Apuntes de Estadística.
2º Bachillerato.

Juan M. Hernández Álvarez de Cienfuegos.
I.E.S. Reyes Católicos. Vélez Málaga.

1. Probabilidad

1.1. Introducción.

En los juegos de azar (cartas, dados, ruleta, lotería) los resultados obtenidos no se pueden predecir de antemano, por eso su nombre. Sin embargo algunos resultados de un juego de azar salen más que otros, por lo que podemos decir que algunos resultado son más probables que otros. Hace un par de siglos y simplemente como una necesidad de ganar más dinero en apuestas surgió la necesidad de formular de forma matemática las "posibilidades" de que salga un resultado determinado en un juego de azar. La parte de las matemáticas que estudia lo anterior se llama **Cálculo de Probabilidades.**

Modernamente no sólo puede ser interesante el cálculo de probabilidades para juegos de azar, existen muchas ciencias que lo utilizan para sus estudios. Así por ejemplo:

En medicina puede ser utilizado para estudiar la influencia de determinados agentes en un tipo de enfermedad (ejemplo: tabaquismo en el cáncer), o ver incluso la influencia de un medicamento en la curación de una enfermedad (un retroviral en el sida).

En ciencias sociológicas también tiene bastante importancia. Por ejemplo para ver las intenciones de voto en una celebración electoral, o bien estudiar a partir de una muestra de una población como se puede predecir un determinado carácter en una población entera.

También en estudios militares ha sido importante la estadística. Estudios estadísticos permitieron distribuir objetivos para evitar que fuesen alcanzados en los bombardeos de Londres en la segunda guerra mundial.

Resumiendo: *El Cálculo de Probabilidades* es la parte de la Matemáticas que estudia experimentos y fenómenos impredecibles, o sea, su resultado no es conocido de antemano. De esta forma se determina de manera rigurosa las posibilidades de que un fenómeno impredecible, pueda, o no pueda ocurrir.

Para este estudio, vamos a empezar definiendo una serie de conceptos fundamentales.

1.2. Conceptos fundamentales.

1.2.1. Experimento o fenómeno aleatorio.

Definimos **experimento aleatorio** como aquel del cual no podemos predecir su resultado. Así: lanzar un dado, lanzar una moneda, jugar a la lotería, sacar una bola de una bolsa; son experimentos aleatorios.

Por lo contrario, un **experimento determinista** sería el que sí supiésemos su resultado antes de realizarlo. Por ejemplo: Si un coche recorre una distancia a una velocidad, sabemos el tiempo que tarda en llegar. Si de una bolsa transparente sacamos una bola, sabemos de antemano cual será el resultado.

1.2.2. Suceso elemental.

Un suceso elemental es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio que no puede ser descompuesto en casos más sencillos. Por ejemplo:

Al lanzar un dado, cada uno de los seis posibles resultados es un suceso elemental.
Al lanzar una moneda, la cara, o la cruz.
Al jugar a la lotería, cada uno de los números.
Al sacar una carta de la baraja, cada una de las cartas de la misma.

Una bolsa con bolas de varios colores. Por ejemplo 3 bolas negras, 2 bolas blancas. Si extraemos una bola de la bolsa cada suceso elemental es cada una de las bolas de la bolsa independientemente del color. Serían pues 5 sucesos elementales, que serían:

n1, n2, n3 ,b1, b2, o sea, 5 sucesos elementales.

Si lanzamos dos monedas, serían (C,C),(C,+),(+,C),(+,+), o sea, 4 sucesos elementales.

Al lanzar dos dados, serían todos los pares de números posibles, o sea:

(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6) Son 6 suceso elementales.
(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6) Otros 6.
(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6) Otros 6.
(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6) Otros 6.
(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6) Otros 6.
(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6) Otros 6.

En total 36 sucesos elementales.

1.2.3. Espacio muestral.

Llamamos espacio muestral al **conjunto de todos los sucesos elementales** de un experimento aleatorio. Llamaremos **al espacio muestral con el nombre *E*, y lo haremos siempre así.** Sus elementos o sucesos elementales los escribiremos siempre entre las llaves {}. De esta forma:

Para la moneda el espacio muestral E será: E = {C,+}
Para el dado. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Para la bolsa con 5 bolas blancas y 2 negras. E = {b1, b2, b3, b4, b5, n1, n2} b1= blanca uno, etc.
Para una bolsa con 3 Negras, 2 Blancas, 2 Rojas. E={n1,n2,n3,b1,b2,r1,r2}
Para una lotería de 60000 números E = {1, 2, 3, ... 59999, 60000}
Para dos dados {(1,1), (1,2) .... (6,6)}

Para una bolsa con 2 bolas negras y 2 rojas. Se saca una bola, se mira , y se vuelve a meter en la bolsa, y luego se saca otra bola. O sea, **extracción de dos bolas con reemplazamiento**. El espacio muestral es:

{(n1,n1),(n1,n2),(n1,r1),(n1,r2) 4 sucesos.
(n2,n1),(n2,n2),(n2,r1),(n2,r2) 4 sucesos.
(r1,n1),(r1,n2),(r1,r1),(r1,r2) 4 sucesos.
(r2,n1),(r2,n2),(r2,r1),(r2,r2)} en total 16 sucesos elementales.

Para este mismo ejemplo. Si sacamos una bola la miramos, no la volvemos a meter en la bolsa, y luego sacamos otra bola. O sea, **extracción de dos bolas sin reemplazamiento**. El espacio muestral sería:

{(n1,n2),(n1,r1),(n1,r2) tres sucesos ya que n1 no puede salir dos veces.
(n2,n1),(n2,r1),(n2,r2) tres sucesos.
(r1,n1),(r1,n2),(r1,r2) tres sucesos.
(r2,n1),(r2,n2),(r2,r1)} en total 12 sucesos elementales.

Como vemos al no haber reemplazamiento no pueden salir los casos (n1,n1), (n2,n2), (r1,r1) y (r2,r2). Los 16 sucesos elementales del experimento con reemplazamiento se quedan en 12 cuando no hay reemplazamiento.

Si en la bolsa hay 2 **Negras, 1 Rojas, 1 Blancas.** Sacamos 3 bolas sin **reemplazamiento** entonces:

E ={(n1,n2,r1),(n1,n2,b1),(n1,r1,n2),(n1,r1,b1),(n1,b1,n2),(n1,b1,r1),
(n2,n1,r1),(n2,n1,b1),(n2,r1,n1),(n2,r1,b1),(n2,b1,n1),(n2,b1,r1),
(r1,n1,n2),(r1,n1,b1),(r1,n2,n1),(r1,n2,b1),(r1,b1,n1),(r1,b1,n2),
(b1,n1,n2),(b1,n1,r1),(b1,n2,n1),(b1,n2,r1),(b1,r1,n1),(b1,r1,n2)}

1.2.4. Suceso aleatorio.

Llamamos **suceso aleatorio** a un subconjunto del espacio muestral formado por algunos de los sucesos elementales, veamos varios ejemplos.

