot(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{subarray}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)-(3.^a)\\(2.^a)+2\cdot(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&2\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)/(-1)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&2\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right) \to A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$Z=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}4&5&2\\3&6&3\\2&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5&-1\\3&7&4\\2&1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&10&1\\6&13&7\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-6&-7\\2&-7&-5\\2&10&6\end{pmatrix}$$

6 ▸ RANGO DE UNA MATRIZ

Página 62

1 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \to ran(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \\ (4.^a) - 4 \cdot (2.^a) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) + (3.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(D) = 3$$

7 FORMA MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

Página 63

1 Expresa en forma matricial y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y - z = 6 \\ -x + 3z = 2 \\ -2x + 5y - 3z = 0 \end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$

Utilizamos la matriz A^{-1} que está en la página 56:

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 106,\ y = 64,\ z = 36$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}_{C}$

Calculamos B^{-1} y despejamos.

$$B \cdot X = C \to X = B^{-1} \cdot C = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1,\ y = -5$

2 Expresa en forma matricial y resuelve.

a) $\begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = -1 \\ z + t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y - 3z - t = 0 \\ y + 2z = 4 \\ 2y + 3z + t = 1 \\ 3x - 2y + t = -2 \end{array}\right\} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{B}$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -5 \neq 0 \to$ existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución: $x = 1,\; y = 0,\; z = 2,\; t = -5$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 5 \\ y + z \quad &= -1 \\ z + t &= 4 \\ t &= 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

Resolvemos el sistema escalonado.

Solución: $x = 8,\; y = -3,\; z = 2,\; t = 2$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 64

2. Operaciones con matrices. Igualdad

Hazlo tú

- **Sea $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$. Halla x e y para que se cumpla que $A^2 = A$. Estas matrices se llaman idempotentes.**

$A^2 = \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & y^2-6 \end{pmatrix}$

Por tanto, buscamos los valores de x, y que cumplen:

$\begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & y^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$

Es decir:

$x^2 - 6 = x \to x^2 - x - 6 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 3$

$y^2 - 6 = y \to y^2 - y - 6 = 0 \to y_1 = -2,\ y_2 = 3$

Las igualdades $3x + 3y = 3$, $-2x - 2y = -2$ indican que $x + y = 1$.

Por tanto, las soluciones son: $x = -2$, $y = 3$; $x = 3$, $y = -2$

Las matrices idempotentes que buscamos son:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Página 65

3. Matriz inversa igual a traspuesta

Hazlo tú

- **Determina los valores de a, b y c para que $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ sea ortogonal.**

$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $C^t = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, se debe cumplir:

$C^{-1} = C^t \to \begin{pmatrix} 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Es decir: $1/a = a \to a = \pm 1$

De la misma forma se llega a que $b = \pm 1$, $c = \pm 1$.

Las matrices ortogonales que buscamos son:

$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. Dimensión de una matriz y de su traspuesta

Hazlo tú

- **Halla la matriz X que verifica: $X \cdot A = C^t$ siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$**

Llamamos $X = (x \quad y)$.

Se debe cumplir:

$$(x \quad y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2 \quad 1 \quad -3) \ \to \ (2x \quad x-y \quad x+y) = (-2 \quad 1 \quad -3)$$

Por tanto:

$2x = -2 \to x = -1$

$-1 - y = 1 \to y = -2$

Con estos valores, también se cumple la igualdad $x + y = -3$, por tanto:

$X = (-1 \quad -2)$

5. Matriz inversa, definición

Hazlo tú

- **Prueba que si $A^2 = A + I$, entonces A es invertible (invertible es sinónimo de regular).**

$A^2 = A + I$

$A^2 - A = I \ \to \ A(A - I) = I \ \to \ A - I$ es la inversa de A, luego A es invertible.

Página 66

6. Ecuaciones con matrices

Hazlo tú

- **Dadas estas matrices cuadradas, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que cumple lo siguiente: $AXA = 2BA$**

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

En la ecuación $AXA = 2BA$ multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda y a la derecha:

$AXA = 2BA \ \to \ X = A^{-1} \cdot 2BA \cdot A^{-1} \ \to \ X = 2A^{-1}BI = 2A^{-1}B$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

7. Factor común. Matriz inversa

Hazlo tú

- **Expresa M^{-1} en función de M y de I, sabiendo que M es una matriz cuadrada que cumple esta igualdad:**

$$M^2 - 5M = \frac{1}{2}I$$

$$M^2 - 5M = \frac{1}{2}I \to M(M-5I) = \frac{1}{2}I \to M - 5I = M^{-1}\left(\frac{1}{2}I\right) \to \frac{1}{2}M^{-1} = M - 5I \to M^{-1} = 2M - 10I$$

Página 67

8. Potencia de una matriz

Hazlo tú

- **Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y un número natural cualquiera n.**

a) Calcula A^n.

b) Halla $A^{50} - A^{20}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

Observamos que:

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 4 & 1 \end{pmatrix}$

Suponemos que sigue la misma regla para el exponente n, es decir:

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$

Si comprobamos que esta expresión de A^n es válida para A^{n+1}, entonces será válida para cualquier n (método de inducción):

$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n+3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(n+1) & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^{50} - A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 150 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 60 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 90 & 0 \end{pmatrix}$

9. Despejar una matriz multiplicando por las inversas de otras dos

Hazlo tú

- **Halla la matriz X que verifica $AXB = A + B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

Multiplicamos en los dos miembros de la ecuación $AXB = A + B$ por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha:

$AXB = A + B \to X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I + A^{-1}B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}BB^{-1} \to$
$\to X = B^{-1} + A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

10. Rango de una matriz

Hazlo tú

- **Estudia el rango de B en función del parámetro m:**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - m \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-m & 2-2m \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a)/(1-m) \\ (3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & m & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - m \cdot (2.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2m \end{pmatrix}$$

- Si $m = -1 \rightarrow ran(M) = 2$ porque las dos primeras filas son L.I. y la tercera es una fila de ceros.
- Si $m \neq -1 \rightarrow ran(M) = 3$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 68

1. Ecuación con matrices

- **Calcular x, y, z tales que:**

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+1 & x+yz \\ x+yz & x^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} y^2+1=5 \\ x+yz=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \to y = \pm 2$$

- Si $y = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} x+2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \to x = 2,\ z = -1;\ x = -2,\ z = 1$$

- Si $y = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} x-2z=0 \\ x^2+z^2=5 \end{array}\right\} \to x = -2,\ z = -1;\ x = 2,\ z = 1$$

Soluciones: $x_1 = 2,\ y_1 = 2,\ z_1 = -1$

$x_2 = -2,\ y_2 = 2,\ z_2 = 1$

$x_3 = -2,\ y_3 = -2,\ z_3 = -1$

$x_4 = 2,\ y_4 = -2,\ z_4 = 1$

2. Despejar una matriz

- **Determinar la matriz X que verifique $AXA - B = 0$, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y 0 la matriz nula de orden 2.

