BLOQUE III: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

AUTOEVALUACIÓN

Página 324

1 **Sabiendo que:**

- $P[A] = 0{,}33$
- $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 0{,}41$
- $P[\overline{B}] = 0{,}62$

Calcula:

a) $P[B]$ **b)** $P[A \cup B]$ **c)** $P[A \cap B]$

a) $P[\overline{B}] = 0{,}62 = 1 - P[B] \rightarrow P[B] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

b) $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 0{,}41 = P[(\overline{A \cup B})] = 1 - P[A \cup B] \rightarrow P[A \cup B] = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

c) $P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}33 + 0{,}38 - 0{,}59 = 0{,}12$

2 **De dos tiradores, se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos.**

Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.

b) La probabilidad de que uno de ellos acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno de los dos tiradores acierte.

d) La probabilidad de que alguno de ellos acierte.

Sean los sucesos:

A = «Acierte el primer tirador» $\rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$

B = «Acierte el segundo tirador» $\rightarrow P[B] = \frac{3}{4}$

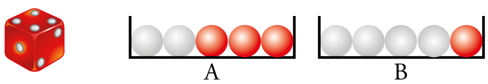
a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, pues los dos sucesos son independientes.

b) $P[A \cap B'] + P[A' \cap B] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P[A' \cap B'] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P[A \cup B] = 1 - P[A' \cap B'] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

3



Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

***P*[●/1]** ***P*[1 y ●]** ***P*[●]** ***P*[○]** ***P*[1/●]**

Explica lo que significa la última probabilidad.

$P[$●$/1] = \frac{1}{5}$

$P[1$ y ●$] = P[$●$/1] \cdot P[1] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

$P[\bullet] = P[1 \text{ y } \bullet] + P[1' \text{ y } \bullet] = P[\bullet/1] \cdot P[1] + P[\bullet/1'] \cdot P[1'] = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{8}{15}$

$P[\circ] = 1 - P[\bullet] = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$

$P[1/\bullet] = \dfrac{P[1 \text{ y } \bullet]}{P[\bullet]} = \dfrac{1/30}{8/15} = \dfrac{1}{16}$

Esta última probabilidad es la probabilidad de que haya salido 1 sabiendo que la bola extraída es roja.

4 **En una clase, el 40 % aprueba filosofía y el 50 % matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0,8.**

a) Prueba que la mitad de los estudiantes de la clase suspende ambas asignaturas.

b) Calcula el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Sean los sucesos F = «aprobar filosofía» y M = «aprobar matemáticas».

$P[\text{F}] = \dfrac{40}{100} = 0,4$

$P[\text{M}] = \dfrac{50}{100} = 0,5$

$P[\text{F/M}] = 0,8$

a) $P[\text{F/M}] = 0,8 = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{M}]} = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{0,5} \rightarrow P[\text{F} \cap \text{M}] = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4$

Los alumnos que suspenden ambas asignaturas constituyen el suceso $\text{F}' \cap \text{M}'$.

$P[\text{F} \cup \text{M}] = P[\text{F}] + P[\text{M}] - P[\text{F} \cap \text{M}] = 0,4 + 0,5 - 0,4 = 0,5$

$P[\text{F}' \cap \text{M}'] = P[(\text{F} \cup \text{M})'] = 1 - P[\text{F} \cup \text{M}] = 1 - 0,5 = 0,5$

b) Nos piden:

$P[\text{M/F}] = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{F}]} = \dfrac{0,4}{0,4} = 1$

Es decir, el 100 % de los alumnos que aprueban filosofía también han aprobado matemáticas.

5 **En cierta cadena de centros comerciales, el número de trabajadores por departamentos es el siguiente:**

- **150 personas en el departamento de personal.**
- **450 personas en el departamento de ventas.**
- **200 personas en el departamento de contabilidad.**
- **100 personas en el departamento de atención al cliente.**

Con el objetivo de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores:

a) ¿Qué tipo de muestreo deberíamos utilizar para la selección de la muestra si queremos que incluya a trabajadores de los cuatro departamentos mencionados?

b) ¿Qué número de trabajadores tendríamos que seleccionar en cada departamento atendiendo a un criterio de proporcionalidad?

a) Deberíamos utilizar un muestreo aleatorio estratificado, ya que la población está formada por cuatro estratos y queremos asegurarnos de que en la muestra haya representantes de cada uno de ellos. Si, además, queremos que el número de individuos elegidos de cada estrato sea proporcional al tamaño de dicho estrato, debemos utilizar el muestreo aleatorio estratificado con reparto proporcional.

b) $N = 150 + 450 + 200 + 100 = 900$

$$\frac{180}{900} = \frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 0,2 \cdot 150 = 30 \\ n_2 = 0,2 \cdot 450 = 90 \\ n_3 = 0,2 \cdot 200 = 40 \\ n_4 = 0,2 \cdot 100 = 20 \end{cases}$$

Hay que coger a 30 trabajadores de personal, a 90 de ventas, a 40 de contabilidad y a 20 de atención al cliente.