Experimento de lanzar un dado. Suceso aleatorio de obtener un numero par, si a este suceso le llamamos A, estaría formado por los sucesos elementales 2, 4, 6 y escribimos A = {2, 4, 6}. Evidentemente A ocurre si ocurre alguno de sus sucesos elementales, o sea, si sale 2, o sale 4 o sale 6.

Experimento de lanzar un dado. Suceso aleatorio B = {obtener un número mayor que 4}. Sería B={5,6}.

Experimento de lanzar dos dados. Suceso aleatorio C = {la suma de ambos sea ocho}. Los sucesos serían estos C = {(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)}.

Una bolsa con 5 bolas blancas y dos negras. Suceso D = {sacar una bola blanca,}. Sería D={b1,b2,b3,b4,b5}.

Se proponen los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Se juega a una lotería con 8 números. Decir cuál es el espacio muestral, cuáles son los sucesos elementales y cuáles los sucesos aleatorios siguientes:

A = {resultado sea par}.
B = {resultado menor o igual a cuatro}.

Solución:
E = {1,2,3,4,5,6,7,8}
A = número par = {2,4,6,8}
B = {1,2,3,4}

Ejercicio 2. En la lotería del ejemplo anterior, se juegan ahora dos papeletas que no se pueden repetir, ¿Cuál sería el espacio muestral?.

La solución de esta segunda parte sería:
{(1,2) (1,3) ... (1,8) 7 casos.
(2,1) (2,3) ....(2,8) 7 casos.
(3,1) (3,2) ... (3,8) 7 casos ....
....
(8,1) (8,2) .... (8,7)} en total 8 líneas de 7 casos cada una son 56 casos elementales.

Se propone pensar el caso de que la papeleta se pueda repetir.

Ejercicio 3. Se tiene una bolsa con 3 bolas blancas y dos negras. Se saca una bola, y sin volverla a meter en la bolsa se saca otra bola. ¿Cuál sería el espacio muestral?.

Solución:

Si llamamos a la bola b1,b2,b3,n1,n2 los sucesos elementales del espacio muestral serían:
{(b1,b2) (b1,b3) (b1,n1) (b1,n2),
(b2,b1) (b2,b3) (b2,n1) (b2,n2),
(b3,b1) (b3,b2) (b3,n1) (b3,n2),
(n1,b1) (n1,b2) (n1,b3) (n1,n2),
(n2,b1) (n2,b2) (n2,b3) (n2,n1)} en total 20 sucesos elementales.

Ejercicio 4. Se propone lo mismo pero con reemplazamiento, o sea, extraer una bola, mirar el resultado, volverla a meter, y después sacar después otra bola nueva.

Solución: En este caso habría 5 sucesos elementales añadidos a los anteriores. Que son (b1,b1) .... (n2,n2)

Ejercicio 5. Se saca de una bolsa de 3 bolas rojas y 2 negras dos bolas sin reemplazamiento. Se considera el suceso aleatorio de sacar dos bolas rojas ¿Cuáles son sus sucesos elementales?

Solución A = {(r1,r2) (r1,r3), (r2,r1) (r2,r3) (r3,r1) (r3,r2)}

Pensar el caso de dos sacar dos bolas negras, o el caso de sacar una de cada color.

1.2.5. Operaciones con sucesos aleatorios.

1.2.5.1. Unión de sucesos aleatorios.

Dados dos sucesos aleatorios A y B. **Llamamos unión de A y B,** al suceso aleatorio que ocurre cuando ocurre A ó ocurre B. O sea ocurre si ocurre alguno de los dos, con solo que ocurra A o B basta, . Estará formado por los sucesos elementales de A y de B todos juntos. Se simboliza por $A \cup B$ y se lee como A ó B

Ejemplo 1: Se lanza un dado, se considera A = {sacar número par} B = {sacar un número mayor que tres} Entonces:

A = {2,4,6} B = {4,5,6}, la unión será el suceso de obtener **par o mayor de tres, o sea, una de las dos cosas**. Será: $A \cup B$ = {2,4,5,6} = {sacar par **o** sacar mayor que tres}

Ejemplo 2: Se lanzan dos dados. A = {sacar en el primer dado 3} B = {la suma de ambos es 6} ¿Cuál será el suceso unión? O suceso {sacar primero 3 **o** sacar la suma de ambos igual a 6}

Solución:
A = {(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)} B = {(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}
$A \cup B$ = {(1,5),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(5,1)}

1.2.5.2. Intersección de sucesos aleatorios.

Dados dos sucesos aleatorios A y B. **Llamamos intersección de A y B,** al suceso aleatorio que ocurre cuando ocurre A y ocurre B a la vez. Estará formado por los sucesos de A y B comunes a ambos sucesos. Lo escribimos como $A \cap B$ y se lee como A y B Así en los dos ejemplos del apartado anterior:

Ejemplo 1: $A \cap B$ = {par y mayor que tres} = {4,6}
Ejemplo 2: $A \cap B$ = {primero sea tres y la suma sea 6} = {(3,3)}

1.2.5.3. Sucesos seguro e imposible.

Llamamos **suceso seguro, al suceso que siempre ocurre**. Estará formado por todos los sucesos elementales, o sea, es el propio espacio muestral. Luego el suceso seguro es el propio E. **Por ejemplo**, al lanzar un dado, E = {que salga uno de los 6 números}.

Llamamos **suceso imposible, al que nunca ocurre**. Por ejemplo, al lanzar un dado, que no salga ninguno de los 6 números, este suceso no contiene ningún suceso elemental, es pues el **conjunto vacío.** Se simboliza por $\emptyset$.

Decimos que **dos sucesos son incompatibles,** si su intersección es el suceso imposible, o sea: $A \cap B = \emptyset$

Por ejemplo. Al lanzar un dado, son incompatibles los sucesos A = {sacar par} y B = {sacar impar}.

1.2.5.4. Suceso contrario.

Llamamos **suceso contrario al suceso A**, **y lo simbolizamos por Ā** . Al suceso que ocurre, cuando no ocurre A. El suceso contrario está formado por los sucesos elementales que no están en A.

Ejemplo 1: El suceso contrario a sacar un número mayor que cuatro será NO sacar un número mayor que cuatro. Así, si
A = {5,6}, el contrario sería Ā={1,2,3,4}.

Ejemplo 2: En una bolsa con 2 bolas Negras y 2 Rojas se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Lo contrario a sacar “Al menos una Negra”, sería “Ninguna fuese negra”. O sea, las dos bolas rojas.

Ejemplo 3: Se compran 3 papeletas de una lotería. Si A = {alguna papeleta con premio}. Su contrario sería Ā = {ninguna papeleta premiada}

Es evidente que el suceso contrario del suceso seguro, es el suceso imposible. $\bar{E}=\emptyset$
Es también evidente, que el suceso contrario al imposible, es el suceso seguro. $\bar{\emptyset}=E$
Además para cualquier suceso A es evidente que: $E=A\cup\bar{A}$ $A\cap\bar{A}=\emptyset$

En estos apuntes frecuentemente pondremos el contrario como $\bar{A}$ y en algunas ocasiones como C(A) ó c(A) ó Contrario(A).

