

1 SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

Página 27

Resuelve

Los fardos de cereal

El problema chino de los fardos de cereal viene acompañado de dos tablas numéricas. La primera describe las ecuaciones que se obtienen del enunciado. Si tenemos en cuenta que los coeficientes de las ecuaciones vienen dados en columnas, el sistema queda así:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases} \quad \text{a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado a la segunda tabla. Observa que este sistema es muy sencillo de resolver: de la 1.ª ecuación obtenemos el valor de } z; \text{ con él y la segunda ecuación, se obtiene } y. \text{ Y finalmente, de la 3.ª se obtiene } x.$$

b) Comprueba que esta solución es válida para el sistema inicial.

a) Teniendo en cuenta que cada ecuación es descrita por una columna:

$$\begin{cases} 36z = 99 \\ 5y + z = 24 \\ 3x + 2y + z = 39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4} \\ 5y + \frac{11}{4} = 24 \rightarrow y = \frac{17}{4} \\ 3x + 2 \cdot \frac{17}{4} + \frac{11}{4} = 39 \rightarrow x = \frac{37}{4} \end{cases}$$

b) Se comprueba sustituyendo cada variable del sistema original por el valor obtenido en el apartado anterior.

1 ▶ SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Página 29

1 ¿Verdadero o falso?

- a) En un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (x, y) la ecuación $x + y = 4$ tiene, entre otras, la solución $(3, 1)$.
- b) En un sistema con tres incógnitas (x, y, z) la ecuación $x + y = 4$ no tiene sentido.
- c) En un sistema con tres incógnitas (x, y, z) la ecuación $x + y = 4$ sí tiene sentido. Representa un plano. Algunas soluciones tuyas son $(3, 1, 0)$, $(3, 1, 7)$, $(3, 1, -4)$.
- d) Si estamos en el plano (dos incógnitas, x, y) la ecuación $y = 0$ representa al eje X .
- e) Si estamos en el espacio (tres incógnitas, x, y, z) la ecuación $y = 0$ representa al plano XZ .
- a) Verdadero, porque $3 + 1 = 4$.
- b) Falso. En una ecuación no tienen por qué aparecer todas las incógnitas.
- c) Verdadero. El valor de la tercera coordenada puede ser cualquiera.
- d) Verdadero. En el eje X todos los puntos tienen la segunda coordenada igual a cero.
- e) Verdadero. En el plano XZ todos los puntos tienen la segunda coordenada igual a cero.

2 Comprobamos. [La explicación propuesta por el enunciado es una buena ocasión para el alumnado trabaje esta técnica].

Sin resolverlos, explica por qué son equivalentes los siguientes pares de sistemas:

a)
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$$

- a) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de sumar las dos que teníamos.
- b) Hemos sustituido la primera ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.
- c) En el primer sistema, la tercera ecuación se obtiene sumando las dos primeras. El resto es igual que en b).
- d) Hemos sustituido la segunda ecuación por el resultado de restarle a la segunda ecuación la primera.

2 ► POSIBLES SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Página 31

1 Resuelve e interpreta geoméricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow y = 1 - 2x \\ \rightarrow y = 3 - x \end{array} \left. \begin{array}{l} \rightarrow y = 1 - 2x \\ \rightarrow y = 3 - x \end{array} \right\} 1 - 2x = 3 - x \rightarrow x = -2, y = 3 - (-2) = 5$$

Veamos si cumple la 2.^a ecuación: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$

Solución: $x = -2, y = 5$. Son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, 5)$.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \text{ La 3.ª ecuación se obtiene sumando las dos primeras; podemos prescindir de ella.}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$$

Solución: $x = 5 - 2\lambda, y = 1 + \lambda, z = \lambda$. Son tres planos que se cortan en una recta.

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} \text{ Las dos primeras ecuaciones son contradictorias.}$$

El sistema es incompatible. Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$$

Solución: $x = 3, y = 2, z = 1$. Son tres planos que se cortan en el punto $(3, 2, 1)$.

2 a) Resuelve este sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Añade una tercera ecuación de modo que siga siendo compatible.

c) Añade una tercera ecuación de modo que el sistema sea incompatible.

d) Interpreta geoméricamente lo que has hecho en cada caso.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array} \left. \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \\ x = 4 + y \end{array} \right\} 3 - 2y = 4 + y \rightarrow -1 = 3y \rightarrow y = \frac{-1}{3}$$

$$x = 4 + y = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{11}{3}, y = \frac{-1}{3}$$

b) Por ejemplo: $2x + y = 7$ (suma de las dos anteriores)

c) Por ejemplo: $2x + y = 9$

d) En a) \rightarrow Son dos rectas que se cortan en $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En b) \rightarrow La nueva recta también pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

En c) \rightarrow La nueva recta no pasa por $\left(\frac{11}{3}, \frac{-1}{3}\right)$. No existe ningún punto común a las tres rectas. Se cortan dos a dos.

3 ▶ SISTEMAS ESCALONADOS

Página 32

1 Reconoce como escalonados los siguientes sistemas y resuélvelos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \right\} \begin{matrix} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{x-5}{2} = \frac{-4}{3} \end{matrix} \left. \right\} \text{Solución: } x = \frac{7}{3}, y = \frac{-4}{3}$$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases} \right\} \begin{matrix} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \end{matrix} \left. \right\} \begin{matrix} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{matrix}$$

Solución: $x = 3, y = -29, z = 11$

$$\text{c) } \left. \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{cases} \right\} \begin{matrix} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{matrix}$$

Soluciones: $x = 3 + \lambda, y = -29 - 19\lambda, z = 11 + 6\lambda, t = \lambda$

$$\text{d) } \left. \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{cases} \right\} \begin{matrix} x = 1 \\ z = \frac{-2x}{3} = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{7 - x + z}{3} = \frac{16}{9} \end{matrix}$$

Solución: $x = 1, y = \frac{16}{9}, z = \frac{-2}{3}$

2 ¿Son escalonados estos sistemas? Resuélvelos:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\text{a) } \left. \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \right\} \begin{matrix} y = \frac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{matrix}$$

Solución: $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = 0$

$$\text{b) } \left. \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{cases} \right\} \begin{matrix} x = 2 + \frac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \frac{3z}{2} \end{matrix}$$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, y = 5 - 3\lambda, z = 2\lambda$

$$\text{c) } \left. \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \right\} \left. \begin{cases} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y \end{cases} \right\} \begin{matrix} x = 2 + y \\ z = 3 - y - 2 - y = 1 - 2y \end{matrix}$$

Soluciones: $x = 2 + \lambda, y = \lambda, z = 1 - 2\lambda$

$$d) \left. \begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2, y = 5, z = 1, t = 2$

Página 33

3 Transforma en escalonados y resuelve.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 11x = 33 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = \frac{21 - 2x}{-3} = -5 \end{array}$$

Solución: $x = 3, y = -5$

$$b) \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1, y = 2, z = -1$

$$c) \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-2) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array} \right\}$$

(Podemos prescindir de la 3.^a, pues es igual que la 2.^a).

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{array}$$

Soluciones: $x = 1, y = 5 - \lambda, z = \lambda$

$$d) \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 7w = -32 \\ x + 2y - z + 3w = 18 \\ x - 3y + z + 2w = -26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 3y - 4z + 3w = 18 \\ -2y - 2z + 2w = -26 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \\ (4.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 2 \\ 15 \cdot (3.^a) + 19 \cdot (4.^a) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y + 3z = 0 \\ y - 14z + 7w = -32 \\ 19z - 9w = 57 \\ 34w = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} w = 0 \\ z = \frac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1, y = 10, z = 3, w = 0$

4 ► MÉTODO DE GAUSS

Página 34

1 ¿Verdadero o falso?

