BLOQUE I: ÁLGEBRA

AUTOEVALUACIÓN

Página 122

1 Comprueba si los siguientes sistemas son compatibles e interprétalos geométricamente:

a) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ x \quad - 2z = -1 \\ 2y - 7z = 3 \end{cases}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12$

Por tanto, el sistema es compatible determinado. Son tres planos que se cortan en un punto.

b) $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\text{ran}(A) = 2$ porque, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$.

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, por tanto, $\text{ran}(A') = 3$

El sistema es incompatible. Son tres planos que se cortan dos a dos.

2 Resuelve e interpreta geométricamente.

a) $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x \quad + 2z = 4 \end{cases}$

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} (1.^a) \\ 2 \cdot (1.^a + 2.^a) \\ 3 \cdot (1.^a + 2.^a) \end{matrix}$ $\to$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

La segunda y la tercera ecuaciones son equivalentes:

Segunda ecuación: $-y = 4 \to y = -4$

Primera ecuación: $-x - 4 = 1 \to x = -5$

Solución: $x = -5$, $y = -4$

Son tres rectas que se cortan en un punto.

b) Segunda ecuación: $x = 4 - 2z$

Primera ecuación: $2(4 - 2z) + y - z = 3 \to y = 5(z - 1)$

Solución: $x = 4 - 2\lambda$, $y = 5(\lambda - 1)$, $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$

Son dos planos que se cortan en una recta.

3 **Calcula los valores de a y b para los que se verifica la igualdad $M^2 + aM + bI = 0$, siendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, I la matriz identidad y 0 la matriz nula.**

$M^2 = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

$M^2 + aM + bI = \mathbf{0} \;\rightarrow\; = \begin{pmatrix} 14+2a+b & 5+5a \\ 2+2a & 11-a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto: $a = -1$, $b = -12$

4 **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ x & y \end{pmatrix}$, encuentra los valores de x e y para que las matrices conmuten, es decir, que verifiquen que $A \cdot B = B \cdot A$.**

$AB = BA \rightarrow \begin{pmatrix} 3x+1 & 3y+5 \\ x+3 & y+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ x+3y & 3x+y \end{pmatrix}$

Por tanto: $x = 5$, $y = 1$

5 **Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.**

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \;\rightarrow\; ran(M)$ es por lo menos 2.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12$

Por tanto, $ran(M) = 3$ para cualquier valor de m.

6 **Despeja la matriz X en la ecuación $BXB = B(X + A)$.**

$BXB = B(X+A) \rightarrow BXB = BX + BA \rightarrow BXB - BX = BA \rightarrow BX(B-I) = BA \rightarrow X = B^{-1}BA(B-I)^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow X = A(B-I)^{-1}$

7 **Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$.**

a) ¿Para qué valores de a es invertible?

b) Si A es la matriz de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas x, y, z, resuélvelo para $a = 0$.

a) $|A| = -a^3 - a^2 = 0 \;\rightarrow\; a = 0,\ a = -1$

Si $a \neq 0$, $a \neq -1 \;\rightarrow\; A$ es invertible.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 2 \cdot (2.^a)+(3.^a) \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Segunda ecuación: $y = -z$

Primera ecuación: $x - z + 2z = 0 \;\rightarrow\; x = -z$

Solución: $x = -\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$

8 **Sea M una matriz de orden tres cuyas filas son F_1, F_2, F_3 y de la que sabemos que $det(M) = -2$. ¿Cuál será el valor del determinante de la matriz cuyas filas son $F_1 - F_2$, $2F_1$, $F_2 + F_3$? Justifica tu respuesta.**

$M = (F_1 \ \ F_2 \ \ F_3)$, $|M| = -2$

$$\begin{vmatrix} F_1 - F_2 \\ 2F_1 \\ F_2 + F_3 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 2F_1 \\ -F_2 + F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + F_2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4$$

(1) Cambiamos el signo del determinante al permutar la 1.ª y 2.ª filas.