1.2.5.5. Propiedades de las operaciones con sucesos aleatorios.

Las principales propiedades de la unión e intersección de sucesos son:

	Unión	Intersección
Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
Asociativa	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
Simplificación	$A\cup(B\cap A)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Elementos neutros	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\emptyset=\emptyset$

Por las anteriores propiedades el conjunto de todos los sucesos aleatorios de un espacio muestral respecto a las operaciones de unión e intersección se dice que tiene una estructura de **álgebra de Boole.**

Además de las anteriores propiedades se verifican las llamadas l**eyes de Morgan** que son:

1. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$
2. $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

1.2.5.6. Ejercicio.

Escribir los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que consiste en elegir dos números entre 10 de manera que no se puede repetir ninguno.

Decir cuales serían los sucesos elementales de:

1. A= {los dos números sean pares} B={el producto de ambos números mayor que 50}.
2. La unión e intersección de ambos sucesos y el contrario de A.
3. Comprobar además que las leyes de Morgan se verifican para este ejemplo.

1.3. La probabilidad, definición y cálculo.

1.3.1. Introducción.

Nos interesa estudiar las posibilidades que tiene de ocurrir un suceso, o sea a cada suceso A , asignarle un número **p(A) o probabilidad de A** que nos indique las posibilidades que tiene de ocurrir.

La forma más lógica es asignarle un tanto por ciento, o sea, de 100 veces que hagamos el experimento, cuántas nos sale un determinado suceso.

Dicho de otra forma, estudiar cuántas veces nos sale un suceso, al realizar el experimento un número grande de veces.

1.3.2. Frecuencia y probabilidad.

Supongamos un experimento aleatorio. Por ejemplo, lanzar un dado, podríamos realizarlo muchas veces e ir anotando las veces que nos sale cada uno de los números. Si hacemos esto, podríamos comprobar que las veces que sale cada número, o sea, la frecuencia de cada suceso elemental, se aproxima a la sexta parte del número de veces que hagamos el experimento. O sea, de 1000 veces, 1000/6 son las veces que sale cada número. Son entre 160 y 170 veces.

Esta frecuencia cuando el número de experimentos es muy grande, sería el concepto intuitivo de probabilidad.

Aunque se ha dicho que la probabilidad es como el tanto por ciento, **en la práctica se emplea el tanto por uno**, o sea, el tanto por ciento dividido entre cien.

Por ejemplo: Lanzamos 1000 veces el dado y salen 170 unos, la frecuencia absoluta sería 170. El tanto por ciento sería (170/1000)*100 o sea 17%. El tanto por uno sería 17/100 = 0,17 que es lo mismo que la frecuencia relativa = 170/1000.

Por lo tanto, si un experimento se realiza n veces, y un suceso A sale k veces tenemos que:
Frecuencia absoluta = k, $f_a(A)=k$
Porcentaje = (k/n)*100
Frecuencia relativa = tanto por 1 = k/n. $f_r(A)=\frac{k}{n}$

Pues bien, **la probabilidad intuitiva sería el valor de la frecuencia relativa cuando el experimento se realiza muchas veces.**

Se cumplen **tres propiedades** para la frecuencia relativa:

1. **La frecuencia relativa del suceso seguro siempre es uno**, ya que, si hacemos el experimento 1000 veces, 1000 veces nos saldrá el suceso seguro. O sea: $f_r(E)=1$
2. **La frecuencia relativa siempre está comprendida entre cero y uno**, nunca menor que cero, ni nunca mayor que uno. Siendo ademas: $f_r(\emptyset)=0$
3. **Para dos sucesos incompatibles A y B o sea** $A\cap B=\emptyset$ **. La frecuencia relativa de su unión es la suma de las frecuencias relativas.** Por ejemplo: El número de veces que nos

sale dos o tres, son las veces que sale el 2, sumadas a las veces que sale el tres. O sea: $f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B)$

Con estas premisas podemos definir un concepto más exacto de probabilidad.

1.3.3. Concepto axiomático de probabilidad.

Dado un experimento aleatorio y siendo E su espacio muestral. Se define la probabilidad como un número que se le asigna a cada suceso aleatorio, el cual debe de cumplir las siguientes propiedades coincidentes con las propiedades de la frecuencia relativa. Estas son:

1. **La probabilidad será siempre mayor o igual a cero**. Para A, $p(A) \geq 0$
2. **La probabilidad del suceso seguro es 1**. p(E) = 1.
3. **Si A y B cumplen que son incompatibles o sea** $A \cap B = \emptyset$ **se cumple que:** $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

1.3.4. Consecuencias inmediatas de la definición.

1.3.4.1. Probabilidad de suceso contrario.

Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$ y también $A \cup \bar{A} = E$, se verificará por las propiedades de la probabilidad que:

$p(A \cup \bar{A}) = p(E) = 1 = p(A) + p(\bar{A})$ Luego:

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ **La probabilidad del contrario, será siempre uno menos la probabilidad de A.**

1.3.4.2. Probabilidad del suceso imposible.

$p(\emptyset) = p(\bar{E}) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$ **La probabilidad del suceso imposible es CERO.**

1.3.4.3. Probabilidad de un suceso.

$p(A) \leq p(A) + p(\bar{A}) = p(E) = 1$ Luego la probabilidad de un suceso siempre es menor o igual a uno, por lo que la probabilidad de un suceso siempre estará entre cero y uno, siendo CERO para el suceso imposible y UNO para el seguro.

1.3.4.4. Comparación de probabilidades.

Si $A \subset B$ entonces $p(A) \leq p(B)$.

Si $A \subset B$ entonces $B = E \cap B = (A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$ como $A \cap (B \cap \overline{A}) = B \cap A \cap \overline{A} = \emptyset$ entonces:

$p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$ como $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$ entonces $p(A) \leq p(B)$

1.3.4.5. Probabilidad de la unión para sucesos no incompatibles.

Para dos sucesos A y B cuya intersección no sea el suceso imposible

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ La demostración es algo más larga:

Por las propiedades de la unión e intersección:

$A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ como $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = \emptyset$
$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$ luego $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

por otra parte se tiene que

$A \cup B = (A \cup B) \cap E = (A \cup B) \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup B$ luego por ser $(A \cap \bar{B}) \cap B = \emptyset$
$p(A \cup B) = p(A \cap \bar{B}) + p(B)$ luego:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

1.3.4.6. Probabilidad para la unión de tres sucesos.

Se demuestra que si tenemos tres sucesos podemos generalizar la expresión anterior a la siguiente:

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$ ya que:
$P(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B \cup C) - p(A \cap (B \cup C))$ luego:
$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + P(C) - p(B \cap C) - p((A \cap B) \cup (A \cap C))$ pero como
$p((A \cap B) \cup (A \cap C)) = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)$ sustituyendo se llega a la expresión buscada.

1.3.5. Probabilidad Laplaciana.

Nos va a permitir calcular la probabilidad de cada suceso elemental, y de un suceso aleatorio cualquiera.