- a) Es posible que un sistema incompatible, al aplicar el método de Gauss, dé lugar a un sistema escalonado compatible. O viceversa.
- b) Al aplicar el método de Gauss, el sistema escalonado al que se llega finalmente es del mismo tipo que el sistema inicial, pues todos los pasos que se dan transforman cada sistema en otro equivalente a él.

- a) Falso. Las soluciones de un sistema no dependen del método empleado para resolverlo.
- b) Verdadero. Las soluciones de un sistema no dependen del método empleado para resolverlo.

Página 36

2 Resuelve estos sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \cdot (-1) \\ (3.^a) \cdot 5 + (2.^a) \cdot 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 3 \\ y = \frac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1, y = -2, z = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 5 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{array}$$

Soluciones: $x = -3 + 2\lambda, y = \lambda, z = -2 + \lambda$

$$d) \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - 3 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} -8y + z = 0 \\ 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

$$e) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a)}} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$

Soluciones: $x = -\lambda, y = -2\lambda, z = \lambda$

$$f) \begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 11 & -4 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -16 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (3.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -18 & 9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3 \cdot (1.^a) - 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (4.^a) \text{ Se elimina}}} \rightarrow \begin{cases} 18y = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0$

3 Resuelve mediante el método de Gauss.

$$a) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x - y + w = -1 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x - y + z + w = -4 \\ 5x - 2y - z + 2w = -3 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases} \begin{cases} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{cases} \begin{cases} x = 2 - 2z + y \\ y = \frac{5 - 3z}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} \end{cases}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Soluciones: $x = \frac{9}{2} - 7\lambda, y = \frac{5}{2} - 3\lambda, z = 2\lambda$

$$b) \left. \begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$$

Solución: $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$

$$c) \left. \begin{array}{l} 2x - y + w = -1 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x - y + z + w = -4 \\ 5x - 2y - z + 2w = -3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (4.^a) \\ (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y + w = -1 \\ x - 2y + z = -3 \\ 4x = -4 \\ x - z = -1 \end{array} \right\}$$

$$x = -1 \quad z = x + 1 = 0 \quad y = \frac{x + z + 3}{2} = 1 \quad w = -1 - 2x + y = 2$$

Solución: $x = -1, y = 1, z = 0, w = 2$

5 ► DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Página 37

1 Discute, en función de k , estos sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array} \right)$$

• Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *incompatible indeterminado*.

$$\text{Soluciones: } x = \frac{3}{4} - \lambda, \quad y = 2\lambda, \quad z = \frac{-5}{4} + \lambda$$

• Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (3-k) \end{array} \right\} x = \frac{3-k}{k-3} = -1; \quad y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

$$\text{Solución: } x = -1, \quad y = 2 + \frac{k}{2}, \quad z = -1 + \frac{k}{2}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array} \right)$$

• Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

• Si $k \neq 3$, es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = k \\ (k-3)x = (2-k) \end{array} \right\} x = \frac{2-k}{k-3}; \quad y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{2-k}{k-3}, \quad y = \frac{k^2+k-8}{2k-6}, \quad z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

2 Discute estos sistemas de ecuaciones en función de k :

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) - (2.^a) \\ (3.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (2.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right)$$

• Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema incompatible.}$$

• Si $k \neq -3$, es compatible determinado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} (k+3)x = 8+2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{8+2k}{k+3}, y = \frac{-k^2 - k + 8}{k+3}, z = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array} \right)$$

• Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema incompatible.}$$

• Si $k \neq -1$, es compatible determinado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ (-1-k)z = k-2 \end{cases}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k \left(\frac{2-k}{1+k} \right) = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{2k - k^2}{1+k} = \frac{1+k - 2k + k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k - 1+k - k^2 - 2+k}{1+k} = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}, y = \frac{1-k+k^2}{1+k}, z = \frac{2-k}{1+k}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 38

1. Método de Gauss

Hazlo tú

- Resuelve e interpreta geoméricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ -y + z = -1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = -2 \\ -x + 11y = 23 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Soluciones: $(-1, 1 + \lambda, \lambda)$

El sistema representa tres planos que se cortan en una recta.

- b) Como solo hay dos variables, x e y , cada ecuación es una recta del plano.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & 23 \\ 2 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 4 \cdot (2.^a) \\ (4.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{array} \right)$$

La cuarta ecuación no se puede cumplir nunca. El sistema es incompatible, no tiene solución.

Las tres primeras rectas se cortan en un punto y la cuarta es paralela a la primera.

Página 39

2. Aplicación del método de Gauss a la discusión de sistemas de ecuaciones lineales

Hazlo tú

- Discute y resuelve, en función del parámetro, aplicando el método de Gauss. Da las interpretaciones geométricas.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + mz = 7 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - my = m \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \\
 \\
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Si $m = 4$, se suprime la última fila. El sistema es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 - 2z \\ y = 2 - z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 - (2 - z) - 2z = 1 - z \\ y = 2 - z \end{array}$$

Soluciones: $(1 - \lambda, 2 - \lambda, \lambda)$. Son tres planos que se cortan en una recta.

Si $m \neq 4$, el sistema es compatible determinado.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ y + z = 2 \\ (m - 4)z = 0 \end{array} \right\}$$

Solución: $(1, 2, 0)$. Los tres planos se cortan en un punto.

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array} \right)$$

• Si $a \neq 2$, el sistema es *compatible determinado*.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\} \text{Solución: } x = 3, y = -\frac{3a-4}{a-2}, z = \frac{2}{a-2}$$

Los tres planos se cortan en un punto.

• Si $a = 2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

El sistema es *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos.

$$\text{c) } \left(\begin{array}{c|c} 1 & m \\ 1 & -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) - m \cdot (2.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 1+m^2 \\ 1 & -m \end{array} \middle| \begin{array}{c} 1-m^2 \\ m \end{array} \right)$$

$1 + m^2 = 0$ no tiene solución, por tanto, el sistema es compatible determinado:

$$\text{Solución: } x = \frac{2m^2}{m^2+1}, y = \frac{1-m^2}{m^2+1}$$

3. Sistemas con más incógnitas que ecuaciones

Hazlo tú

- Resuelve e interpreta geoméricamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$$

- a) Pasamos z al segundo miembro y hacemos $z = \lambda$ (parámetro). Así el sistema tendrá tantas ecuaciones como incógnitas.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $(2, \lambda, \lambda)$. Son dos planos que se cortan en una recta.

- b) Observamos que los coeficientes de las incógnitas en la segunda ecuación son el triple que los de la primera, mientras que los términos independientes no mantienen esa misma relación. Por tanto, el sistema no tiene solución, se trata de dos planos paralelos.

4. Discusión y resolución de un problema

Hazlo tú

- El dinero que tienen entre A, B y C es el 150% del que tienen entre A y B, y es el doble del que tienen entre A y C. Si C tiene el doble que A, ¿podemos saber cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x , y , z al dinero que tienen A, B y C, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{150}{100}(x + y) \\ x + y + z = 2(x + z) \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 15x + 15y \\ x + y + z = 2x + 2z \\ z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5x - 5y + 10z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible indeterminado, luego no podemos saber cuánto dinero tiene cada uno.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

Página 41

1. Sistemas con un parámetro y solución única

- a) Discutir el siguiente sistema según los valores de m :

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = -3 \\ 2x + y + mz = 5 \end{cases}$$

- b) Resolverlo para los valores de m que lo hacen compatible determinado.