6 **El peso de los habitantes de una ciudad tiene una media de 67 kg y una desviación típica de 5 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que la media del peso de 100 personas supere los 68,5 kg?**

$$P[68,5 < \bar{x}] = P\left[\frac{68,5-67}{5/\sqrt{100}} < z\right] = P[3 < z] = 1 - P[z < 3] = 1 - 0,9987 = 0,0013$$

La probabilidad es del 0,1 %.

7 **El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y σ = 2,5 min. Se hace un estudio de los tiempos de atención (en minutos) de diez pacientes elegidos al azar:**

5, 6, 8, 8, 10

8, 9, 7, 10, 15

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente con un nivel de confianza del 95 %.

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

a) La media muestral es $\bar{x} = 8,6$ minutos.

$z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza es: $\left(8,6 - 1,96 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}};\ 8,6 + 1,96 \cdot \frac{2,5}{\sqrt{10}}\right) = (7,05;\ 10,15)$

b) $E = 1,96\frac{2,5}{\sqrt{n}} = 1 \rightarrow n = 24,01$

El tamaño mínimo de la muestra deberá ser de 25 individuos.

8 **En una muestra de 36 estudiantes hemos hallado la media de su cociente intelectual, $\bar{x} = 108$, y la desviación típica, $s = 9,8$.**

Con estos resultados se ha hecho la siguiente estimación: el cociente intelectual de la población a la que pertenecen es mayor que 105 y menor que 111.

¿Con qué nivel de confianza podemos efectuar esta afirmación?

El error máximo admisible es $E = 111 - 108 = 3$. Entonces:

$$3 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{9,8}{\sqrt{36}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{3 \cdot 6}{9,8} \approx 1,84$$

Por tanto:

$$\frac{\alpha}{2} = P[z > 1,84] = 1 - P[z \le 1,84] = 1 - 0,9671 = 0,0329 \rightarrow \alpha = 2 \cdot 0,0329 = 0,0658 \rightarrow$$
$$\rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0,0658 = 0,9342$$

La afirmación tiene un nivel de confianza del 93,42 %.

9 **El peso por unidad (en gramos) de un tipo de gamba roja sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ = 5 g.**

a) Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 gambas de ese tipo, y la media de sus pesos ha sido de 70 gramos. Halla el intervalo de confianza al 95 % para hallar μ.

b) Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error máximo admisible sea menor que 3 gramos.

c) Si sabemos que μ = 70 gramos, y se considera el conjunto de los pesos de 12 gambas extraídas de una caja como una muestra aleatoria, calcula la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

a) $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$

El intervalo de confianza es $(70 - 1,96;\ 70 + 1,96) = (68,04;\ 71,96)$

b) $z_{\alpha/2} = 2,576$

$E = 2,576 \dfrac{5}{\sqrt{n}} = 3 \to n = 18,433$

La muestra debe ser de 19 individuos.

c) $855/12 = 71,25$

$$P[\overline{X} \geq 71,25] = P\left[Z \geq \frac{71,25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right] = P[Z \geq 0,87] = 1 - P[Z \leq 0,87] = 1 - 0,8078 = 0,1922$$

La probabilidad es del 19,22 %.

10 **En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas, 350 respondieron que sí y el resto, que no. Con esta información, estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcula, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.**

$p = 350 / 500 = 0,7$

$q = 0,3$

$z_{\alpha/2} = 1,96$

El intervalo de confianza de la proporción con un 95 % de confianza es:

$$\left(0,7 - 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}};\ 0,7 + 1,96\sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{500}}\right) = (0,66;\ 0,74)$$

Con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de aficionados al deporte está entre el 66 % y el 74 %.

El error máximo es $1,96\sqrt{\dfrac{0,7 \cdot 0,3}{500}} = 0,04$, es decir, es del 4 %.