Si E es un espacio muestral siendo $e_{1,} e_{2,} e_{3,} \ldots.. e_n$ los sucesos elementales (n sucesos elementales), se tiene que:

$E = e_1 \cup e_2 \cup e_3 \ldots\ldots. e_{n-1} \cup e_n$ luego $p(e_1) + p(e_2) + \ldots.. + p(e_n) = p(E) = 1$ ya que los sucesos elementales son incompatibles.

Podemos suponer que todos los sucesos elementales son igualmente probables Es así, ya que por ejemplo, al lanzar un dado todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Entonces podemos escribir que:

$N.p(e_1) = N.p(e_2) = \ldots.. = N.p(e_n) = p(E) = 1$ De donde la probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{n}$, o sea:

Se tiene $p(e_1) = p(e_2) = \ldots.. = p(e_n) = \frac{1}{n}$

A “n” se le suele llamar **casos posibles.** Luego la probabilidad de cada suceso elemental será:

Probabilidad de un suceso elemental = $\frac{1}{casos\ posibles}$

Supongamos ahora un suceso aleatorio A, formado por k-sucesos elementales o sea $A=e_1 \cup e_2 .... \cup e_k$ es inmediato calcular la probabilidad de A, ya que:

$$p(A)=p(e_1)+.....+p(e_k)=p(e_1)+..(k-veces)...+p(e_1)=k.p(e_1)=\frac{k}{n}$$

Si llamamos al número de sucesos elementales de A **"casos favorables" = k, tenemos que:**

Probabilidad de A = n º de sucesos elementales de A / nº de sucesos elementales de E o bien:

Probabilidad de A = $p(A)=\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}=\frac{k}{n}$

Este cálculo de probabilidad se conoce con probabilidad laplaciana, y que coincide con la idea intuitiva de probabilidad. Además significa que multiplicando por 100 la probabilidad de un suceso A, nos resulta un tanto por ciento aproximado de posibilidades de que ocurra A.

La probabilidad laplaciana fue introducida por Laplace como un modelo matemático para formular las posibilidades de los resultados en los juegos de azar.

1.3.5.1. Ejemplos.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.. Se lanza una moneda, entonces **Espacio muestral** = E = {cara , cruz}, luego: $p(cara)=p(cruz)=\frac{1}{2}$ Ya que n = nº elementos de E, es igual a 2.

Ejemplo 2. Se lanza un dado E = {1,2,3,4,5,6}. La probabilidad de cada suceso elemental es:

$p(1)=p(2)=...=p(6)=\frac{1}{6}$ Ahora n=6.

Sea el suceso A = {sacar par} = {2,4,6} se tendrá $p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ (n=6, k=2).

Sea B = {sacar número mayor o igual a cuatro} = {4,5,6} , $p(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$A \cup B$ = {sacar par} o {sacar mayor o igual a 4} = {2,4,5,6} $P(A \cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$A \cap B$ = {sacar par} y {sacar mayor o igual a cuatro} = {4,6} $p(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Si calculamos $p(A)+p(B)-p(A \cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3+3-2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ Que coincide como era de esperar con $p(A \cup B)$

Ejemplo 3. Una bolsa contiene 9 bolas numeradas, se extrae una bola al azar, vamos a calcular:

Suceso A = {sacar impar} = {1,3,5,7,9} $p(A)=\frac{5}{9}$

Suceso B = {sacar múltiplo de 3} = {3,6,9} $p(B)=\frac{3}{9}$

Suceso $A\cap B$ = {sacar impar y múltiplo de 3} = {3,9} $p(A\cap B)=\frac{2}{9}$

Suceso $A\cup B$ = {sacar impar **o** múltiplo de 3} = {1,3,5,6,7,9} $p(A\cup B)=\frac{6}{9}$

Además: $p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{5}{9}+\frac{3}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5+3-2}{9}=\frac{6}{9}=p(A\cup B)$

Ejemplo 4. Se tiene una bolsa con 5 bolas Negras, 3 Blancas, 4 Rojas, se extrae una bola, entonces:

E= {n1, n2, n3, n4, n5, b1, b2, b3, r1, r2, r3, r4} en total 12 sucesos elementales.

B = {sacar blanca} = {b1, b2, b3} luego $p(B)=\frac{3}{12}$

R = {sacar roja} = {r1, r2, r3, r4} $p(R)=\frac{4}{12}$

N = {sacar Negra} = {n1, n2, n3, n4, n5} $p(N)=\frac{5}{12}$

$\bar{B}$ = {no sacar Blanca} = {sacar roja o sacar negra} será lo contrario de sacar blanca.

$p(\bar{B})=1-p(B)=1-\frac{3}{12}=\frac{12-3}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$\bar{R}$ = {no sacar Roja} = {sacar blanca **o** sacar negra} . Será lo contrario de sacar roja.

$p(\bar{R})=1-p(R)=1-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

$\bar{B}\cap\bar{R}$ = {no sacar Blanca **y** no sacar roja} = {sacar negra} $p(\bar{B}\cap\bar{R})=p(N)=\frac{5}{12}$

$\bar{B}\cup\bar{R}$ = {no sacar blanca **o** no sacar roja}

$p(\bar{B}\cup\bar{R})=p(\bar{B})+p(\bar{R})-p(\bar{B}\cap\bar{R})=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{9+8-5}{12}=\frac{12}{12}=1$

Nos sale uno ya que $\bar{B}\cup\bar{R}$ = {no sacar blanca o no sacar roja} = {sacar roja o negra} o {blanca o negra} = {r1, r2, r3, r4, n1, n2, n3, n4, n5} unión {b1, b2, b3, n1, n2, n3, n4, n5} = E luego:

$\bar{B}\cup\bar{R}=E$

Ejemplo 5 Se tiene una bolsa con 2 bolas Negras y dos Bolas Rojas. Se extraen dos bolas sin reemplazamiento. El espacio muestral es:

E = {(r1,r2),(r1,n1),(r1,n2),
(r2,r1),(r2,n1),(r2,n2),
(n1,r1),(n1,r2),(n1,n2),
(n2,r1),(n2,r2),(n2,n1)} en total 12 sucesos elementales.