(2) Sacamos como factor común el 2 en la 1.ª fila y el –1 en la 2.ª fila.

(3) El valor del determinante no cambia al sumar la 1.ª fila a la 2.ª, ni al restar la 2.ª fila a la 3.ª.

9 **Discute este sistema según los valores de a, resuélvelo cuando sea posible e interpreta geométricamente cada caso:**

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

Estudiamos el rango de A buscando los valores que hacen $|A| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \ \to \ a = -1$$

- Si $a \neq -1$: $ran(A) = ran(A') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

  Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 2$$

  Solución: (1, 0, 2). Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $a = -1$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ ran(A') = 2$$

  Por tanto, $ran(A) = ran(A') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = -1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \ \to \ x = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2y \ \to \ z = 2 - 2\lambda \end{array}$$

  Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$. Son tres planos que se cortan en una recta.

10 **Dadas:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de $I + B$.

b) Halla las matrices X **e** Y **que verifican:** $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX \qquad\quad = Y \end{cases}$

a) $I + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Podemos buscar su inversa ya que su determinante vale 6, es distinto de cero $\to$

$\to\ (I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$

b) Segunda ecuación: $AX = Y \to X = A^{-1}\,Y$ (sabemos que existe la inversa de A porque su determinante es igual a 2).

Primera ecuación: $A\,A^{-1}\,Y + BY = C \to Y + BY = C \to (I + B)Y = C \to Y = (I + B)^{-1}\,C \to$

$\to\ Y = \begin{pmatrix} 5 & \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Para calcular X, necesitamos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$X = A^{-1}\,Y = \begin{pmatrix} 5/2 & 11/4 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$.

11 **Alba, Blanca y Noa deben repartirse una herencia de forma que Alba reciba la media de lo que reciban las otras dos más 3 000 €; Blanca la media de las otras dos y Noa la media de las otras dos menos 3 000 €.**

a) ¿Cuánto dinero debe recibir Alba más que Blanca?

b) Si la herencia es de 99 000 €, ¿cuánto recibirá cada una?

a) Sean x, y, z las cantidades que deben recibir Alba, Blanca y Noa, respectivamente.

$$\begin{cases} x = \dfrac{y + z}{2} + 3000 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \\ z = \dfrac{x + y}{2} - 3000 \end{cases}$$

Solución: $x = \lambda,\ y = \lambda - 2000,\ z = \lambda - 4000$

Alba debe recibir 2 000 euros más que Blanca.

b) Si añadimos la ecuación $x + y + z = 99\,000$ al sistema del apartado anterior, la solución es:

$x = 35\,000$, $y = 33\,000$, $z = 31\,000$

Alba debe recibir 35 000 euros, Blanca 33 000 euros y Noa, 31 000 euros.

12 **Una empresa tiene tres líneas de autobuses A, B y C. El lunes salieron 5 autobuses de la línea A, 3 de la B y 4 de la C. El martes, 2 de la línea A, 1 de la B y 4 de la C. El miércoles, 1 de la línea A, 3 de la B y 5 de la C.**

a) Representa los datos en forma de matriz y halla la matriz inversa, si es posible.

b) Si D es la matriz del apartado a), resuelve, si es posible, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -33 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 7/33 & 1/11 & -8/33 \\ 2/11 & -7/11 & 4/11 \\ -5/33 & 4/11 & 1/33 \end{pmatrix}$

Hemos podido calcular la inversa de D porque su determinante es igual a 33, distinto de cero, y por lo tanto existe su matriz inversa.

b) $D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -33\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D^{-1}\begin{pmatrix} -33 \\ -33 \\ -33 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

13 **Dado el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:**

$$\begin{cases} x + y \le 20 \\ 3x + 5y \le 70 \\ x \ge 0; \;\; y \ge 0 \end{cases}$$

a) Razona si el punto (4,1; 11,7) pertenece al recinto.

b) Representa dicho recinto y calcula sus vértices.