$AXA - B = 0 \to AXA = B \to X = A^{-1}BA^{-1}$

Hallamos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot(2.^{a})+2\cdot(1.^{a})]{(1.^{a})} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^{a})]{(1.^{a})+(2.^{a})}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-(2.^{a})]{(1.^{a})/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matrices conmutables

- **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, obtener todas las matrices B que conmutan con A, es decir, que $A \cdot B = B \cdot A$.**

  Escribirlas en función de dos parámetros y poner un ejemplo.

  Escribimos: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

  Por tanto:

  $$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c = 2b \\ d = a-b \end{cases}$$

  Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}$

4. Potencias de una matriz

- **Dada $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$, calcular:**

  a) Las matrices $A^2, A^3, A^4, \ldots, A^8$.

  b) Los números reales m y n para los que se verifica:

  $(A + I)^3 = mI + nA$

  a) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

  $A^3 = (-I) \cdot A = -A$

  $A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = I$

  $A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

  $A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$

  $A^7 = A^6 \cdot A = (-I) \cdot A = -A$

  $A^8 = A^7 \cdot A = (-A) \cdot A = (-A^2) = I$

  b) $(A + I)^3 = A^3 + A^2 + 2A^2 + 2A + A + I = -A - I - 2I + 2A + A + I = 2A - 2I$

  Por tanto, $m = -2$, $n = 2$.

5. Ecuación con infinitas soluciones

- **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$**, hallar una matriz** X **tal que** $XAX^{-1} = B$**.**

$XAX^{-1} = B \rightarrow XA = BX$

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} \\ BX = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Igualando obtenemos un sistema de ecuaciones.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2x = 6a - 7c \\ -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2a = 8a - 9c \\ 2c = 6a - 7c \end{array}\right\} \rightarrow c = \dfrac{2}{3}a \\ \left.\begin{array}{l} -b = 8b - 9d \\ -d = 6b - 7d \end{array}\right\} \rightarrow b = d \end{array}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ (2/3)\,a & b \end{pmatrix}$

De todas las posibles soluciones, podemos tomar $a = 3$ y $b = 1$, y obtenemos $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 69

Para practicar

Operaciones con matrices

1 Dadas estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, estas otras:

a) $A \cdot B$ **b)** $B \cdot C$ **c)** $A^t \cdot C$ **d)** $A \cdot B \cdot C$ **e)** $B + C \cdot A^t$

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -12 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

c) No se pueden multiplicar, A^t tiene dos columnas y C tiene tres filas.

d) $ABC = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -12 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -32 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

e) $B + CA^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \\ -11 & -4 \end{pmatrix}$

Pero esta suma no se puede realizar porque los sumandos tienen diferentes dimensiones.

2 Dada $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$**, comprueba que** $(A + I)^2 = \mathbf{0}$ **y expresa** A^2 **como combinación lineal de** A **e** I**.**

$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \qquad (A+I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Expresamos A^2 como combinación lineal de A e I:

$(A + I)^2 = \mathbf{0} \rightarrow (A + I) \cdot (A + I) = \mathrm{A}^2 + A + A + I = A^2 + 2A + I = \mathbf{0} \rightarrow A^2 = -2A - I$

3 **a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.**

b) Utiliza la igualdad anterior para calcular A^4.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$\Big\} \; A^2 = 2A - I$

b) Calculamos A^4:

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A - I)^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I^2 =$$

$$= 4(2A - I) - 4A + I = 8A - 4I - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= 4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

4 **Calcula A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y n un número natural cualquiera. Halla después $A^{21} - A^{20}$.**

$A^2 = A$

$A^3 = A^2\ A = A\ A = A^2 = A$

Se ve claramente que $A^n = A$ para cualquier valor de n, por tanto:

$A^{21} - A^{20} = A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5 **Resuelve el siguiente sistema dado en forma matricial:**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2x \\ 3y - 2 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{array}\right\}$

Sumando:

$4x = -5 \to x = \frac{-5}{4} \to y = -3 - x = -3 + \frac{5}{4} = \frac{-7}{4}$

Solución: $x = \frac{-5}{4}$; $y = \frac{-7}{4}$

6 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $AX = XA \to b = 2c,\ d = a + c \to X = \begin{pmatrix} a & 2c \\ c & a + c \end{pmatrix}$

7 **Sea la matriz** $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2.

b) Determina x **e** y **para que** $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x^2-1 & -x-y \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{r} x^2-1=x+1 \\ -x-y=-2 \\ x+y=2 \\ y^2-1=-1 \end{array}\right\} \to y=0,\ x=2$

8 **En un centro de idiomas los alumnos de inglés, francés y chino se distribuyen en cuatro niveles como indica la matriz** A**. Además estas clases pueden ser impartidas en aulas con laboratorio de idiomas o sin él. El precio por hora viene dado en la matriz** B**.**

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & F & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 17 & 10 & 12 \\ 15 & 16 & 10 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ Lab \\ NoLab \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 & 10 & 12 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcula lo que ingresa el centro por hora en cada idioma según sea de aula con laboratorio o sin él.

La matriz que buscamos es $BA = \begin{pmatrix} 462 & 480 & 356 \\ 371 & 378 & 284 \end{pmatrix}$

La primera columna indica lo que cobra por las clases de inglés con laboratorio, 462 euros, y sin laboratorio, 371 euros. La segunda indica lo que cobra por francés: 480 euros con laboratorio y 378 euros sin laboratorio. Finalmente, la tercera indica lo que cobra por las clases de chino: 356 euros con laboratorio y 284 euros sin laboratorio.