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & m & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & m-4 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & m+1 & 8 \end{array} \right)$$

Por tanto, si $m + 1 = 0$, es decir, si $m = -1$, el sistema es incompatible.

Si $m + 1 \neq 0$, es decir, si $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.

b) Tercera ecuación: $z = \frac{8}{m+1}$

Segunda ecuación: $5y - \frac{40}{m+1} = -5 \rightarrow y = \frac{7-m}{m+1}$

Tercera ecuación: $x - \frac{14-2m}{m+1} + \frac{16}{m+1} = 1 \rightarrow x = \frac{-m-1}{m+1} = -1$

2. Sistema con las mismas soluciones que otro compatible indeterminado

- Dado el sistema S :
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 2 \end{cases}$$

calcular el valor de k para que al añadir a S una tercera ecuación de la forma $x + y + kz = 1$ el sistema resultante sea equivalente a S .

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 - x + 2y \\ z = 2x - 3y - 2 \end{cases} \rightarrow 1 - x + 2y = 2x - 3y - 2 \rightarrow x = 1 + \frac{5y}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow z = 1 - 1 - \frac{5y}{3} + 2y \rightarrow z = \frac{y}{3}$$

Solución: $x = 1 + \frac{5\mu}{3}$, $y = \mu$, $z = \frac{\mu}{3}$

Resolvemos ahora por Gauss el sistema que resulta de añadir la tercera ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & k-1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & k+8 & 0 \end{array} \right)$$

Si $k + 8 = 0$, es decir, si $k = -8$, el sistema es compatible indeterminado y tiene las mismas soluciones que S . Comprobemos finalmente que las soluciones de S verifican también la ecuación $x + y + kz = 1$:

$$1 + \frac{5\mu}{3} + \mu - \frac{8\mu}{3} = 1 \rightarrow \frac{3 + 5\mu + 3\mu - 8\mu}{3} = 1 \rightarrow 1 = 1$$

Por tanto, para $k = -8$, las soluciones del sistema son las mismas que las de S .

3. Sistema compatible

- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de a y resolverlo en todos los casos que sea posible:

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+1 & a+1 \end{array} \right)$$

- Si $a = -1$, el sistema es *compatible indeterminado*:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y = 1 - \lambda \\ 3y = 4 - 3\lambda \end{array} \right\} \text{Soluciones: } x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3} - \lambda, z = \lambda$$

- Si $a \neq -1$, el sistema es *compatible determinado*:

$$\left. \begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ 3y + 3z = 4 \\ (a+1)z = (a+1) \end{array} \right\} \text{Solución: } x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 1$$

4. Interpretación geométrica de un sistema

- Estudiar para qué valores de m el siguiente sistema tiene solución, resolverlo cuando tenga solución única e interpretar geoméricamente los resultados obtenidos:

$$\begin{cases} x - my + 1 = 0 \\ -mx + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ -m & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + m \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & -1 \\ 0 & 1 - m^2 & -1 - m \end{array} \right)$$

$$1 - m^2 = 0 \rightarrow m = 1, m = -1$$

- Si $m \neq \pm 1$, el sistema es *compatible determinado*:

$$\left. \begin{array}{l} x - my = -1 \\ (1 - m^2)y = -(1 + m) \end{array} \right\} \text{Solución: } x = -\frac{1}{1 - m}, y = -\frac{1}{1 - m}$$

Para cada valor de m , tenemos dos rectas que se cortan en un punto.

- Si $m = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ 0y = -2 \end{array} \right\} \text{Sistema incompatible.}$$

Se trata de dos rectas paralelas.

- Si $m = -1$, el sistema es *compatible indeterminado*:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -1 \\ 0y = 0 \end{array} \right\} \text{Soluciones: } x = -1 - \lambda, y = \lambda$$

Las rectas son coincidentes.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

Página 42

Para practicar

Resolución e interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales

1 Resuelve e interpreta geoméricamente los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -5 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 0 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = -3 \\ 5x - 10y = 15 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (2/3) \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 5y = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2y = -2 \\ y = -1 \end{array}$$

Solución: $(-2, -1)$

Geoméricamente, son tres rectas que se cortan en el punto $(-2, -1)$.

b) Si dividimos la 3.^a ecuación entre 2, obtenemos: $x + 2y = 0$. La 1.^a ecuación es $x + 2y = 5$. Son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

La 1.^a y la 3.^a ecuación representan dos rectas paralelas; la 2.^a las corta.

$$\text{c) } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \cdot (2.^a) - (1.^a) \\ (2.^a) \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 26 \end{array} \right)$$

El sistema no tiene solución. Se trata de tres rectas que no tienen ningún punto en común.

$$\text{d) } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & -3 \\ 5 & -10 & 15 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Solución: $x = 2\mu + 3, y = \mu$

Geoméricamente, las tres ecuaciones corresponden a la misma recta.

2 Resuelve e interpreta geoméricamente.

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

a) La primera y tercera ecuaciones son incompatibles. El sistema no tiene solución. Se trata de tres rectas que no tienen ningún punto en común.

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -9 & 13 & 13 \end{array} \right)$$

De la 2.^a ecuación, obtenemos $y = -1$; de la 3.^a ecuación, obtenemos $y = \frac{-13}{9}$.

Luego el sistema es *incompatible*.

El sistema representa tres rectas que se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a las tres.

$$c) \left. \begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x - y + z = 3 \\ 2x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - z = 5 \\ -y + z = 3 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

La 2.^a ecuación contradice la opuesta de la 1.^a. No tiene solución.

Geoméricamente, se trata de tres planos que se cortan dos a dos.

d) La 1.^a y la 2.^a ecuación son contradictorias. No tiene solución.

Geoméricamente, se trata de dos planos paralelos que son cortados por un tercero.

3 Razona si los siguientes sistemas tienen solución e interprétalos geoméricamente. Resuélvelos en el caso que sea posible.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array} \right.$$

$$a) \left. \begin{array}{l} x = -2y + z + 3 \\ x = y - z + 2 \end{array} \right\} \rightarrow -2y + z + 3 = y - z + 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Son dos planos que se cortan en una recta.

Solución: $x = \mu$, $y = 5 - 2\mu$, $z = 7 - 3\mu$

$$b) \left. \begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{array} \right\} \text{ Si multiplicamos por } -\frac{2}{3} \text{ la 1.}^a \text{ ecuación, obtenemos:}$$

$$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2, \text{ que contradice la 2.}^a \text{ ecuación.}$$

El sistema es *incompatible*. Son dos planos paralelos.