c) Indica dónde alcanzará la función $F(x, y) = 0{,}6x + y$ sus valores extremos. ¿Cuáles serán dichos valores?

a) Si sustituimos las coordenadas del punto en la segunda inecuación obtenemos:

$3 \cdot 4{,}1 + 5 \cdot 11{,}7 = 70{,}8 > 70$

luego el punto no está en el recinto.

b)

$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 5y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow x = 0, \; y = 14 \rightarrow$

$\rightarrow A(0, 14)$

$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 3x + 5y = 70 \end{array}\right\} \rightarrow x = 15, \; y = 5 \rightarrow$

$\rightarrow B(15, 5)$

$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 20 \end{array}\right\} \rightarrow x = 20, \; y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow C(20, 0)$

c) La función $F(x, y) = 0{,}6x + y$ alcanza el mínimo en $O(0, 0)$.

El mínimo de F en la región es $F(0, 0) = 0$.

Como las rectas $0{,}6x + y = K$ son paralelas a $r: 3x + 5y = 70$, en todos los puntos de la recta r se alcanza el máximo.

El máximo de F en la región es $F(0, 14) = 70$.

14 Un fabricante de juguetes produce dos juegos: *Batallas* y *Dibujos*. Los beneficios unitarios de cada juego y las horas que requieren en cada sección de la fábrica son estos:

	ELABORACIÓN	ENSAMBLAJE	EMBALAJE	BENEFICIOS
BATALLAS	4	1	1	45 €
DIBUJOS	2	2	1	30 €

Si se dispone de 36 horas de elaboración, 16 horas de ensamblaje y 10 de embalaje, ¿cuál es la producción que maximiza el beneficio?

a) Resuélvelo gráficamente.

b) Analiza gráficamente qué ocurre si el beneficio del juego *Batallas* se reduce en 15 €.

a) x = número de unidades de *Batallas*

y = número de unidades de *Dibujos*

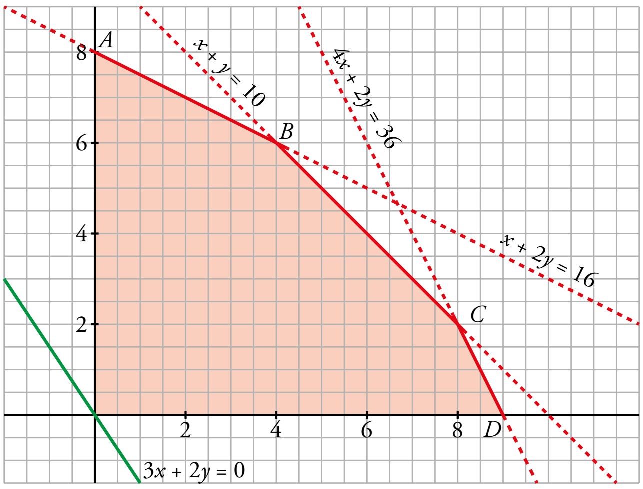
La función beneficio, en euros, que se quiere maximizar es:

$$z = 45x + 30y$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 36 \\ x + 2y \le 16 \\ x + y \le 10 \\ x \ge 0; \;\; y \ge 0 \end{cases}$$

La representación de la región de validez y la función objetivo es:



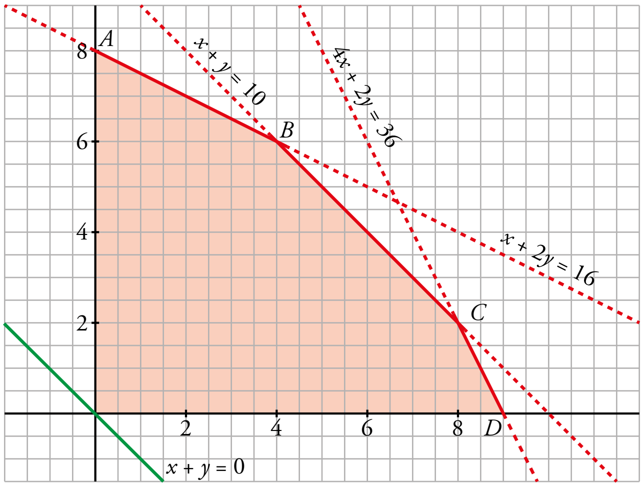
La recta variable $45x + 30y = K$ toma su valor máximo, dentro de los válidos, en el vértice $B(4, 6)$.