9 **[La búsqueda de la solución del problema a partir de los datos del enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión personal)].**

Un fabricante produce tres clases de zumos: clásico, *A*; sin azúcar, *B*; y con leche, *C*. Cada uno lo vende en cuatro tamaños: 1/4 L, 1/3 L, 1/2 L y 1 L con los precios siguientes, en euros:

- **Tamaño 1/4 L (0,5 ; 0,4 ; 0,6)**
- **Tamaño 1/3 L (0,8 ; 0,75 ; 0,9)**
- **Tamaño 1/2 L (1; 0,9 ; 1,2)**
- **Tamaño 1 L (1,5 ; 1,2 ; 1,75)**

Los envases que produce en un día vienen dados por:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1/4\text{ L} & 1/3\text{ L} & 1/2\text{ L} & 1\text{ L} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 500 & 250 & 200 \\ 250 & 300 & 200 & 150 \\ 150 & 600 & 150 & 100 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Escribe una matriz N **que indique los precios.**

b) Calcula los elementos de la diagonal principal de la matriz MN **y explica su significado.**

c) Haz lo mismo con los elementos de la diagonal principal de la matriz NM**.**

a) La matriz N que indica los precios de cada zumo es la siguiente:

$N = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,6 \\ 0,8 & 0,75 & 0,9 \\ 1 & 0,9 & 1,2 \\ 1,5 & 1,2 & 1,7 \end{pmatrix}$ Las columnas indican el tipo de zumo y las filas, el tamaño.

b) $MN = \begin{pmatrix} 1100 & 960 & 1280 \\ 790 & 685 & 922,5 \\ 855 & 765 & 985 \end{pmatrix}$

Los elementos de la diagonal principal son los precios del total de envases del zumo A, B y C, en este orden.

c) $NM = \begin{pmatrix} 340 & 730 & 295 & 220 \\ 562,5 & 1165 & 485 & 362,5 \\ 705 & 1490 & 610 & 455 \\ 1012,5 & 2160 & 877,5 & 655 \end{pmatrix}$

Los elementos de la diagonal principal indican el precio total de los envases de 1/4 L, de 1/3 L, de 1/2 L y de 1 L, en este orden.

Matrices cuadradas. Matriz inversa

10 Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $\boldsymbol{A \cdot B}$ **b)** $\boldsymbol{B \cdot A}$ **c)** $\boldsymbol{B^{-1}}$

d) $\boldsymbol{(A + B)(A - B)}$ **e)** $\boldsymbol{A^2 - B^2}$ **f)** $\boldsymbol{(A + B)^2}$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a) + (1/2) \cdot (2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a) - 2 \cdot (1.^a)]{(1.^a)}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1/2) \cdot (2.^a)]{1/2 \cdot (1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Por tanto, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 14 & -14 \end{pmatrix}$

e) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 20 & -7 \end{pmatrix}$

f) $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$

11 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**, averigua cuál de las siguientes matrices es su inversa:**

$$M = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. M no es inversa de A.

$A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. N es la inversa de A.

12 **Utiliza el método de Gauss para hallar la matriz inversa de cada una de estas matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1.^a) \leftrightarrow (2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(1.^a)+(2.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a):2]{-(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Inversa de B:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2(1.^a)+(2.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a):4]{-(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Inversa de C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a)-(3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a)+(2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -(3.^a) \end{subarray}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

13 **a) Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**, prueba que** A^3 **es la matriz nula.**

b) Demuestra después que la matriz $I + A + A^2$ **es la matriz inversa de** $I - A$.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Veamos que $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$:

$$(I + A + A^2)\,(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I - A^3 = I - \mathbf{0} = I$$

Como $(I + A + A^2) \cdot (I - A) = I$, entonces $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

Página 70

Ecuaciones matriciales

14 **Calcula las matrices X e Y que verifican las siguientes condiciones:**

$$\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases} \quad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 2 y restamos las ecuaciones y nos queda:

$$Y = A - 2B \to Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Volvemos a la primera ecuación:

$$2X + 3Y = A \to X = \frac{1}{2}(A - 3Y) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

15 **Dadas A y B, halla X tal que $2X - B^2 = A \cdot B$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}(A \cdot B + B^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

16 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica:**

$$AX - A = B - C$$

$AX - A = B - C \to A(X - I) = B - C$

Multiplicamos en los dos miembros por A^{-1} a la izquierda:

$X - I = A^{-1}(B - C) \to X = I + A^{-1}(B - C)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B - C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

17 **Halla las matrices *A* y *B* tales que:**

$$\begin{cases} 2A-5B=\begin{pmatrix}1&5&-2\\5&-2&3\end{pmatrix}\\ -A+4B=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\2&4&-3\end{pmatrix}\end{cases}$$

Sumamos la primera ecuación al doble de la segunda y obtenemos:

$$3B=\begin{pmatrix}-3&3&0\\9&6&-3\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}$$

Volvemos a la primera ecuación:

$$2A-5B=\begin{pmatrix}1&5&-2\\5&-2&3\end{pmatrix}\to$$

$$\to\ A=\frac{1}{2}\left[5B+\begin{pmatrix}1&5&-2\\5&-2&3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\left[5\begin{pmatrix}-1&1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&5&-2\\5&-2&3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\10&4&-1\end{pmatrix}$$

18 **Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y que verifiquen estas condiciones:**

$$\begin{cases}X-2M=3N\\M+N-Y=I\end{cases}$$

$$X=3N+2M=3\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\9&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&10\\-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10\\7&6\end{pmatrix}$$

$$Y=M+N-I=\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5\\2&2\end{pmatrix}$$

19 **Considera las siguientes matrices:**

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&1\\2&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-2\\0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

a) Calcula B^{-1} por el método de Gauss.

b) Halla X tal que $BX-A=C^t$.

c) Determina la dimensión de una matriz M para poder calcular AMC.

d) ¿Cuál debe ser la dimensión de N para que C^tN sea una matriz cuadrada?

a) $B=\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\2&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[(2.^a)-(1.^a)]{(1.^a)}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&2&-1\\0&1&-1&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)/2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-1/2\\0&1&-1&1\end{array}\right)$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\-1&1\end{pmatrix}$$

b) $BX - A = C^t \;\rightarrow\; BX = C^t + A \;\rightarrow\; X = B^{-1}(C^t + A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3/2 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $A_{(2 \times 3)} M_{(m \times n)} C_{(3 \times 2)}$

M debe tener dimensión 3×3.

d) $C^t{}_{(2 \times 3)} N_{(m \times n)} = M_{(2 \times 2)}$

N debe tener dimensión 3×2.