4 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array} \right. \quad b) \left\{ \begin{array}{l} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{array} \right. \quad d) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{array} \right.$$

$$a) \left. \begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 23y = -69 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = -3 \\ x = \frac{7+y}{2} = 2 \end{array} \right\}$$

Solución: $(2, -3)$

$$b) \begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \quad z = \frac{2}{9} \quad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \quad x = \frac{3 + y - z}{3} = \frac{2}{3}$$

Solución: $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9}\right)$

$$c) \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 \\ x = 2 - z + y = 7 - z \end{cases}$$

Soluciones: $(7 - \lambda, 5, \lambda)$

$$d) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 4 - z \\ y = 2 - z \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 - z \\ x = \frac{4 - z - y}{2} = \frac{4 - z - 2 + z}{2} = 1 \end{cases}$$

Soluciones: $(1, 2 - \lambda, \lambda)$

5 Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$a) \begin{cases} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} -2x = 0 \\ x + y - z = 9 \\ x - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = x - 2 = -2 \\ y = 9 + z - x = 7 \end{cases}$$

Solución: $(0, 7, -2)$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ z = -2x + 3y = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Solución: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$


$$c) \begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ y + z - t = 3 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 4 - t \\ y + z = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$z = 1 - 2t \quad y = 3 + t - z = 2 + 3t \quad x = 4 - t + z - y = 3 - 6t$$

Soluciones: $(3 - 6\lambda, 2 + 3\lambda, 1 - 2\lambda, \lambda)$

$$d) \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{cases}$$

Soluciones: $(-5 + 3\lambda, 4 - \lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$

6  **Cabezas pensantes.** [Antes de resolver los sistemas, el alumnado podrá compartir en pequeños grupos el método que hay que seguir en cada caso].

Escribe un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas que no tenga solución e interprétalo geoméricamente.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Son tres rectas que no coinciden en ningún punto.

Método de Gauss

7 Resuelve aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -2 - z = -2 \\ x = 1 - y = 3 \end{cases}$$

Solución: (3, -2, 0)

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{z}{2} \\ x = -y - z = -\frac{z}{2} \end{cases}$$

Soluciones: $\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}, \lambda\right)$

c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases}$$

$y = 4z + 2$

$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$

$z = \lambda$

Soluciones: $(-1 - 3\lambda, 2 + 4\lambda, \lambda)$

$$\begin{aligned}
 & \text{d) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} (3.^\text{a}) & \\ (2.^\text{a}) : 2 & \\ (1.^\text{a}) & \end{array} \right. \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & | & 3 \\ 6 & -6 & 2 & | & -16 \\ 1 & -1 & 2 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -6 \\ 3 & -3 & 1 & | & -8 \\ 3 & 4 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) - 3 \cdot (1.^\text{a}) & & & & \\ (3.^\text{a}) - 3 \cdot (1.^\text{a}) & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -6 \\ 0 & 0 & -5 & | & 10 \\ 0 & 7 & -7 & | & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) : (-5) & & & & \\ (3.^\text{a}) : 7 & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Solución: $(-1, 1, -2)$

8 Resuelve aplicando el método de Gauss.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} (1.^\text{a}) & \\ (2.^\text{a}) + 2 \cdot (3.^\text{a}) & \\ (3.^\text{a}) & \end{array} \right. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & | & 16 \\ 1 & 3 & -2 & | & -2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & | & 16 \\ 3 & 3 & 0 & | & 6 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) : 3 & & & & \\ (3.^\text{a}) & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & | & 16 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) - 5 \cdot (2.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) & & & & \\ (3.^\text{a}) & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & | & 6 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Solución: $(-2, 4, 6)$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} (3.^\text{a}) & \\ (2.^\text{a}) & \\ (1.^\text{a}) & \end{array} \right. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 1 \\ 5 & 3 & 3 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 5 & 3 & 3 & | & 3 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) - 5 \cdot (1.^\text{a}) & & & & \\ (3.^\text{a}) - 3 \cdot (1.^\text{a}) & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1.^\text{a}) & & & & \\ (2.^\text{a}) & & & & \\ -2 \cdot (3.^\text{a}) + (2.^\text{a}) & & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \\ x = -y - z = \frac{3}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

$$c) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + z = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ -2z = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -2y + 3z = -2 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y = 2 \\ -2y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 1 \\ x = 2 - y = 1 \end{array} \right\}$$

Solución: (1, 1, 0)

$$d) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$$

Observamos que la 3.^a ecuación es la suma de la 1.^a y la 2.^a: podemos prescindir de ella.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} 2x = 3 - y \\ x + z = 1 + y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - y}{2} \\ z = 1 + y - x = 1 + y - \frac{3 - y}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3y}{2} \end{cases}$$

Tomamos $y = 2\lambda$.

$$\text{Solución: } \left(x = \frac{3}{2} - \lambda, y = 2\lambda, z = -\frac{1}{2} + 3\lambda \right)$$

9 Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{cases} \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ z = \frac{19 - 3y}{2} = 8 \\ x = 9 - 2y - z = -1 \end{array} \right\}$$

Solución: (-1, 1, 8)

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{cases} \left. \begin{array}{l} y = \frac{7 - z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14 - 2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{array} \right\}$$

Si tomamos $z = 5\lambda$, las *soluciones* son: $\left(\frac{1}{5} - 3\lambda, \frac{7}{5} - \lambda, 5\lambda\right)$

$$c) \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

$$d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \end{cases} \quad x = \lambda$$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 Estudia y resuelve por el método de Gauss.

$$a) \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Lo resolvemos:

$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \quad x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solución: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$b) \begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{array} \right\} x = 1 + y \quad z = -1 - y \quad y = \lambda$$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, -1 - \lambda)$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \Rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solución: $(1, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left. \begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array} \right) \\ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -4 \cdot (2.^a) + 3 \cdot (3.^a) \end{array} \Rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array} \right\} t = 0 \quad z = 0 \quad x = y \quad y = \lambda$$

Soluciones: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

11 Clasifica los siguientes sistemas en compatibles o incompatibles:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array} \quad \text{Compatible indeterminado}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad \text{Compatible determinado}$$

12 Estudia y resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 6 \cdot (2.^a) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = 7 - 3z = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{cases}$$

El sistema es *compatible determinado*, con solución $(1, -2, 3)$.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{cases}$$

El sistema es *compatible indeterminado*, con soluciones $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$.

Página 43

Discusión de sistemas de ecuaciones

13 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m - 5)z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \\ 2y = m - 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 4 \end{array} \right)$$

- Si $m = 4 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $m \neq 4 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y + 2z = 0 \\ 3y + 7z = m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{array} \right)$$

Sistema *compatible determinado* para todo m .

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = 3 \\ mz = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{array} \right)$$

- Si $m = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $m \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$$d) \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + z = 0 \\ (m-5)z = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{array} \right)$$

- Si $m = 5 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $m \neq 5 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado* con solución $(0, 0, 0)$.

14 Discute los siguientes sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + (y/2) = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1/2 & 0 & -2 \\ 1 & k & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Si $k = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$$

Soluciones: $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

Solución: $(2, 0)$

$$b) \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array} \right)$$

- Si $m = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} y = \frac{-5+3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{array}$$

Tomamos $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

15 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-5) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{array} \right)$$

- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 3 - 2y = 1$$

Solución: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array} \right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

$$\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{cases} \rightarrow y = \frac{-3 - 7z}{3} = -1 - \frac{7z}{3}$$

$$x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \frac{7z}{3} + 2z = 1 - \frac{z}{3}$$

Tomamos $z = 3\lambda$.

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.