Es decir, debe fabricar 4 unidades del juego *Batallas* y 6 unidades del juego *Dibujos* para maximizar el beneficio.

b) En este caso, la función beneficio que se quiere maximizar es:

$$z = 30x + 30y$$

Las rectas $30x + 30y = K$ son paralelas a la recta $x + y = 10$, por tanto, serán soluciones todos los puntos con coordenadas naturales en el segmento BC.



Se obtienen beneficios máximos fabricando:

- 4 unidades del juego *Batallas* y 6 unidades del juego *Dibujos*.
- 5 unidades del juego *Batallas* y 5 unidades del juego *Dibujos*.
- 6 unidades del juego *Batallas* y 4 unidades del juego *Dibujos*.
- 7 unidades del juego *Batallas* y 3 unidades del juego *Dibujos*.
- 8 unidades del juego *Batallas* y 2 unidades del juego *Dibujos*.

15 **Un hipermercado necesita, como mínimo, 6 cajas de manzanas, 8 de peras y 10 de naranjas. Para abastecerse puede acudir a dos proveedores A y B que suministran fruta en contenedores. Cada contenedor de A se compone de 1 caja de manzanas, 2 de peras y 1 de naranjas, y cuesta 60 €, mientras que cada contenedor de B se compone de 1 caja de manzanas, 1 de peras y 5 de naranjas, y cuesta 75 €. Averigua cuántos contenedores debe pedir el hipermercado a cada proveedor para cubrir sus necesidades con el mínimo coste posible, y a cuánto ascendería dicho coste.**

Llamamos *x* a los contenedores de A e *y* a los contenedores de B.

	MANZANAS	PERAS	NARANJAS
A	1	2	1
B	1	1	5
TOTAL	$x + y$	$2x + y$	$x + 5y$

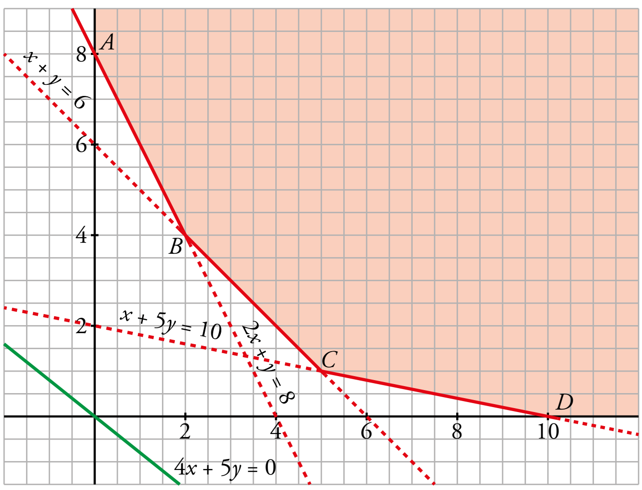
Restricciones:

$$\begin{cases} x + y \ge 6 \\ 2x + y \ge 8 \\ x + 5y \ge 10 \\ x \ge 0; \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

La función objetivo que nos da el coste es:

$$F(x, y) = 60x + 75y$$

La representación de la región de validez y la función de coste se muestra a la derecha:



La recta variable $60x + 75y = K$ toma su valor mínimo, dentro de los válidos, en el vértice $C(6, 1)$. Es decir, se deben comprar, para minimizar los costes globales, 6 contenedores de A y 1 contenedor de B.

El coste mínimo será: $F(6, 1) = 60 \cdot 6 + 75 \cdot 1 = 435$ €