La probabilidad de cada uno será $\frac{1}{12}$

Sea A el suceso de {sacar una negra y una roja por este orden}. Los sucesos elementales son:

A = {(n1,r1),(n1,r2),(n2,r1),(n2,r2)} luego $p(A)=\frac{4}{12}$

Sea B = {al menos una roja}. Este caso el contrario de {ninguna sea roja} será las dos negras, luego el contrario será $\overline{B}$ = {(n1,n2),(n2,n1)}. Su probabilidad $p(\overline{B})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ Luego:

$$p(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{6-1}{6}=\frac{5}{6}$$

$A\cap B$ = **{negra y roja por este orden Y al menos una roja}** = {(n1,r1),(n1,r2),(n2,r1),(n2,r2}}

Luego: $p(A\cap B)=\frac{4}{12}$

$A\cup B$ = **{negra u roja por este orden O al menos una roja}**

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{4}{12}+\frac{5}{6}-\frac{4}{12}=\frac{5}{6}$$

Véase que: $A\cup B$ = {(n1,r1),(n1,r2),(n2,r1),(n2,r2),(r1,n1),(r1,n2),(r2,n1),(r2,n2),(r1,r2),(r2,r1)} o sea 10 sucesos elementales, por lo que directamente la $p(A\cup B)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

Sea ahora C = {una bola de cada color} = {negra y roja por este orden} O {roja y negra} por este orden. Entonces como negra y roja es incompatible con roja y negra, o sea: $\{negra\ y\ roja\}\cap\{roja\ y\ negra\}=\emptyset$ se tiene que:

P(C) = p({negra y roja}) + p({roja y negra}), la primera es $\frac{1}{3}$ como sabemos, la segunda al ser roja y negra también serán cuatro sucesos elementales (los de negra u roja puestos al revés) y tendremos que:

$$p(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Sea D = {las dos bolas del mismo color} en este caso D = {las dos rojas} o {las dos negras}

p(D) = p({roja y roja}) + p({negra y negra})

{roja y roja} = {(r1,r2),(r2,r1)} y {negra y negra} = {(n1,n2),(n2,n1)}

$$p(D)=\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Obsérvese que también C y D son contrarios ya que lo contrario a ser de distinto color es que sean del mismo color y vemos $p(C)+p(D)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

Completemos ahora el ejemplo con otros caso, supongamos los sucesos A y B de tal manera que:

Sea ahora A = {primera sea roja} = {(r1,r2),(r1,n1),(r1,n2),(r2,r1),(r2,n1),(r2,n2)}

$$p(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Sea ahora B = {segunda sea roja} = {(r2,r1),(n1,r1),(n2,r1),(r1,r2),(n1,r2),(n2,r2)}

$$p(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$A\cap B$ **= {la primera roja Y la segunda Roja}** = {las dos sean rojas} ={(r1,r2),(r2,r1)}

$$p(A\cap B)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$A\cup B$ **= {la primera sea roja O la segunda sea roja}**

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3+3-1}{6}=\frac{5}{6}$$

Este caso se podría haber pensado diciendo: $A\cup B$ = {al menos una roja} = {lo contrario a las dos blancas} luego:

$p(A\cup B)$ = 1 – p({las dos blancas}) = 1-p((b1,b2),(b2,b1)) = $1-\frac{2}{12}=1-\frac{1}{6}=\frac{6-1}{6}=\frac{5}{6}$

que es el mismo resultado.

Todos estos ejemplos los hacemos contando directamente los elementos del espacio muestral, en ocasiones puede resultar difícil, para evitarlo introduciremos el concepto de **probabilidad producto** y de **probabilidad condicionada.**

Ejemplo 6 (Propuesto) . Se lanza un dado 2 veces. Calcular:

1. Probabilidad de que los dos números sean pares.
2. Probabilidad de que el primero sea par.
3. Probabilidad de que al menos un de los dos sea par.
4. Si A = {Al menos uno impar} y B = {La suma de ambos es mayor que 10}, calcular p(A), p(B), $p(A\cup B), p(A\cap B)$

1.4. Probabilidad compuesta (producto) , probabilidad condicionada.

Consideremos un experimento aleatorio, y sea E su espacio muestral. Los sucesos elementales de E son $\{e_{1,} e_{2,} e_{3,\ldots,} , e_n\}$. Se trata de estudiar cual es el espacio muestral del experimento cuando se repite este varias veces. Por ejemplo: El espacio muestral del lanzamiento dos o más veces de un dado, o del lanzamiento de dos o más dados.

Dicho de otra manera, se trata de estudiar repeticiones de un mismo experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio que resulta al repetir varios experimentos (dos o más veces), o que se puede descomponer en varios experimentos se llama experimento **compuesto o producto de varios.**

Si repetimos un experimento aleatorio dos veces pueden ocurrir dos cosas que son:

1. Un experimento **no influye sobre otro.** Por ejemplo si lanzamos dos veces un dado el resultado del primer lanzamiento no influye en el segundo. Si de una bolsa extraemos dos bolas con reemplazamiento el resultado de la primera extracción no influye en la segunda. Los experimentos así se llaman **independientes.**

2. Un experimento **si influye en el segundo.** Si de una bolsa sacamos una bola, y de esa misma bolsa sacamos otra bola sin reemplazar la primera, la segunda extracción si depende del resultado de la primera, ya que si por ejemplo se obtiene la primera vez una bola blanca, cuando realizamos la segunda extracción hay en la bolsa una bola blanca menos. Los experimentos así, se llaman **dependientes.**

3.

Veamos cada uno de los casos anteriores.

1.4.1. Repetición de experimento aleatorios independientes.

Supongamos un experimento de manera que al repetirlo dos o más veces el resultado de de cada experimento no influye en el siguiente. Por ejemplo lanzar un dado dos veces.

Como hemos dicho que son independientes, el espacio muestral de la segunda vez que hacemos el experimento es exactamente el mismo que cuando hacemos el experimento la primera vez, y si lo hacemos varias veces más el espacio muestral sigue sin variar. Por ejemplo cuando lanzamos un dado varias veces en cada lanzamiento el espacio muestral es {1,2,3,4,5,6}.

Por esto podemos afirmar que cuando lanzamos dos veces un dado, o cuando lanzamos dos dados, el espacio muestral es simplemente los pares de numeros que nos salen. Entonces el espacio muestral es E x E = {(1,1),(1,2)....,(6,6)}, por lo que el espacio muestral está formado por parejas de sucesos elementales de cada uno de los lanzamientos. Esto se puede generalizar.

Si un experimento aleatorio su espacio muestral es $E=\{e_{1,} e_{2,} e_{3,\ldots,} , e_n\}$ y lo realizamos dos veces, el espacio muestral de este experimento repetido es el conjunto de parejas de los sucesos elementales de E, o sea:

$$E=E\,x\,E=\{(e_{1,} e_1),(e_{1,} e_2),\ldots,(e_{1,} e_n),(e_{2,} e_1),\ldots\ldots(e_{2,} e_n),\ldots\ldots,(e_n, e_n)\}$$

Por lo tanto si E tiene n sucesos elementales el nuevo experimento tendrá $n\ por\ n$ **sucesos elementales. Si el experimento se realizase tres veces el espacio sería el conjunto de ternas formadas con los elementos de E y tendría** $n\ por\ n\ por\ n\, sucesos$.

El espacio muestral así formado con los espacios muestrales de experimentos independientes, se llama espacio muestral producto. Y se suele escribir como $E\, x\, E$ **para dos repeticiones o** $E\, x\, E\, x\, E\, x \ldots..(k\, veces)\, x\, E\ para\ k\ repeticiones$ **del experimento.**

Si el experimento lo realizamos dos veces, y E tiene n suceso elementales, entonces para el experimento producto:

$$p(e_{1,}e_1)=....=p(e_n, e_n)=\frac{1}{n.n}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n}=p(e1).p(e1)=......=p(e_n).p(e_n)$$

Por ejemplo si lanzamos un dado E = {1,2,3,4,5,6}, si lo lanzamos dos veces entonces

$$p(1,1)=p(1,2)=.....=p(6,6)=\frac{1}{6.6}=\frac{1}{36}=p(1).p(1)=.....=p(6).p(6)$$

O sea para cada suceso elemental del espacio producto su probabilidad se obtiene multiplicando la probabilidad de los sucesos elementales que lo componen.