16 Discute estos sistemas según los valores de k y resuélvelos cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -k & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k+3 & -7 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2k-16 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & -7 & 0 \end{array} \right) \rightarrow -2k-16=0 \rightarrow k=-8$$

- Si $k \neq -8 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*; como es un sistema homogéneo, solo tiene la *solución trivial*: $(0, 0, 0)$.
- Si $k = -8 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 2.ª ecuación y lo resolvemos en función de $z = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = -z \\ 19y = 7z \end{array} \right\} \text{Soluciones: } \left(\frac{1}{19}\lambda, \frac{7}{19}\lambda, \lambda \right)$$

b) $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{array} \right\}$ Cambiamos el orden de las dos primeras ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & k+2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow k = 0$$

- Si $k \neq 0 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \\ kz = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 0 \\ y = -1 \\ x = 1 \end{array}$$

- Si $k = 0 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación para resolverlo:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 1 \\ 2y + 2z = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 + z \\ y = -1 - z \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, -1 - \lambda, \lambda)$

17 Discute los siguientes sistemas de ecuaciones en función de los valores del parámetro:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right.$ d) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1 - k \\ 0 & 3 & k + 2 & -2k \end{array} \right)$

Sistema *compatible determinado* para todo k .

b) $\left. \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a - 3 & 7 & 0 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) : 2 \\ (3.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 3 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 7 \cdot (2.^a)}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a - 10 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

$$c) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (3.^a) \\ (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Compatible determinado para todo m .

$$d) \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 5 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -2 \cdot (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{array} \right)$$

$$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*.
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

18 Discute y resuelve en función del parámetro:

$$a) \begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right. \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

$$\left. \begin{array}{l} -x - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ (m-1)y = 0 \end{array} \right\} \text{Solución: } (-1, 0, 1)$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left. \begin{array}{l} -x - 3z = -2 \\ -y - 4z = -4 \\ 0y = 0 \end{array} \right\} \text{Soluciones: } (2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \\ 0 & 0 & 2-a & -2 \end{array} \right)$$

- Si $a \neq 2 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y + (a-3)z = 5 \\ (2-a)z = -2 \end{array} \right\} \text{Solución: } \left(3, -\frac{3a-4}{a-2}, \frac{2}{a-2} \right)$$

- Si $a = 2$, la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

El sistema es *incompatible*.

Para resolver

- 19** Clasifica los siguientes sistemas según su número de soluciones para los distintos valores de a y resuélvelos en el caso $a = 2$:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y + z = 3 \\ y - az = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - ay - z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -a & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -a-1 & -3 \end{array} \right)$$

- Si $a = -1$, el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 2$:

Tercera ecuación: $(-2-1)z = -3 \rightarrow z = 1$

Segunda ecuación: $y + 1 = 5 \rightarrow y = 4$

Primera ecuación: $x - 4 = -1 \rightarrow x = 3$

Solución: $x = 3, y = 4, z = 1$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2a+1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 3 \cdot (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2a+1 & -3 & 0 \\ 0 & 4+4a & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Si $a = -1$, el sistema es incompatible.

Si $a \neq -1$, el sistema es compatible determinado.

Si $a = 2$:

Tercera ecuación: $12y = 3 \rightarrow y = \frac{1}{4}$

Segunda ecuación: $-\frac{3}{4} - 3z = 0 \rightarrow z = -\frac{1}{4}$

Tercera ecuación: $2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

Solución: $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{4}$

- 20 a) Determina, según los valores del parámetro a , los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = -a \\ 4x + 10y = a^2 \end{cases}$$

- b) Resuélvelo en los casos que sea compatible determinado.**

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -a & -a \\ 4 & 10 & a^2 & a^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -a-2 & -a-2 \\ 0 & 6 & a^2-4 & a^2-4 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -a-2 & -a-2 \\ 0 & 0 & a^2-a-6 & a^2-a-6 \end{array} \right)$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow a = -2, a = 3$$

Si $a = -2$ o $a = 3$, el sistema es compatible determinado. En caso contrario, es incompatible.

- b) • Si $a = -2$:

$$\text{Segunda ecuación: } -6y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\text{Primera ecuación: } x = 1$$

$$\text{Solución: } x = 1, y = 0$$

- Si $a = 3$:

$$\text{Segunda ecuación: } -6y = -5 \rightarrow y = \frac{5}{6}$$

$$\text{Primera ecuación: } x - \frac{5}{6} = 1 \rightarrow x = \frac{11}{6}$$

$$\text{Solución: } x = \frac{11}{6}, y = \frac{5}{6}$$

- 21 a) Estudia este sistema según los valores de λ :**

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -\lambda \\ 2x + 3y = \lambda \end{cases}$$

- b) Resuélvelo para $\lambda = 3$.**

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3 & -4 & \lambda \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ 3 \cdot (2.^a) - (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3 & -4 & \lambda \end{array} \right)$$

El sistema es compatible para cualquier valor de λ .

- b) Si $\lambda = 3$:

$$\text{Segunda ecuación: } 4z = -12 \rightarrow z = -3$$

$$\text{Tercera ecuación: } 3y + 12 = 3 \rightarrow y = -3$$

$$\text{Primera ecuación: } x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$

22 Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geoméricamente las soluciones obtenidas.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 5 & -5 & 2 & | & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 0 & 5 & -3 & | & m-15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & m-10 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 10 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = 2y - z + 3 = \frac{z+5}{5} \\ y = \frac{3z-5}{5} \end{array} \right.$$

Tomamos $z = 5\lambda$.

Soluciones: $(\lambda + 1, 3\lambda - 1, 5\lambda)$

Son tres planos que se cortan en una recta.

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ el sistema es *incompatible*.

Son tres planos que se cortan dos a dos.

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ m & 1 & m-1 & | & 2 \\ 1 & m & 1 & | & m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - m \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & | & 2-m \\ 0 & m-1 & 0 & | & m-1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1-m & -1 & | & 2-m \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

De la 3.^a ecuación se deduce que $z = -1$. El sistema quedaría así:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (1-m)y = 1-m \end{cases}$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Soluciones: $(2 - \lambda, \lambda, -1)$

Son tres planos que se cortan en una recta.

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ el sistema es *compatible determinado*.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (1-m)y = 1-m \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1-m}{1-m} = 1 \\ x = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$$

Solución: $(1, 1, -1)$

Son tres planos que se cortan en un punto.

23 Discute los siguientes sistemas según los valores de α e interprétalos geoméricamente:

a)
$$\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \cdot \alpha - (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array} \right)$$

- Si $\alpha = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
 Sistema *compatible indeterminado*. Son dos rectas coincidentes.

- Si $\alpha = -1$, queda:


$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$
 Sistema *incompatible*. Son dos rectas paralelas.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son dos rectas secantes.

b)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a)}]{(1.^a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(2.^a) \\ 5 \cdot (3.^a) - (2.^a)}]{(1.^a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array} \right)$$

- Si $\alpha \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.
- Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*. Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

24  ¿Qué te hace decir eso? [La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + az = 0 \end{cases}$$

- a) Deduce para qué valores de a el sistema solo tiene la solución $(0, 0, 0)$.

- b) Resuelve el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + az = 0 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(3.^a) - 5 \cdot (1.^a)}]{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a - 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{(3.^a) - (2.^a)}]{\substack{(1.^a) \\ (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a - 7 & 0 \end{array} \right)$$

- a) Como el sistema es homogéneo, si $a \neq 7$ solo tiene la solución trivial $(0, 0, 0)$.

- b) Si $a = 7 \rightarrow$ el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = -2\lambda \\ x = \lambda \end{array} \right\}$$

Soluciones: $(\lambda, -2\lambda, \lambda)$

25 Un barco transporta 400 vehículos (coches, camiones y motos). Por cada 2 motos hay 5 camiones. Los coches representan las $\frac{9}{7}$ partes de los otros vehículos. ¿Cuántos vehículos de cada tipo transporta el barco?

$$x = \text{n.º de coches}$$

$$y = \text{n.º de camiones}$$

$$z = \text{n.º de motos}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 400 \\ \frac{z}{2} = \frac{y}{5} \\ x = \frac{9}{7}(y + z) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 400 \\ 2y - 5z = 0 \\ 7x - 9y - 9z = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 7 & -9 & -9 & 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) - 7 \cdot (1.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -16 & -16 & -2800 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) + 8 \cdot (2.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 400 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & -2800 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2y - 5z = 0 \\ z = 50 \end{cases}$$

El barco transporta 225 coches, 125 camiones y 50 motos.