20 **Sea la siguiente ecuación matricial $AX - B + C = 0$, donde**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; \text{y} \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A^{-1} aplicando la definición. **b) Resuelve la ecuación.**

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4a + c & 4b + d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a + c &= 1 \\ 4b + d &= 0 \\ -a &= 0 \\ -b &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow a = 0, \; b = -1, \; c = 1, \; d = 4 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $AX - B + C = \mathbf{0} \;\rightarrow\; AX = B - C \;\rightarrow\; X = A^{-1}(B - C)$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

21 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:**

a) Calcula A^{-1}.

b) Halla la matriz X que verifique $AX + 2A = I$.

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AX + 2A = I \;\rightarrow\; AX = I - 2A \;\rightarrow\; X = A^{-1}(I - 2A)$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

22 **Sean** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Despeja la matriz X **en la ecuación** $XA - B = XC$. **b) Calcula** X.

a) $XA - B = XC \to XA - XC = B \to X(A - C) = B \to X = B(A - C)^{-1}$

b) $X = B(A - C)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)+(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)-(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2.^a)/(-2)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

23 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$:

a) Calcula las matrices X **e** Y **que verifiquen** $2X - Y = A$ **y** $X - 3Y = B$.

b) Halla la matriz Z **tal que** $B + ZA - B^t = 3I$.

a) $\begin{cases} 2X - Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \to \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \end{cases} \xrightarrow[-2 \cdot (2.^a)]{(1.^a)} \begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \\ -2X + 6Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} \end{cases}$

Sumamos:

$$5Y = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 18 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \to 5Y = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la segunda ecuación:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices solución son $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos Z de la ecuación:

$ZA = 3I + B^t - B$

Se podrá despejar Z si A se puede invertir.

$det(A) = 1 \to$ existe A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 34 & 21 \end{pmatrix}$$

Rango de una matriz

24 **Estudia el rango de las matrices siguientes:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \to ran(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 12 & -24 & 36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 12 \cdot (1.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(C) = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 6 \cdot (3.^a) - 9 \cdot (2.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(D) = 2$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to ran(E) = 3$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to ran(F) = 3$$

25 **¿Qué te hace decir eso?** **[La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].**

Estudia el rango de estas matrices y di, en cada caso, el número de columnas que son L.I.:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -1 & 6 & 29 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 11 & 41 \end{pmatrix} \to ran(A) = 3$$

Hay 3 columnas linealmente independientes en A.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to ran(B) = 2$$

Hay 2 columnas linealmente independientes en B.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-3\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \\ (4.^a)-(2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 2$$

Hay dos columnas linealmente independientes en C.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(D) = 4$$

Las cuatro columnas de D son linealmente independientes.

26 **Estudia el rango de cada matriz según el valor de m:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

• $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-2\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & m-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

Si $m \neq -1 \rightarrow ran(A) = 3$

Si $m = -1 \rightarrow ran(A) = 2$

• $B \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -m \\ 4 & 10 & m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \\ (3.^a)-4\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 6 & m^2-4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)+(2.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -m-2 \\ 0 & 0 & m^2-m-6 \end{pmatrix}$

$m^2 - m - 6 = 0 \rightarrow m = 3,\ m = -2$

Si $m \neq 3$ y $m \neq -2 \rightarrow ran(B) = 3$

Si $m = 3$, la matriz transformada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$

Si $m = -2$, la matriz transformada es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(B) = 2$

• $C = \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 2m & m-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a)-2\cdot(1.^a) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m & m+1 \\ 0 & -m-3 \end{pmatrix}$

Si $m = 0$, obtenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

Si $m = -1$, obtenemos $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 2$

Si $m = -3$, obtenemos $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(C) = 1$

En cualquier otro caso, $ran(C) = 2$.

Es decir: si $m = 0$ o $m = -3$, $ran(C) = 1$ y si $m \neq 0$ o $m \neq -3$, $ran(C) = 2$.

- $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m^2+1 \end{pmatrix}$

  La tercera fila nunca es una fila de ceros.

  Si $m \neq 0 \to ran(D) = 3$

  Si $m = 0 \to ran(D) = 2$

- $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2m-1 & -2m+1 \end{pmatrix}$

  Si $m \neq \dfrac{1}{2} \to ran(E) = 2$

  Si $m = \dfrac{1}{2} \to ran(E) = 1$

- $F = \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1/m) \cdot (2.^a) \end{matrix}$

  Si $m \neq 0 \to \begin{pmatrix} m-2 & 0 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 0 & m-\dfrac{1}{m} \end{pmatrix}$

  Miramos las filas.

  Si $m = 2 \to ran(F) = 2$

  $m - \dfrac{1}{m} = 0 \to m = -1,\ m = 1$

  Si $m = 1 \to ran(F) = 2$

  Si $m = -1 \to ran(F) = 2$

  Si $m = 0$, obtenemos $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to ran(F) = 3$

  Si $m \neq 2,\ m \neq 1$ y $m \neq -1 \to ran(F) = 3$

Página 71

Para resolver

27 Calcula A^n y B^n siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

28 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^3, …, A^{128}.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{42 \cdot 3 + 2} = (A^3)^{42} \cdot A^2 = I^{42} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

29 Determina, si es posible, un valor de k para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

$$(A - kI)^2 = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2-1 & 2k-2 & 4k-4 \\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4 \\ 2-2k & 2-2k & k^2-6k+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to k = 1$$

30 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix} \to ran(M) = 3 \text{ para cualquier valor de } k$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \text{ si } k = -\frac{1}{2}$$