Así, si el dado lo lanzamos 3 veces, la probabilidad de por ejemplo sacar (2,4,5) sería:

$$p(2,4,5)=p(2).p(4).p(5)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

Esto lo **podemos generalizar para sucesos aleatorios no elementales.** Supongamos lo siguiente:

Un experimento aleatorio, y un suceso A de dicho experimento. Si A tiene k sucesos elementales y E tiene n sucesos elementales $p(A)=\frac{k}{n}$. Supongamos que el experimento lo hacemos dos veces, y nos interesa que la segunda vez nos salga un suceso B que tiene h sucesos elementales, o sea $p(B)=\frac{h}{n}$. Entonces nos planteamos **¿Cuál es la probabilidad de que al realizar el experimento dos veces obtengamos A la primera vez y B la segunda?,** o sea si:
C = {obtener A la primera vez y B la segunda}, ¿Cuál es la probabilidad de C?.

La respuesta es fácil, los sucesos elementales de C están formados por parejas de los sucesos de A y B, luego C tiene $h\ por\ k\ sucesos\ elementales$ luego:

$$p(C)=p(A\ y\ B)=\frac{h.k}{n.n}=\frac{k}{n}.\frac{h}{n}=p(A).p(B)$$

Veamos un ejemplo: Se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números sean pares?.

Sea A={primero par} y B={segundo par}, y C={primero y segundo par}

$$p(C)=p(A\ y\ B)=p(A).p(B)=\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto llegamos a la siguiente **conclusión fundamental:**

Para dos sucesos A y B de un experimento repetido de forma independiente se tiene que:

$$p(A\,y\,B)=p(A).\,p(B)$$

Esto es generalizable para más de dos experimentos repetidos, así para calcular la probabilidad de obtener tres números pares al lanzar el dado tres veces será:

Si P es obtener par, P={2,4,6}

$$p(P\,y\,P\,y\,P)=p(par\ y\ par\ y\ par)=p(P).\,p(P).\,p(P)=\frac{3}{6}.\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

1.4.2. Repetición de experimentos aleatorios dependientes.

Supongamos ahora que los experimentos son dependientes, o sea cuando realizamos el experimento varias veces una influye sobre la otra. Si A y B son dos sucesos del experimento, cuando realizamos el experimento la primera vez el espacio muestral no es lo mismo que cuando se realiza la segunda, así si la primera vez obtenemos A, la probabilidad de obtener B la segunda depende del resultado de la primera, así ahora la probabilidad de obtener B la segunda no es $p(B)$ es lo que llamamos $p(B/A)$ o **probabilidad de B condicionado por A** o sea probabilidad de B supuesto A cierto. Entonces ahora p(A y B) no es el producto de las probabilidades de A y de B, es lo siguiente:

$$p(A\,y\,B)=p(A).p(B/A)$$

Por lo que para un experimento dependiente, la probabilidad de obtener A la primera vez y B la segunda es el producto de la probabilidad de A por la probabilidad de A condicionado a B.

Ejemplo 1: Supongamos una bolsa con 3 bolas negras, y 2 bolas blancas, y sacamos dos bolas sin reemplazamiento, nos planteamos cuál es la probabilidad de sacar una negra y una blanca en este orden.

Evidentemente la probabilidad de sacar la primera negra, será $p(N)=\frac{3}{5}$

Pero si sacamos la primera negra nos quedan en la bolsa sólo cuatro bolas, 2 blancas y 2 negras, luego la probabilidad de sacar la segunda blanca es:

$p(B/N)=(segunda\,bola\,blanca\,siendo\,la\,primera\,negra)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ Por lo que:

$$p(N\,y\,B)=p(N).p(B/N)=\frac{3}{5}.\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

En el caso del mismo experimento pero con reemplazamiento sería:

$$p(N\,y\,B)=p(N).p(B)=\frac{3}{5}.\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$$

Esta forma de cálculo también se puede generalizar para más repeticiones, así si el experimento se realiza tres veces se tendría:

$$p(A\,y\,B\,y\,C)=p(A).\,p(B/A).\,p(C/A\,y\,B)$$

Ejemplo 2: Una bolsa tiene 5 bolas, 3 Negras y 2 blancas, se extraen tres bolas sin reemplazamiento ¿Cuál es la probabilidad de que sean 3 bolas Negras?

Nos pide p(N y N y N) entonces:

$p(N\,y\,N\,y\,N)=p(N).\,p(N/N).\,p(N/N\,y\,N)$ pero como:

$p(N)=\dfrac{3}{5}\quad p(N/N)=\dfrac{2}{4}\quad p(N/N\,y\,N)=\dfrac{1}{3}$

$p(N\,y\,N\,y\,N)=\dfrac{3}{5}.\dfrac{2}{4}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{6}{60}=\dfrac{1}{10}$

Otra conclusión evidente es que en los sucesos independientes como A no influye sobre B la probabilidad de B condicionada por A es simplemente la probabilidad de B. O sea:

$$p(B/A)=p(B)\quad o\,bien\quad p(A/B)=p(A)$$

1.4.3. Sucesos en cualquier orden, necesidad de la combinatoria.

Supongamos el experimento se lanzar un dado 2 veces, y nos interesan probabilidad de estos dos sucesos:

A = sacar {par y luego impar en este orden} = {P y I}
B = sacar {par o impar en cualquier orden} = {P y I en cualquier orden}

A es un caso de los estudiados anteriormente, que como el experimento es independiente se calcula su probabilidad fácilmente:

$$P(A)=p(P\,y\,I)=p(P).\,p(I)=\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

Sin embargo B es más complicado ya que B contempla dos posibilidades que son {par y impar} o { Impar o Par} o sea $B=\{P\,y\,I\}\cup\{I\,y\,P\}$ sin embargo hay suerte, los sucesos {P y I} e {I y P} son incompatibles o sea su intersección es vacía, ya que es imposible que se den los dos a la vez, luego la p(B) es la suma de cada uno de ellos. Pero aún hay más suerte, ya que es lo mismo de probable sacar {P y I} que {I y P} luego:

$$P(B)=p(P\,y\,I)+p(I\,y\,P)=2.\mathrm{p}(P\,y\,I)=2.\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto basta calcular la probabilidad de una de las posibilidades y multiplicarla por el número de posibilidades que tenemos.