Página 44

26 Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay 3 modelos de cajas, (A, B y C) en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es 6 veces el número de cajas del modelo C.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para ese pedido.

b) Analiza la compatibilidad de dicho sistema y resuélvelo.

a) Sean x, y, z el número de cajas de modelo A, B y C, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 10y + 15z = 325 \\ x + y + z = 35 \\ x + y = 6z \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 10y + 15z = 325 \\ x + y + z = 35 \\ x + y - 6z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{l|l} 5 & 10 & 15 & 325 \\ 1 & 1 & 1 & 35 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ 5 \cdot (2.ª) - (1.ª) \\ 5 \cdot (3.ª) - (1.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 5 & 10 & 15 & 325 \\ 0 & -5 & -10 & -150 \\ 0 & -5 & -45 & -325 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) - (1.ª) \end{array} \\ \left(\begin{array}{l|l} 5 & 10 & 15 & 325 \\ 0 & -5 & -10 & -150 \\ 0 & 0 & -35 & -175 \end{array} \right)$$

Por tanto, el sistema es compatible determinado:

$$\text{Tercera ecuación: } -35z = -175 \rightarrow z = 5$$

$$\text{Segunda ecuación: } -5y - 50 = -150 \rightarrow y = 20$$

$$\text{Primera ecuación: } 5x + 200 + 75 = 325 \rightarrow x = 10$$

La empresa empaqueta 10 cajas de 5 unidades, 20 cajas de 10 unidades y 5 cajas de 325 unidades.

27 Un librero vende 84 libros a dos precios distintos: unos a $5m$ euros y otros a $4m$ euros, obteniendo por la venta 3 105 euros.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones donde las incógnitas x e y sean el número de libros vendidos de cada tipo y estudia su compatibilidad.
 b) ¿Es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros, respectivamente?
 c) Resuelve el sistema para $m = 9$. ¿Cuántos libros vendió de cada tipo?

$$a) \begin{cases} x + y = 84 \\ 5mx + 4my = 3105 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 84 \\ 5m & 4m & 3105 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.ª) \\ (2.ª) - 5m \cdot (1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 84 \\ 0 & -m & 3105 - 420m \end{array} \right)$$

- Si $m \neq 0$, el sistema es compatible determinado.
- Si $m = 0$, es incompatible.

b) Suponemos que $m \neq 0$. En este caso:

$$y = \frac{3105 - 420m}{-m}$$

El sistema tiene solución, pero para que el problema tenga una solución válida, necesitamos que y sea un número natural.

Si el precio de los libros fuese 45 y 36, m valdría 9. Si sustituimos este valor de m en la expresión anterior, obtenemos:

$$y = \frac{3105 - 420 \cdot 9}{-9} = 75$$

Buscamos ahora el valor de x :

$$x + 75 = 84 \rightarrow x = 9$$

La solución obtenida es válida, por tanto, es posible que el precio de los libros fuese 45 y 36 euros.

c) Lo hemos resuelto en el apartado anterior, si $m = 9$ el librero vende 9 libros de 45 euros y 75 libros de 36 euros.

28 En un grupo hay 288 personas de entre 18 y 25 años clasificadas como estudiantes, empleados y sin ocupación. Por cada cinco estudiantes hay tres empleados y los que se encuentran sin ocupación representan el 80% del resto.

- a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.
 b) ¿Cuántos estudiantes, empleados y personas sin ocupación hay?
 a) Sean x , y , z el número de estudiantes, de empleados y de personas sin ocupación, respectivamente.

$$\begin{cases} x + y + z = 288 \\ 3x = 5y \\ z = 0,8 \cdot (x + y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 288 \\ 3x - 5y = 0 \\ 0,8x + 0,8y - z = 0 \end{cases}$$

b) La segunda ecuación indica: $x = \frac{5y}{3}$

Sustituimos en las dos ecuaciones restantes:


$$\begin{cases} \frac{5y}{3} + y + z = 288 \\ \frac{4y}{3} + 0,8y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{8y}{3} + z = 288 \\ \frac{32y}{15} - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8/3 & 1 & 288 \\ 32/15 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.ª) \\ (2.ª) + (1.ª)}} \left(\begin{array}{cc|c} 8/3 & 1 & 288 \\ 24/5 & 0 & 288 \end{array} \right)$$

$$\text{Segunda ecuación: } \frac{24y}{5} = 288 \rightarrow y = 60 \rightarrow x = 100$$

Primera ecuación: $\frac{480}{3} + z = 288 \rightarrow z = 128$

Hay 100 estudiantes, 60 empleados y 128 personas sin ocupación.

29  [El uso de los datos que proporciona el enunciado permite trabajar la creación y creatividad (dimensión personal)].

Tenemos unas cuantas monedas de un euro distribuidas en tres pilas. Pasamos doce monedas de la tercera pila a la segunda y, a continuación, pasamos diez de la segunda a la primera. Al final, las tres pilas tienen la misma cantidad de monedas.

a) ¿Podemos determinar cuántas monedas había inicialmente en cada pila con estos datos? Razona la respuesta.

b) Determina cuántas monedas había inicialmente en cada pila si sabemos que en total había 51 monedas.

a) Sean x, y, z el número de monedas que había inicialmente en la primera, segunda y tercera pila, respectivamente.

Cantidad inicial: x, y, z

Cantidad tras pasar 12 de la tercera a la segunda: $x, y + 12, z - 12$

Cantidad tras pasar 10 de la segunda a la primera: $x + 10, y + 2, z - 12$

Por tanto:

$$\begin{cases} x + 10 = y + 2 \\ x + 10 = z - 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado, por tanto, no podemos determinar cuántas monedas había en cada pila.

b) En este caso añadimos una nueva ecuación al sistema:

$$\begin{cases} x - y = -8 \\ x - z = -22 \\ x + y + z = 51 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & -1 & -22 \\ 1 & 1 & 1 & 51 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 59 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 3 & 0 & 45 \end{array} \right)$$

Tercera ecuación: $3y = 45 \rightarrow y = 15$

Segunda ecuación: $15 - z = -14 \rightarrow z = 29$

Primera ecuación: $x - 15 = -8 \rightarrow x = 7$

En la primera pila había inicialmente 7 monedas, en la segunda había 15 y en la tercera había 29 monedas.

30 La suma de las tres cifras de un número es 13. Si se intercambian la cifra de las unidades y la de las centenas, el número aumenta en 495. La cifra de las centenas excede en m unidades a la de las decenas.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones y razona para qué valores de m es compatible determinado.
b) ¿Qué valores puede tomar m para que el problema tenga solución? Calcula la solución para $m = 4$.

Número: $xyz = 100x + 10y + z$

Si intercambiamos unidades y centenas, el número es: $zxy = 100z + 10y + x$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 13 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 495 \\ x = y + m \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y + z = 13 \\ -99x + 99z = 495 \\ x - y = m \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 13 \\ -x + z = 5 \\ x - y = m \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & m \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & -2 & -1 & m - 13 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -3 & m + 23 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 13 \\ y + 2z = 18 \\ -3z = m + 23 \end{cases}$$

El sistema es siempre compatible determinado porque se pueden despejar todas las incógnitas.