- Si $k = -\frac{1}{2} \to ran(N) = 2$
- Si $k \neq -\frac{1}{2} \to ran(N) = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (3.^a) : 4 \\ (2.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = -2 \to ran(P) = 1$
- Si $k \neq -2 \to ran(P) = 2$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

- Si $k = 2 \to ran(Q) = 2$
- Si $k \neq 2 \to ran(Q) = 3$

31 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, halla la matriz X tal que $XA + A^t = 2I$.**

$XA + A^t = 2I \to XA = 2I - A^t \to X = (2I - A^t)A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

32 **Dadas las matrices** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ **y** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**:**

a) ¿Para qué valores de m **existe** B^{-1}**? Para** $m = 1$**, calcula** B^{-1}**.**

b) Para $m = 1$ **halla la matriz** X **tal que** $X \cdot B + C = D$**.**

a) Calculamos la inversa de B:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos conseguir I a la izquierda solo si $m \neq 0$, luego existe B^{-1} si $m \neq 0$.

$$\xrightarrow{\begin{subarray}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)/m \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/m & 1/m \end{array}\right)$$

Calculamos B^{-1} para $m = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot B + C = D \to X \cdot B = D - C \to X = (D - C)\,B^{-1}$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

33 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ **e** I **(matriz unidad de orden 3):**

a) Calcula las matrices $(A - I)^2$ **y** $A(A - I)$**.**

b) Prueba que $A - I$ **no es invertible.**

a) $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Llamamos $B = A - I$.

$B^2 = \mathbf{0}$

Si B fuera invertible, $B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \cdot B^{-1} = \mathbf{0}$

Además, cualquier matriz cumple que $B^2 \cdot B^{-1} = B \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot I = B$

Tendríamos entonces que $\left.\begin{array}{l} B^2 \cdot B^{-1} = \mathbf{0} \\ B^2 \cdot B^{-1} = B \end{array}\right\} \to B = \mathbf{0}$, lo cual es falso.

Por tanto, $B = A - I$ no es invertible.

34 **Calcula una matriz X que conmute con la matriz A, esto es, $A \cdot X = X \cdot A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

Después, calcula $A^2 + 2A^{-1} \cdot X$.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \left.\begin{array}{l} A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ han de ser iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+c=a \\ b+d=a+b \\ d=c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c=0 \\ d=a \\ c=0 \end{array}\right\} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

$$A^2 + 2A^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a & b-a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+2b-2a \\ 0 & 1+2a \end{pmatrix}$$

(Observamos que la matriz que hemos obtenido también es de las que conmutan con A).

35 **Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $BXB = 2BA$.**

$BXB = 2BA \to X = B^{-1}\,(2BA)\,B^{-1} \to X = 2\,(B^{-1}\,BA\,B^{-1}) \to X = 2\,(A\,B^{-1})$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

36 **Sean A y B las matrices dadas por:**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra las condiciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$, debe cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} c=b \\ c=a \\ 7c=7c \\ 7c=7c \end{array}\right\} a=b=c$$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Así, $B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

37 **Recuerda que un matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta.**

Calcula x e y para que esta matriz A sea ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $A^{-1} = A^t$, ha de ser $A \cdot A^t = I$; entonces:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & (3/5)y - (3/5)x & 0 \\ (3/5)y - (3/5)x & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \dfrac{3}{5}y - \dfrac{3}{5}x = 0 \\ y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{16}{25} \\ y = x \\ y^2 = \dfrac{16}{25} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4}{5} \\ y = x \end{array}\right\}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = \dfrac{4}{5}$, $y_1 = \dfrac{4}{5}$; $x_2 = -\dfrac{4}{5}$, $y_2 = -\dfrac{4}{5}$

38 **Escribe las ecuaciones lineales de los siguientes sistemas dados en forma matricial y resuélvelos:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2x + 3x - 2 + z = 0 \\ 3(3x - 2) + 2z = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 5x + z = 2 \\ 9x + 2z = 5 \end{cases}$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$x = -1$, $z = 7$

Por tanto, $y = -3 - 2 = -5$.

Solución: $x = -1$, $y = -5$, $z = 7$.

b) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

Resolvemos primero el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x = -5 + y \\ x = -1 - y \end{cases} \to -5 + y = -1 - y \to y = 2 \to x = -1 - 2 = -3$

Comprobamos si la solución obtenida, $x = -3$, $y = 2$, verifica también la tercera ecuación:

$2(-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$

Por tanto, verifica también la tercera ecuación y $x = -3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

39 Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Halla, si existe, la matriz X tal que $AX + B = A^2$.

$AX + B = A^2 \rightarrow X = A^{-1}\,(A^2 - B)$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

40 Escribe los siguientes sistemas en forma matricial y resuélvelos utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x + 5y = 1/3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = -1 \\ x + y + z = 1 \\ -x \phantom{{}+y} - z = -2 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7/3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

41 Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, halla la matriz X que verifica la relación $\boldsymbol{XC + A = C + A^2}$.

$XC + A = C + A^2 \rightarrow X = (C + A^2 - A)C^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \rightarrow A^2 - A = \mathbf{0}$$

$$X = (C + A^2 - A)C^{-1} = CC^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

42 **Halla la matriz X que verifica $AX + B = 3X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.**

$AX + B = 3X \to AX - 3X = -B \to (A - 3I)X = -B \to X = (A - 3I)^{-1}(-B)$

$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Calculamos $(A - 3I)^{-1}$:

$\left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{3 · (2.ª) + (1.ª)}]{\text{(1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2.ª)}]{\text{10 · (1.ª) – (2.ª)}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -30 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2.ª)/(–10)}]{\text{(1.ª)/(–30)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 1 & -1/10 & -3/10 \end{array}\right) \to (A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix}$

$X = (A - 3I)^{-1}(-B) = \begin{pmatrix} -3/10 & 1/10 \\ -1/10 & -3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 7/5 \end{pmatrix}$

43 **a) Despeja la matriz X en la siguiente igualdad: $AXA + B = B(2A + I)$**

b) Calcula la matriz X en el caso de que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $AXA + B = B(2A + I) \to AXA = B \cdot 2A + B - B = 2BA \to$

