1. Calcule las siguientes derivadas:

   a) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{7x}$

   b) $g(x) = 3^x \cdot lnx$

   c) $h(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^5 - 6x)^6$

   d) $i(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$

2. Determine los valores a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \leq 0 \\ ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}$ sea derivable en el punto x=0.

3. Un estudio realizado por una empresa de producción de películas de acción prueba que el coste anual (en millones de euros) de contratación de los actores secundarios que utiliza en sus películas sigue la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 60x + 800}{100x}$, donde $x > 0$ es el número de actores secundarios contratados. Calcula el número de actores secundarios contratados que hace mínimo el coste de contratación. ¿A qué cantidad asciende ese coste mínimo?

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3^x & si \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & si \quad x > 1 \end{cases}$

   a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.

   b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x= 3.

5. Sea la función $f(x) = x^3 - 1$.

   a) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.

   b) Determine su curvatura y punto de inflexión.

   c) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

6. Un agricultor dispone de 3000 euros para cercar un terreno rectangular, usando el río adyacente como lado con el fin de que el recinto sólo necesite 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los lados restantes es de 3 euros por metro instalado. Calcula las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar con el presupuesto que tiene.

7. Una persona amante de las matemáticas desea donar sus 3600 libros a dos bibliotecas A y B. En las instrucciones de donación, deja fijado que los lotes de libros se hagan de modo que el producto del número de libros destinados a la biblioteca A por el cubo del número de libros destinados a la biblioteca B sea máximo. Determina la cantidad de libros recibida por cada biblioteca.

8. La evalución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función: $f(x) = 35,7 \cdot \dfrac{x+2}{x^2+21}, x\epsilon[0,8]$,
donde x representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

   a) Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

   b) Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.

   c) Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura (x=0) y las vendió justo al cierre (x=8). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

9. En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión: $B(x) = 0,5x^2 - 4x + 6$, siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0, 10]$.

   a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

   b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

   c) ¿Cuál es el beneficio si no invierte nada en publicidad?¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

10. Sea la función $f(x) = (x^2 + x)^2$. Se pide:

   a) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

   b) Las ecuaciones de sus asíntotas, si las hay.

   c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   d) Los máximos y mínimos locales.

   e) La representación de la gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

11. Sea la función $f(x) = \dfrac{-x^2+4x-4}{x^2-4x+3}$. Se pide:

   a) Su dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

   b) Las ecuaciones de sus asíntotas, si las hay.

   c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   d) Los máximos y mínimos locales.

   e) La representación de la gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

12. JUNIO 2018 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x + 3}$. Se pide:

    a) Dominio de f.
    b) ¿Para qué valores de x la función es positiva?
    c) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
    d) Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

13. SEPTIEMBRE 2018 Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x) = \frac{1}{200}(-x^2 + 100x + 7500)$$

donde $x\epsilon[0, 120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

    a) Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.
    b) ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa?¿Cuáles fueron dichas cuotas?

14. Se considera la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + x + d$. Calcula razonadamente los valores de b y d para que la función f(x) tenga un máximo relativo en el punto (1, 4).

15. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto A(2,1) y que pasa por el punto B(5, -2).

16. El beneficio B (en miles de euros) para una compañía que gasta una cantidad x (en miles de euros) en publicidad se estima por $B(x) = -0,1x^3 + 6x^2 + 400$, $0 \leq x \leq 60$.

    a) Calcula la cantidad de dinero que la compañía debe gastar en publicidad para que se produzca un beneficio máximo y calcula dicho beneficio. ¿Qué cantidad de dinero en publicidad le produce un beneficio mínimo?
    b) Representa la gráfica de la función, utilizando los resultados anteriores y calculando concavidad, convexidad y punto de inflexión.

17. JUNIO 2019 Dada una función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x\epsilon\Re$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en x=-2 con valor f(-2)=-6.

18. SEPTIEMBRE 2019 Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple que x+y=4. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por $B(x) = 10(2x + 1)^2 y$.
    Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

19. JUNIO 2017 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \epsilon \Re$, encontrar, si existen, a y b tal qe f tenga un máximo relativo en x=-1 con valor f(-1)=2.

20. Obtenga los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

21. De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.

22. Sea $f(x) = x^2 - e^{-ax}$ con $a \neq 0$

    a) Calcular el valor de a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2.

    b) Clasificar los extremos relativos cuando a = 2.

23. Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2 y un punto de inflexión en P (1, 2).