La solución sería: $x = \frac{m+8}{3}$, $y = \frac{8-2m}{3}$, $z = \frac{m+23}{3}$

- b) Como las cifras tienen que ser números naturales entre 0 y 9, debe verificarse que $m \leq 4$ para que $y > 0$. Por tanto, los posibles valores de m serán:

$m = 1$, se obtienen números naturales $\rightarrow x = 3, y = 2, z = 8$

$m = 2$ o $m = 3$, no se obtienen números naturales. No sirven.

$m = 4$, se obtienen números naturales $\rightarrow x = 4, y = 0, z = 9$

Si $m = 4$, el número buscado es 409.

31 En una cafetería, la mesa A pide 6 cafés y 3 tostadas por lo que paga 12 €, y la mesa B pide 6 cafés y m tostadas por lo que paga 13,60 €.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones donde las incógnitas x e y sean el precio de un café y el precio de una tostada, respectivamente.
b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la mesa B se hayan pedido 4 tostadas? En caso afirmativo, ¿cuánto cuesta cada café?

$$a) \begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ 6x + my = 13,60 \end{cases}$$

- b) Restamos la primera ecuación de la segunda:

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ (m-3)y = 1,60 \end{cases}$$

Si $m = 3$, el sistema es incompatible. En caso contrario, es compatible determinado.

Si en la mesa B se han pedido 4 tostadas:

$$y = 1,60 \rightarrow 6x + 4,8 = 12 \rightarrow x = 1,2$$

Si se han pedido 4 tostadas en la mesa B, el café cuesta 1,2 euros.

32 Un grupo de amigos y amigas pidieron en un bar 4 refrescos, 3 bocadillos y 5 helados y pagaron 30,60 €. Otro día por 2 refrescos, un bocadillo y 2 helados pagaron 12,30 €.

- a) Hoy han vuelto y han pedido 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 helados. ¿Cuánto tendrán que pagar? Justifica tu respuesta.
- b) Si un refresco, un bocadillo y un helado cuestan 8,20 €, ¿cuál es el precio de cada uno por separado?

a) Podremos saber el precio de 6 refrescos, 5 bocadillos y 8 helados si encontramos una relación numérica con los otros dos pedidos. Para ello, planteamos este sistema:

$$\begin{cases} 6 = 4m + 2n \\ 5 = 3m + n \\ 8 = 5m + 2n \end{cases}$$

Donde m es el número de pedidos como el del primer día y n el número de pedidos como el del segundo día.

Este sistema tiene solución $m = 2$, $n = -1$, por tanto, el tercer pedido vale lo mismo que 2 pedidos como el del primer día menos un pedido como el del segundo día. El precio que buscamos es:

$$2 \cdot 30,6 - 12,30 = 48,90 \text{ euros.}$$

b) Si x , y , z son el precio de los refrescos, bocadillos y helados, respectivamente:

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 30,60 \\ 2x + y + 2z = 12,30 \\ x + y + z = 8,20 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 30,6 \\ 2 & 1 & 2 & 12,3 \\ 1 & 1 & 1 & 8,2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 2 \cdot (2.^a) - (1.^a) \\ 4 \cdot (3.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 30,6 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2,2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 5 & 30,6 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -3,8 \end{array} \right)$$

Tercera ecuación: $-2z = -3,8 \rightarrow z = 1,9$

Segunda ecuación: $-y - 1,9 = -6 \rightarrow y = 4,1$

Primera ecuación: $4x + 12,3 + 9,5 = 30,6 \rightarrow x = 2,2$

Los refrescos valen 2,20 euros, los bocadillos 4,10 euros y los helados 1,90 euros.

33 Las toneladas de combustible consumidas en una fábrica en el turno de mañana son igual a m veces las toneladas consumidas en el turno de tarde.

Además, se sabe que el turno de tarde consume m toneladas menos que el turno de mañana.

a) Plantea y discute el problema en función de m .

b) ¿Es posible que el turno de mañana consuma el doble de combustible que el de tarde?

c) Si se supone que $m = 2$, ¿cuánto consume el turno de tarde?

$x = n.$ º de toneladas de combustible consumidas en el turno de mañana.

$y = n.$ º de toneladas de combustible consumidas en el turno de tarde.

$$\begin{cases} x = my \\ y = x - m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - my = 0 \\ x - y = m \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & -1 & m \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & -1 + m & m \end{array} \right)$$

• Si $m \neq 1$, se pueden despejar todas las incógnitas, luego el problema tiene solución única.

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ (-1 + m)y = m \end{cases} \Rightarrow x = \frac{m^2}{m-1} \quad y = \frac{m}{m-1}$$

Solución: $\left(\frac{m^2}{m-1}, \frac{m}{m-1} \right)$

- Si $m = 1$, la segunda ecuación sería $0y = 1$, que es una expresión imposible, luego el sistema no tiene solución.

b) Sí, porque $x = 2y$ para $m = 2$.

c) Si $m = 2 \rightarrow y = \frac{m}{m-1} = \frac{2}{2-1} = 2$. El turno de tarde consume 2 toneladas de combustible.

34 Un país importa 21 000 vehículos de tres marcas, A, B y C, al precio de 10 000, 15 000 y 20 000 euros. El total de la importación es de 322 millones de euros. Se sabe que hay 21 000 vehículos contando los de la marca B y k veces los de la A.

a) Plantea un sistema con las condiciones del problema en función del número de vehículos de cada marca.

b) Resuelve el sistema en el caso $k = 3$.

c) Comprueba que el sistema no tiene solución en el caso $k = 2$.



a) $x = n.º$ de vehículos de la marca A

$y = n.º$ de vehículos de la marca B

$z = n.º$ de vehículos de la marca C

$$\begin{cases} x + y + z = 21\,000 \\ 10\,000x + 15\,000y + 20\,000z = 322\,000\,000 \\ kx + y = 21\,000 \end{cases}$$

b) Si $k = 3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 21\,000 \\ 2x + 3y + 4z = 64\,400 \\ 3x + y = 21\,000 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 3 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) - 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - 3 \cdot (1.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -2 & -3 & -42\,000 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) + 2 \cdot (2.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,800 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 2\,800 \\ y + 2z = 22\,400 \rightarrow y = 22\,400 - 5\,600 \rightarrow y = 16\,800 \\ x + y + z = 21\,000 \rightarrow x = 21\,000 - 16\,800 - 2\,800 \rightarrow x = 1\,400 \end{cases}$$

Se importaron 1 400 vehículos de la marca A, 16 800 de la marca B y 2 800 de la marca C.

c) Si $k = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 2 & 3 & 4 & 64\,400 \\ 2 & 1 & 0 & 21\,000 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) - 2 \cdot (1.ª) \\ (3.ª) - 2 \cdot (1.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & -1 & -2 & -21\,000 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) + (2.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 22\,400 \\ 0 & 0 & 0 & 1\,400 \end{array} \right)$$

Sistema *incompatible*.

Cuestiones teóricas

35  [Las afirmaciones requieren un análisis que permite trabajar la expresión escrita].

¿Verdadero o falso? Justifica y pon ejemplos.