$\to AX = 2BAA^{-1} = 2B \to X = A^{-1} \cdot 2B = 2A^{-1}B$

b) Calculamos A^{-1}:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2.ª)}]{\text{(1.ª) + (2.ª)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Página 72

44 **a) Comprueba que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 2A - I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible. ¿Cuál es la expresión de A^{-1}?**

b) Utiliza el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = 2A - I \to A^2 - 2A = -I \to -A^2 + 2A = I \to A(-A + 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y $A^{-1} = -A + 2I$.

b) Comprobamos que $A^2 = 2A - I$:

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

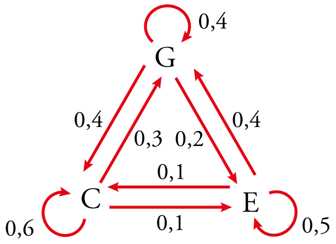
$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Puesto que $A^2 = 2A - I$, por el apartado anterior, A es invertible y su inversa es:

$A^{-1} = -A + 2I = -\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

45 Meta 1.3. **[Tras el visionado del vídeo podemos preguntar al alumnado qué medidas creen que son necesarias para que todas las personas tengan cobertura sanitaria].**

En la Unidad de Cuidados Intensivos, UCI, de un hospital, los pacientes son clasificados según su estado en críticos, graves y estables. Esta situación es revisada cada día por un médico intensivista de acuerdo con la evolución del paciente. La probabilidad de que un paciente pase de un estado a otro viene dada por este grafo:



a) Escribe la matriz de probabilidades.

b) Si un día hay en la UCI 20 enfermos críticos, 35 graves y 30 estables, ¿cuál será la distribución que se espera para el día siguiente?

a) La matriz de probabilidades es $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$.

b) Hacemos el siguiente producto:

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Se espera que para el día siguiente haya 29 críticos, 32 graves y 24 estables.

46 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, **halla una matriz** X **que verifique la ecuación** $XA + A = A^{-1}$.

$XA + A = A^{-1} \rightarrow XA = A^{-1} - A \rightarrow X = (A^{-1} - A)A^{-1} = (A^{-1})^2 - I$

De otra forma:

$(X + I)A = A^{-1} \rightarrow (X + I) = (A^{-1})^2 \rightarrow X = (A^{-1})^2 - I$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X = (A^{-1})^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuestiones teóricas

47 **Sean las matrices, $A_{(3 \times 2)}$; $B_{(2 \times 4)}$; $C_{(4 \times 4)}$; $D_{(2 \times 1)}$.**

a) Justifica cuáles de estos productos se pueden efectuar:

$$AB \qquad AC \qquad BC \qquad CD \qquad AD$$

b) ¿Alguno de ellos es una matriz cuadrada?

a) Dos matrices $A_{(m \times n)}$ y $B_{(p \times q)}$ se pueden multiplicar cuando $n = p$, por tanto se pueden efectuar los siguientes productos:

$AB_{(3 \times 4)}$ $\qquad$ $AD_{(3 \times 1)}$ $\qquad$ $BC_{(2 \times 4)}$

b) Ninguna es cuadrada.

48 **Sean A y B dos matrices cuadradas de igual orden. Si A y B son simétricas, ¿lo es también su producto $A \cdot B$?**

Si la respuesta es afirmativa, justifícala, y si es negativa, pon un contraejemplo.

Si A y B son dos matrices cuadradas de igual tamaño, simétricas, su producto, $A \cdot B$, no tiene por qué ser una matriz simétrica. Por ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es simétrica.

49 **[Escuchando las propuestas de sus compañeros y compañeras para resolver el ejercicio el alumnado puede trabajar la comprensión oral].**

Demuestra que, si A es una matriz cuadrada, siempre se verifica que:

a) $A + A^t$ es simétrica.

b) $A - A^t$ es antisimétrica. (Ten en cuenta que una matriz B es antisimétrica si $B = -B^t$).

a) $(A + A^t)^t = (a_{ij} + a_{ji})^t = (a_{ji} + a_{ij}) = A^t + A = A + A^t$

Por tanto, la matriz es simétrica.

b) $(A - A^t)^t = (a_{ij} - a_{ji})^t = (a_{ji} - a_{ij}) = A^t - A = -(A - A^t)$

Por tanto, la matriz es antisimétrica.

50 **Definimos la *traza* de una matriz cuadrada A de orden 2 como $tr(A) = a_{11} + a_{22}$. Prueba que si A y B son dos matrices cuadradas de orden 2, entonces $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.**

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \to tr(A \cdot B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} \to tr(B \cdot A) = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Por tanto, $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$.

51 **Prueba que si A es idempotente, entonces $I - A$ también lo es. (Una matriz es idempotente si $A^2 = A$).**

$(I - A)^2 = (I - A)(I - A) = I^2 - IA - AI + A^2 = I - 2A + A = I - A$

Por tanto, la matriz $I - A$ es idempotente.

52 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta y pon ejemplos.**

a) Si A es una matriz 2×2 cuyo rango es 2, su rango no varía si le añadimos una fila o una columna.

b) Si $X - AX = B$ entonces $X = (I - A)^{-1}B$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $(A + I)^2 = 6I$.

d) Si $AB = BA$ entonces $(AB)^t = (BA)^t$.

e) Si a una matriz de 3 filas y 3 columnas cuyo rango es 3 le quitamos una fila y una columna, entonces su rango será 2.

f) En una matriz antisimétrica $(A^t = -A)$, los elementos de la diagonal principal son todos 0.

g) El rango de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix}$ es 3 si $k = 0$.

h) Si A es una matriz regular y $(B - C)A = 0$ (matriz nula), podemos asegurar que $B = C$.

a) Verdadero. No varía, puesto que la matriz que obtenemos tiene, como máximo, dos filas o dos columnas, luego su rango no puede ser mayor que dos. Por otra parte, como la nueva matriz contiene a A, el rango tiene que ser ≥ 2, es decir, el rango de la nueva matriz es 2.

b) Verdadero. $X - AX = B \rightarrow (I - A)X = B$. Multiplicando por $(I - A)^{-1}$ a la izquierda, tenemos la expresión final para calcular X.

c) Verdadero. $(A + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I$

d) Verdadero. $AB = BA$. Como las dos matrices, AB y BA, son la misma, su traspuesta también será igual.

e) Falso. Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3. Si quitamos la última fila y la última columna, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene rango 1.

f) Verdadero, porque $a_{ii} = -a_{ii} \rightarrow 2a_{ii} = 0 \rightarrow a_{ii} = 0$.