24. JUNIO 2016 Dada la función f, definida para $x \geq 0$: $f(x) = \begin{cases} x - 1 & si \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 9 - \frac{25}{x} & si \quad 5 < x \leq 10 \\ 4\sqrt{x+6} - \frac{x}{5} & si \quad x > 10 \end{cases}$

    a) ¿Para qué valores de $x > 0$ es la función f continua?

    b) ¿Cuál es el máximo valor que toma f(x) para $x \epsilon [30, 100]$?

Soluciones:

1. *a*) $f'(x) = e^{7x}(7x^3 + 3x^2 + 7)$

    b) $g'(x) = 3^x(ln3 \cdot lnx + \dfrac{1}{x})$

    c) $h'(x) = (x^5 - 6x)[2x(x^5 - 6x)^5 + (6x^2 + 6)(5x^4 - 6)]$

    d) $i'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2 - 2)^2}$

2. a=2; b=0.

3. Contratando 20 actores secundarios, asciende a un coste mínimo de 1,4 millones de euros.

4. a) Continua pero no derivable en x=1.
   b) y=-1.

5. a) Dom f= $\Re$; Puntos de corte (1,0), (0,-1); Monotonía: Sin extremos relativos, Estrictamente creciente en $\Re \setminus \{0\}$.
   b) Curvatura: Cóncava en $(-\infty, 0)$, convexa $(0, +\infty)$. Punto de inflexión en (0, -1).
   c) Puntos con recta tangente con pendiente igual a 3: (1,0), (-1, -2).

6. Dimensiones que hacen el área máxima son 250m x300m.
7. Donará 900 libros a la biblioteca A y 2700 a la biblioteca B.
8. a) Valor máximo por acción de 5'95 euros y se alcanza a las 3 horas.
   b) Valor mínimo al inicio (0 horas) con 3'57 euros por acción.
   c) Tiene una ganancia de 12'6 euros por las 20 acciones.
9. a) Hubo pérdidas entre 2 y 6 mil euros de inversión.
   b) El máximo beneficio fue de 16 mil euros con 10 mil euros de inversión.
   c) Si no invierte nada en publicidad el beneficio es de 6 mil euros. Si invierte 8 mil euros en publicidad obtiene también 6 mil euros de beneficios.
10. a) Dom f=$\Re$; Puntos de corte: (0,0), (-1,0). b) Asíntotas no hay. c) Monotonía: Estrictamente decreciente: $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0)$; Estrictamente creciente: $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$
    d) Extremos relativos: Mínimos relativos en (-1, 0), (0,0); Máximos relativos: $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$
11. a) Dom f=$\Re \setminus \{1, 3\}$; Puntos de corte: $(2, 0), (0, -\frac{4}{3})$. b) Asíntotas : Verticales x=1, x=3; Horizontales: y=-1. c) Monotonía: Estrictamente decreciente: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$; Estrictamente creciente: $(2, 3) \cup (3, +\infty)$
    d) Extremos relativos: Mínimos relativos en (2,0);
12. a) Dom f=$\Re \setminus \{-\frac{3}{2}\}$
    b) $\forall x \epsilon (-\frac{3}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$
    c) Asíntotas : Vertical $x = -\frac{3}{2}$; Oblicua: $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$
    d) Extremos relativos: máximo relativo en (-4, -5); mínimo relativo en (1, 0)
13. a) No la hay.
    b) Mínima: en el minuto 120 con un $25,5\,\%$, máxima: en el minuto 50 con un $50\,\%$.
    c) $\frac{1315}{3} = 438,3$
14. b=1; d=3
15. a= -1; b=6; c=-7
16. a) 40 mil euros producen un beneficio máximo de 3600000 euros. El mínimo beneficio es de 400000 euros con una inversión de 0 euros o 60 mil euros.
    b) Convexa de 0 a 20 mil euros y cóncava de 20 mil en adelante. Hay un punto de inflexión en (20, 2000) (miles).
17. a=$\frac{3}{4}$, b=3.
18. 2500 euros en M y 1500 euros en N. Beneficio: 540 euros.
19. a= 2 , b= 4
20. Cóncava en $(-\infty, \frac{1}{2})$, convexa en $(\frac{1}{2}, +\infty)$
21. Los catetos miden 5 cm cada uno.El área máxima es de 12,5 cm^2.
22. a) a=1. b) (0, 0) es un mínimo relativo. (1, e^{-2}) es un máximo relativo.
23. a = -7, b = 16, c = - 8
24. a)$(0, +\infty) \setminus \{10\}$ b) En x= 94; 21'2