- a) A un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que es compatible indeterminado, podemos añadirle una ecuación que lo transforme en compatible determinado o en incompatible.
 b) A un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que es compatible determinado podemos añadirle una ecuación que lo transforme en compatible indeterminado.

c) El sistema $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + 4y - 2z = 2a + 1 \end{cases}$ es incompatible cualquiera que sea el valor de a .

d) El sistema $\begin{cases} 3x + 2y = a \\ x - y = b \end{cases}$ es compatible indeterminado para cualesquiera valores de a y b .

e) Un sistema compatible determinado y otro compatible indeterminado pueden ser equivalentes.

a) En ambos casos la afirmación es cierta. Por ejemplo, el sistema formado por las ecuaciones

$$x = 0 \text{ y } z = 0 \text{ es compatible indeterminado.}$$

Si le añadimos la ecuación $y = 0$, el sistema es compatible determinado pues la solución es

$$x = y = z = 0.$$

Si le añadimos la ecuación $z = 1$, el sistema es incompatible.

b) Falso. Al añadir ecuaciones en ningún caso podemos aumentar el número de soluciones.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & 2a+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.\text{ª}) \\ (2.\text{ª}) - 2 \cdot (1.\text{ª})}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Verdadero. La última fila indica que el sistema siempre es *incompatible*.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1.\text{ª}) - 3 \cdot (2.\text{ª}) \\ (2.\text{ª})}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & a - 3b \\ 1 & -1 & b \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 5y = a - 3b \\ x - y = b \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a + 2b}{5} \\ y = \frac{a - 3b}{5} \end{array} \right.$

Falso. En todos los casos el sistema es *compatible determinado*.

e) Falso. Para que dos sistemas de ecuaciones sean equivalentes deben tener las mismas soluciones.

36 Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$ de modo que sea:

- a) incompatible
 b) compatible determinado
 c) compatible indeterminado

Por ejemplo:

- a) $2x - y + 2z = 0$
 b) $x + y + z = 0$
 c) $4x - 2y + 4z = 2$

Para profundizar

37 ¿Para qué valor de a este sistema es incompatible?

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a-1)x = 1 \\ x + 3z = 2 \\ (a-2)z = 0 \end{cases}$$

- ¿Puede ser compatible indeterminado para el valor $a = 2$?
- Resuélvelo si $a = 2$.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, ¿puede ser compatible determinado?

Para estudiar la compatibilidad de este sistema, nos fijamos en la última ecuación. Si $a \neq 2$, entonces $z = 0$. Y, por tanto, de la tercera ecuación se obtiene que $x = 2$. Pero de la segunda ecuación se deduce que $x = \frac{1}{a-1}$. Igualando obtenemos:

$$\frac{1}{a-1} = 2 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

En resumen, si $a \neq 2$ y $a \neq \frac{3}{2}$, el sistema es incompatible. Y si $a \neq 2$ y $a = \frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado.

- Si $a = 2$, la última ecuación no da información, luego se puede suprimir. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x = 1 \\ x + 3z = 2 \end{cases}$$

Es un sistema escalonado, por tanto, *compatible determinado*. No puede ser compatible indeterminado.

- Resolvemos el sistema anterior para $a = 2$:

$$x = 1, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{1}{3}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, como ya hemos visto al principio, es un sistema *compatible determinado* solo en el caso de $a = \frac{3}{2}$.

38 Sea el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

- Justifica que para los valores de los parámetros $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ el sistema es compatible.
- Determina los valores de a , b y c para los que se verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema.
- Justifica si dicha solución es o no es única.

a)
$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$$

Para $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, el sistema queda:

$$\begin{cases} y + z = 6 \\ 3x - 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = -4 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 3$$

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A')$, el sistema es *compatible determinado*.

Solución: $x = 1/3$, $y = 4$, $z = 2$

b) Sustituimos las incógnitas por los datos y resolvemos las ecuaciones. Obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{array} \right\}$$

Las nuevas incógnitas son a , b , c .

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{array} \right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -4 & -6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -78 \rightarrow \text{ran}(A) = 3 \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$$

Solución: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$

c) Como el sistema es compatible determinado, la solución es única.

AUTOEVALUACIÓN

Página 45

1 Resuelve e interpreta geoméricamente estos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{array} \right\} \text{ Sumando la 1.ª fila con 3 veces la 2.ª: } \begin{array}{r} 2x + 6y = 0 \\ 9x - 6y = 33 \\ \hline 11x = 33 \end{array} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = -1$$

Comprobamos en la 3.ª ecuación:

$$-3 + 3(-1) \neq 0$$

El sistema es *incompatible*. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - y = 5 \\ y - z = 3 \end{array} \right\} \text{ Hacemos } y = \lambda: \begin{cases} 2x = 5 + \lambda \rightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

$$\text{Solución: } \left(\frac{5}{2} + \frac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda \right)$$

Representa dos planos que se cortan en una recta.

2 Discute este sistema y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x + my + 3z = 7 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) - (1.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.ª) \\ (2.ª) \\ (3.ª) - 2 \cdot (2.ª) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & m-4 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ (m-4)y = 0 \end{cases}$$

- Si $m \neq 4 \rightarrow$ Sistema *compatible determinado*. Solución: $(1, 0, 2)$
- Si $m = 4 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*. Pasamos z al segundo miembro como parámetro:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } (\lambda - 1, 2 - \lambda, \lambda)$$

3 Un cajero automático tiene 1 330 € en billetes de 10 €, 20 € y de m €. Hay en total 97 billetes y el número de los de 10 € es el doble de los de 20 €.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos billetes hay de cada tipo.

b) Prueba que si $m \in \{5, 50, 100, 200\}$ el sistema es compatible determinado y resuélvelo en el caso $m = 50$.

c) Razona si en el cajero puede haber billetes de 100 €.

a) Sean x, y, z el número de billetes de 10 euros, de 20 euros y de m euros, respectivamente.

$$\begin{cases} 10x + 20y + mz = 1330 \\ x + y + z = 97 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 20y + mz = 1330 \\ x + y + z = 97 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

b) • Si resolvemos este sistema obtenemos:

$$x = \frac{2660 - 194m}{40 - 3m}, \quad y = \frac{1330 - 97m}{40 - 3m}, \quad z = \frac{110}{3m - 40}$$

Por tanto, si $m \in \{5, 50, 100, 200\}$, $40 - 3m \neq 0$ y las soluciones existen. El sistema en este caso es compatible determinado.

• Si $m = 50$: $x = 64$, $y = 32$, $z = 1$

Hay 64 billetes de 10 euros, 32 billetes de 20 euros y 1 billete de 50 euros.

c) Si sustituimos $m = 100$ en la solución del sistema obtenemos $x = \frac{837}{13}$, $y = \frac{837}{26}$, $z = \frac{11}{26}$, solución no válida porque necesitamos valores naturales.

4 Sean las ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que sea compatible determinado.

c) Añade una ecuación para que sea compatible indeterminado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

a) Para que sea *incompatible*, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k, \text{ con } k \neq 5a - 4b$$

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$$3x - 2y + z = 1$$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería *incompatible*.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{cases} \text{ Compatible determinado}$$

c) El sistema será compatible indeterminado si añadimos una ecuación proporcional a una de las existentes. Por ejemplo, añadimos la 2.ª ecuación multiplicada por (-1) :

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ -2x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

5 Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

- a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.
 b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.
 c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- a) Si $a = 2$, la 2.^a ecuación no tiene solución: $0y = 1$. El sistema es *incompatible*.
 b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea *compatible determinado*, porque la 3.^a ecuación se puede suprimir ($0x + 0y + 0z = 0$) y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas.
 c) Si $a = 0$, queda:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{cases} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \rightarrow x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

$$\text{Soluciones: } \left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda \right)$$