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & k^2-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) - 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & -5 & -10 & k^2-21 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)\end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & k^2-6 \end{pmatrix}$$

La afirmación es falsa, pues para que $ran(M) = 3$, debe ser $k \neq \pm\sqrt{6}$.

h) Verdadero. Como A es regular, podemos multiplicar por A^{-1} a la derecha:

$(B - C)AA^{-1} = \mathbf{0}A^{-1} \rightarrow B - C = \mathbf{0} \rightarrow B = C$

Para profundizar

53 **Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$.**

$$X^2 = 2X \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = 2\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2a \\ b(a+c) = 2b \\ c^2 = 2c \end{array}\right\}$ En función de las soluciones de este sistema, obtenemos distintas matrices X solución:

$a = 0,\ c = 2 \to X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$

$a = 2,\ c = 0 \to X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

$a = 0,\ c = 0,\ b = 0 \to X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a = 2,\ c = 2,\ b = 0 \to X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

54 **¿Es posible encontrar una matriz A no nula tal que A^2 sea la matriz nula?**

En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

55 **Despeja la matriz X en la igualdad $(X + A)^2 = X^2 + XA + I_2$ y obtén X en el caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.**

$$(X + A)^2 = X^2 + XA + I \to (X + A)(X + A) = X^2 + XA + I \to$$

$$\to X^2 + XA + AX + A^2 = X^2 + XA + I \to$$

$$\to AX + A^2 = I \to AX = I - A^2 \to X = A^{-1}(I - A^2)$$

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)+(1.^a)]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)]{(1.^a)-(2.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(2.^a)/2]{(1.^a)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$X = A^{-1}(I - A^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

56 **Demuestra que si A es una matriz regular, al despejar X en la ecuación $XA^2 + BA = A^2$ se obtiene $X = I - BA^{-1}$.**

$$XA^2 + BA = A^2 \to XA^2 - A^2 = -BA \to (X - I)A^2 = -BA$$

Multiplicamos por A^{-1} a la derecha (A^{-1} existe por ser A regular):

$$(X - I)A = -B \to X - I = -BA^{-1} \to X = -BA^{-1} + I \to X = I - BA^{-1}$$

57 **Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. De la igualdad $A \cdot B = A \cdot C$ no puede deducirse, en general, que $B = C$.**

Prueba esta afirmación buscando dos matrices B y C distintas tales que $A \cdot B = A \cdot C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot C$, pero $B \neq C$.

58 **Demuestra que si A es una matriz cuadrada de orden 2 entonces $(A^t)^2 = (A^2)^t$.**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^2)^t = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Ambas matrices, $(A^2)^t$ y $(A^t)^2$ coinciden.

Página 73

59 **a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, probar que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.**

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$AB + BA = \mathbf{0} \to A^{-1}AB + A^{-1}BA = \mathbf{0} \to B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$

Ahora multiplicamos la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \to BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -6a + 4b - 2c = 0 \\ -2a - 2d = 0 \\ 4a + 4d = 0 \\ 4b - 2c + 6d = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3a - 2b + c = 0 \\ \left.\begin{array}{l} a + d = 0 \\ a + d = 0 \end{array}\right\} d = -a \\ 2b - c + 3d = 0 \to 3a - 2b + c = 0 \to c = -3a + 2b \end{array}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

60 Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$**, determina todas las matrices** V **tales que** $M^2 \cdot V = = M^{-1} \cdot V$**.**

$$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$M^2\ V = M^{-1}\ V \to \begin{cases} -2x + y + z = 4x - 2y + z \\ -4x + y + 4z = 5x - 2y + z \\ -x - y + 4z = 2x - y + z \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x \\ 9x - 3y - 3z = 0 \\ z = x \end{cases}$$

Si sustituimos en la segunda ecuación y, z por sus valores en función de x, obtenemos:

$9x - 6x - 3x = 0 \to 0 = 0$

Por tanto, la solución del sistema es: $x = \mu$, $y = 2\mu$, $z = \mu$

61 Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}$$

a) Determina para qué valores de a **y** b **la matriz** A **es regular.**

b) Halla los valores de a **y** b **para los que se cumple que** $A = A^{-1}$**.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) - (2.^a) \\ (2.^a) : a \\ (3.^a) : b \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/b \end{array}\right)$

Por tanto, la matriz es regular si a y b son diferentes de cero.

b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}$

Por una parte, $a = -1$. Por otra parte, $b = \dfrac{1}{b} \to b = \pm 1$

62 Sea A **una matriz cuadrada que verifica la igualdad** $A^2 - 2A = 3I$**.**

a) Demuestra que A **es invertible y expresa** A^{-1} **en función de** A **e** I**.**

b) Expresa A^3 **como combinación lineal de** A **e** I**.**

c) Halla todas las matrices simétricas de orden 2 que verifican $A^2 - 2A = 3I$**.**

a) $A^2 - 2A = 3I \to A(A - 2I) = 3I \to A \cdot \dfrac{1}{3}(A - 2I) = I$

Por tanto, A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A - 2I)$.

b) $A^2 = 3I + 2A$

$A^3 = (3I + 2A)A = 3A + 2A^2 = 3A + 2(3I + 2A) = 7A + 6I$

c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a + c) \\ b(a + c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-2a+b^2 & b(a+c-2) \\ b(a+c-2) & b^2+c^2-2c \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a^2-2a+b^2=3 \\ b(a+c-2)=0 \\ b^2+c^2-2c=3 \end{cases}$$

- Si $b = 0$, obtenemos $\begin{cases} a^2-2a=3 \\ c^2-2c=3 \end{cases}$ con las soluciones siguientes:

  $a = 3,\ b = 0,\ c = -1 \to A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\quad a = -1,\ b = 0,\ c = -1 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

  $a = 3,\ b = 0,\ c = 3 \to A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad a = -1,\ b = 0,\ c = 3 \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Si $b \neq 0$, obtenemos el sistema $\begin{cases} a^2-2a+b^2=3 \\ b(a+c-2)=0 \\ b^2+c^2-2c=3 \end{cases}$ con las soluciones:

  $a = 2-c,\ b = \sqrt{-(c+1)(c-3)}$; $a = 2-c,\ b = -\sqrt{-(c+1)(c-3)}$

  En estos casos, ha de ser $-1 \le c \le 3$, y las matrices que verifican la condición pedida son:

  $A = \begin{pmatrix} 2-c & \sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ \sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2-c & -\sqrt{-(c+1)(c-3)} \\ -\sqrt{-(c+1)(c-3)} & c \end{pmatrix}$

63 Halla una matriz cuadrada de orden 2, distinta de I y de $-I$, cuya inversa coincida con su traspuesta.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = A^t \to A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \to I = A \cdot A^t$

$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

Buscamos matrices que verifiquen estas condiciones. Por ejemplo:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veamos que $A^{-1} = A^t$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)+(1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a)-(2.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^t$

64 **Estudia para qué valores de x, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.**

$A = \begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \rightarrow -A = \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix}$

Si $-A = A^{-1} \rightarrow A(-A) = I$

$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x & 2 \\ -5 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x^2 & 0 \\ 0 & 10-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 10 - x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 3$

65 **Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} x & 3 \\ x-1 & 3y \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$ determina el valor de x e y para que se verifique $M^2 = N$.**

$M^2 = \begin{pmatrix} x^2 + 3(x-1) & 3x + 9y \\ 3(x-1) + x(x-1) & 3(x-1) + 9y^2) \end{pmatrix}$

Por tanto, se tiene que cumplir:

$x^2 + 3(x-1) = 1 \rightarrow x = 1, x = -4$

$3(x-1) + x(x-1) = 0 \rightarrow x = 1, x = -3$

Por tanto, el único candidato para ser solución que queda es $x = 1$. Veamos qué ocurre con las dos ecuaciones que faltan:

$3 + 9y = -15 \rightarrow y = -2$

Veamos si $y = -2$ verifica la última ecuación:

$3(1-1) + 9(-2)^2 = 36$ y, por tanto, la ecuación se cumple.

Solución: $x = 1$, $y = -2$

AUTOEVALUACIÓN

Página 73

1 **Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix}(1.^a) \to (3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \to (1.^a)\end{smallmatrix}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a)\end{smallmatrix}]{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix}(1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (a+1) \cdot (2.^a)\end{smallmatrix}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Si $a = 3 \to ran(A) = 2$

Si $a \neq 3 \to ran(A) = 3$

2 **Sean las matrices $A_{(3\times3)}$; $C_{(3\times2)}$ y $D_{(2\times2)}$; , ¿qué dimensión debe tener la matriz B para que la ecuación matricial $AB = CD$ tenga sentido?**

$A_{(3\times3)}B_{(m\times n)} = C_{(3\times2)}D_{(2\times2)} = M_{(3\times2)}$

Luego B debe ser una matriz de dimensión 3×2.

3 **Determina a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = A$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \to \begin{pmatrix} 4-a & -2-b \\ 2a+ab & -a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \to \begin{cases} 4-a=2 & \to a=2 \\ -2-b=-1 & \to b=-1 \\ 2a+ab=a & \to 4-2=2 \\ -a+b^2=b & \to -2+1=-1 \end{cases}$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = -1$.

4 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

5 Determina todas las matrices A tales que $AX = XA$, siendo $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = a+c \\ c+d = b+d \end{array}\right\} \rightarrow a = d, \; b = c$$

Son todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

6 Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla dos matrices X e Y tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{X + Y^{-1} = C} \\ \boldsymbol{X - Y^{-1} = C^t} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X + Y^{-1} = C \\ X - Y^{-1} = C^t \end{array}\right.$$

- Sumamos las ecuaciones:

$$2X = C + C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Restamos las ecuaciones:

$$2Y^{-1} = C - C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow Y^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la inversa de $Y^{-1} \rightarrow (Y^{-1})^{-1} = Y$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{a}) + 2 \cdot (2.^{a}) \\ (2.^{a}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{a}) \\ 2 \cdot (2.^{a}) - (1.^{a}) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{a}) + (2.^{a}) \\ (2.^{a}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^{a}) \\ 2 \cdot (2.^{a}) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Luego $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices buscadas son $X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

7 **a) Halla la inversa de la siguiente matriz:** $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

b) Resuelve la ecuación $2XA + B = A^t$**, siendo** $B = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

a) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) - 2 \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $2XA + B = A^t \rightarrow 2XA = A^t - B \rightarrow 2X = (A^t - B)A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(A^t - B)A^{-1}$

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8 **Razona si es posible añadir una fila a esta matriz de forma que la nueva matriz tenga rango 4:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(M) = 2$

Si se añade una fila, puede tener, como máximo, rango 3, luego no es posible que la nueva matriz tenga rango 4.

9 **Una asociación de consumidores quiere comparar los precios, en euros, de cuatro productos básicos en tres supermercados distintos y obtiene estos datos:**

$$\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{S_1} \\ \boldsymbol{S_2} \\ \boldsymbol{S_3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{P_1} & \boldsymbol{P_2} & \boldsymbol{P_3} & \boldsymbol{P_4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1{,}5} & \mathbf{4{,}5} & \mathbf{1{,}8} & \mathbf{3{,}6} \\ \mathbf{1{,}2} & \mathbf{5{,}4} & \mathbf{2{,}2} & \mathbf{3{,}5} \end{pmatrix} \end{array}$$

Para comparar el gasto de una familia según la tienda elegida, consideramos la compra semanal de unidades de cada producto. Las cantidades correspondientes son 2, 1, 3, 4.

Opera con matrices para comparar el gasto semanal de una familia según la tienda elegida.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1{,}5 & 4{,}5 & 1{,}8 & 3{,}6 \\ 1{,}2 & 5{,}4 & 2{,}2 & 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 27{,}3 \\ 28{,}4 \end{pmatrix}$$

El gasto semanal en la tienda S_1 será de 25 €, en S_2 de 27,3 € y en S_3 de 28,4 €.