Veamos otro ejemplo. Tenemos una bolsa con 3 bolas negras, 3 blancas, 4 rojas. Se sacan 3 bolas sin reemplazamiento. Veamos las siguientes probabilidades:

Sacar 2 negras y una roja por este orden. O sea p(N y N y R) entonces como son sucesos dependientes:

$$p(N\,y\,N\,y\,R)=P(N).\,p(N/N).\,p(R/N\,y\,N)=\frac{3}{10}.\frac{2}{9}.\frac{4}{8}=\frac{3.2.4}{10.9.8}=\frac{3.2}{10.9.2}=\frac{1}{10.3}=\frac{1}{30}$$

Sacar 2 negras y una roja en cualquier orden. Esto admite las siguientes posibilidades que son {N y N y R} o {N y R y N} o {R y N y N} o sea tres posibilidades. Como son todas iguales de probables basta calcular una y multiplicar por tres. Como además ya tenemos calculada la primera, la probabilidad pedida es:

$$p(N\ y\ N\ y\ R\, en\, cualquier\, orden) = 3.\frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

Este ejemplo es generalizable, ya que si nos piden la probabilidad de un experimento compuesto por varios simples que se pueden realizar en cualquier orden, basta calcular la probabilidad de uno de ellos y multiplicarla por todas las posibilidades. Por ejemplo

Si extraemos 5 bolas y nos interesa calcular la probabilidad de dos blancas, dos negras y una roja en cualquier orden, basta calcula la probabilidad de por ejemplo {B y B y N y N y R} y después ver las formas de ordenar dos blancas, dos rojas y dos negras y multiplicar por dichas formas.

Sin embargo para ver la forma de ordenar caso más complicados necesitamos unos conocimientos que no poseemos, para ello vamos a ver conceptos elementales de una parte de las matemáticas que llamamos combinatoria que nos resolverán el problema propuesto.

1.5. Algunos conceptos de combinatoria.

La combinatoria estudia las veces que se pueden combinar objetos de formas diferentes. Por ejemplo, de cuantas formas se puede uno vestir con cuatro pantalones y 3 camisas. De cuantas formas se pueden combinar en 15 lugares ceros y unos, cuantas quinielas de 14 resultados podemos hacer. Hacer un estudio completo de la combinatoria lleva bastante tiempo y no entra en los objetivos del curso, sólo se dirá lo imprescindible para el calculo de probabilidades. Empezaremos con la definición de unos conceptos básicos.

1.5.1. Factorial de un número.

Dado un **número natural n** vamos a definir el **factorial de n** que escribimos como $n!$ así:

$$0!=1 \ ,\ 1!=1\ ,\ 2!=2.1=2\ ,\ 3!=3.2.1=6\ ,\ 4!=4.3.2.1=24\ ,\ 5!=5.4.3.2.1=120$$

$$n!=n.(n-1).(n-2). ... .2.1$$

O sea por ejemplo $8!=8.7.6.5.4.3.2.1$

1.5.2. Numeros combinatorios.

Dados dos número naturales n y k con $n \geq k$ definimos **n sobre k o el número combinatorio n sobre k** de la forma siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$ así:

$$\binom{0}{0}=\frac{0!}{0!.(0-0)!}=\frac{1}{1.1}=1 \qquad \binom{1}{0}=\frac{1!}{0!.(1-0)!}=\frac{1}{1.1}=1 \qquad \binom{1}{1}=\frac{1!}{1!.(1-1)!}=\frac{1}{1.1}=1$$

$$\binom{2}{0}=\frac{2!}{0!.(2-0)!}=\frac{2}{1.2}=1 \qquad \binom{2}{1}=\frac{2!}{1!.(2-1)!}=\frac{2}{1.1}=2 \qquad \binom{2}{2}=\frac{2!}{2!.(2-2)!}=\frac{2}{2.1}=1$$

$$\binom{3}{0}=\frac{3!}{0!.(3-0)!}=\frac{6}{1.6}=1 \qquad \binom{3}{1}=\frac{3!}{1!.(3-1)!}=\frac{6}{1.2}=3 \qquad \binom{3}{2}=\frac{3!}{2!.(3-2)!}=\frac{6}{2.1}=3$$

o bien por ejemplo:

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!.(4-2)!}=\frac{4.3.2.1}{2.1.2.1}=2.3=6$$

Los números combinatorios cumplen varias propiedades importantes que son:

$$\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!.(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1 \qquad \binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!.(n-(n-1))!}=\frac{n!}{n-1!}=\frac{n.(n-1)...1}{(n-1)....1}=n$$

$$\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!.(n-1)!}=\frac{n!}{n-1!}=n \qquad \binom{n}{n}=\frac{n!}{n!.(n-n)!}=\frac{n!}{n!.0!}=1$$

así: $\binom{100}{0}=1 \qquad \binom{100}{1}=100 \qquad \binom{100}{99}=100 \qquad \binom{100}{100}=1$

$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ ya que $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!.(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!.(n-(n-k))!}=\binom{n}{n-k}$

esto nos dice por ejemplo que:

$$\binom{5}{0}=\binom{5}{5-0}=1 \qquad \binom{5}{1}=\binom{5}{5-1}=5 \qquad \binom{5}{2}=\binom{5}{5-2}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!.(5-2)!}=\frac{5.4.3.2}{2.3.2}=10$$

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}=\frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}=...$$
$$...=\frac{(n-1)!k+(n-1)!n-(n-1)!k}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

esto nos dice que:

$\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3}$ que es cierto ya que: $\binom{4}{2}=\frac{4.3.2}{2.2}=6 \quad \binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{3.2}=4 \quad \binom{5}{3}=\frac{5.4.3.2}{3.2.2}=10$

Los números combinatorios sirvan para lo siguiente:

Si tenemos que combinar de todas las formas posibles 8 objetos distintos para 3 lugares, de manera que no importa el orden de colocación, ni se puede repetir ninguno. Las formas de poder hacer eso son:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!.5!}=\frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.5.4.3.2.1}=\frac{8.7.6}{3.2}=8.7=56$$

O también, si tenemos dos grupos de objetos iguales por ejemplos 5 letras A y 3 letras B la forma de combinar estos ocho objetos o sea {AAAAABBB} {AAABBBAA} ... es justamente:

$$\binom{5+3}{5}=\binom{8}{5}$$

Es más si tenemos un grupo de 5 letras A, 6 letras B y 10 letras C, la forma de combinar estas letras es:

$$\frac{(5+6+10)!}{5!.6!.10!}$$

Por lo tanto si tenemos varios objetos de forma que se repiten $n_{1,} n_{2,} \ldots . n_k\, veces$ cada uno la forma de combinarlos es:

$$\frac{(n_1+n_2+\ldots .. n_k)!}{(n_1)!.(n_2)!\ldots \ldots .(n_k)!}$$

Ejemplo 1. Formas de combinar en 6 lugares 2 bolas Negras, 3 Rojas y una Blanca, o sea formas de combinar NNRRRB. O sea las posibilidades que hay si cambiamos de todas la formas posibles N, B, y R por la fórmula anterior será:

$$\frac{(2+3+1)!}{3!.2!.1!}=\frac{6.5.4.3.2}{3.2.2}=2.5.2.3=60$$

Ejemplo 2. Se tienen en una bolsa 5 bolas N, 2 Rojas y 3 Blancas. Se extraen 3 bolas sin remplazamiento. Veamos las probabilidades de:

1. Sacar una bola de cada color
2. Sacar dos N y una blanca en cualquier orden
3. Sacar al menos una negra.

Para A = {bola de cada color} será sacar R, B y N en cualquier orden, entonces calculamos la probabilidad en un orden determinado y la multiplicamos por las formas de combinar R,B y N. Las formas de combinar R,B y N será $\frac{(1+1+1)!}{1!.1!.1!}=3!=3.2.1=6$ entonces:

$$p(A)=6.\text{p}(R\, y\, B\, y\, N)=6.\text{p}(R).\,p(B/R).\,p(N/R\, y\, B)=6.\frac{2}{10}.\frac{3}{9}.\frac{5}{8}=6.\frac{2.3.5}{10.9.8}=6.\frac{1}{3.8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Para B = {N y N y B en cualquier orden} hacemos lo mismo calculamos la probabilidad de sacar {N y N y B} en este orden y multiplicamos por las formas de combinar {NNB}, estas formas son ahora $\frac{(2+1)!}{2!.1!}=\binom{2+1}{2}=\binom{3}{2}=\frac{3.2}{2.1.1}=3$

$$p(B)=3.\,p(N\, y\, N\, y\, B)=3.\,p(N).\,p(N/N).\,p(B/N\, y\, N)=3.\frac{5}{10}.\frac{4}{9}\frac{3}{8}=\frac{1}{2.2}=\frac{1}{4}$$

Para **C = {al menos una negra}** pensamos en el contrario **o sea {ninguna sea negra}**

$$p(\bar{C})=p(\bar{N}\, y\, \bar{N}\, y\, \bar{N})=p(\bar{N}).\,p(\bar{N}/\bar{N}).\,p(\bar{N}/\bar{N}\, y\, \bar{N})$$

En este caso {ninguna negra} sólo tiene la anterior posibilidad, o sea no hay que multiplicar por el número combinatorio. Entonces:

$$p(\bar{C})=\frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8}=\frac{5.4.3}{10.9.8}=\frac{1}{2.2.3}=\frac{1}{12} \quad \text{y} \quad P(C)=1-\frac{1}{12}=\frac{12-1}{12}=\frac{11}{12}$$

1.5.3. Complementos de combinatoria.

Vamos a complementar la información de la combinatoria viendo como se calculan diversos supuestos, ***aunque normalmente en probabilidad sólo tendremos que utilizarla en los casos anteriores, conviene conocer algunos conceptos.***

1.5.3.1. Variaciones.

Variaciones son la maneras de ordenar **m** cosas distintas en **n** lugares, de manera que **importa el orden de colocación, pero no se repite ninguna**. Evidentemente debe de ser m mayor que n. **Se llaman variaciones de m elementos tomados de n en n se calculan así:**

$$V_n{}^m=m(m-1)(m-2).....(m-n+1)$$

1.5.3.2. Permutaciones.

Son formas de colocar **m objetos distintos en m lugares** de **forma que importa el orden y no se repite ninguno.** Son las variaciones cuando **m=n**. Se calculan así:

$$P_m=m(m-1)(m-2)....1=m!$$

O sea, se calculan con el factorial antes estudiado.

1.5.3.3. Variaciones con repetición.

Son lo mismo que las variaciones pero ahora los objetos **SI se pueden repetir**. **O sea colocación de m objetos en n lugares importando el orden y pudiéndose repetir**. Se calculan así:

$$VR_n{}^m=m^n$$

En este caso n puede ser más grande que n. Si m=n son las permutaciones con repetición.

Ejemplo: ¿Cuántas quinielas de 14 partidos se pueden rellenar?. Como son 14 lugares con tres posibilidades cada uno. Son 3 objetos (1,X,2) En 14 lugares, pudiéndose repetir e importando el orden, o sea 3^{14} posibilidades. ¿De cuántas formas podemos llenar 32 lugares con ceros y unos? Como son dos objetos, 0 y 1 y 32 lugares importando el orden y pudiéndose repetir será 2^{32} posibilidades.

1.5.3.4. Combinaciones.

Son ordenar **m objetos en n sitios, pero ahora no podemos repetir ni importa el orden de como se escojan.** Evidentemente m debe de ser mayor que n. Se calculan así:

$$C_n{}^m=\binom{m}{n}$$

O sea mediante números combinatorios.

Ejemplo. Con los números del 1 al 48, ¿Cuántos boletos de 6 números podemos rellenar? (Lotería primitiva). La solución son las formas de escoger 6 números entre 48, sin que se repita ninguno, ni importe el orden. Es decir: $\binom{48}{6}=\frac{48!}{6!(48-6)!}=\frac{48!}{6!.42!}$

1.5.3.5. Combinaciones con repetición.

Es el caso ya visto para la probabilidad, es como ordenar k objetos de manera que cada uno aparece $n_{1,} n_{2,} n_3 \ldots. n_k$ veces importando el orden de colocación. Hemos visto en el apartado anterior que se calculaban mediante la expresión:

$$\frac{(n_1+n_2+\ldots.. n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Es el caso de tener por ejemplo las letras ABC y ver las formas de ordenarlas de manera que por ejemplo haya 3 letras A, 2 letras B, y 5 letras C.

1.6. Ejercicios de probabilidad.

1.6.1. Ejercicio 1.

Se lanzan dos dados. Calcular:

1. Probabilidad de que los dos números sean pares.
2. Probabilidad de par e impar por este orden.
3. Probabilidad de par e impar en cualquier orden.
4. Probabilidad de que al menos alguno de ellos sea un uno.

Apartado 1. Si queremos que los dos sean pares tenemos que sacar un par primero y luego otro par, o sea, Par y Par, si P = {sacar par}, y {P y P} es sacar {Par y Par}. Tenemos que:

La p({P y P}) = p(P).p(P) ya que sacar P en el primer dado no influye en el segundo o sea son sucesos independientes.

Entonces $p(\{P\, y\, P\})=p(P).\, p(P)=\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Apartado 2. Nos pide p({P y I}) o sea, un par y luego un impar.

Entonces p({ P y I}) = p(P).p(I) al ser P e I independientes, luego

Entonces $p(\{P\, y I\})=p(P).\, p(I)=\frac{3}{6}.\frac{3}{6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

Apartado 3. Par e impar en cualquier orden es la unión de los suceso {P y I} e {I y P} Como estos sucesos son incompatibles, ya que si uno ocurre es imposible que ocurra el otro. La probabilidad pedida sería así, probabilidad = p({P y I}) + p({I y P} pero como {P y I} es lo mismo de probable que {I y P} Entonces:

$$p(\{I\, y\, P\, en\, cualquier\, orden\})=2.\, p(P\, y I)=2.\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Apartado 4. Casi siempre que nos preguntan con la frase "al menos" es mejor hacer el ejercicio por el caso contrario, ya que lo que nos piden, es obtener una de estas tres cosas { uno y uno} o bien {uno y no uno} o bien {no uno y uno} Entonces tendríamos que calcular cada una de estas tres probabilidades y sumarlas, o sea, deberíamos encontrar tres probabilidades y sumarlas; pero es más fácil hacer lo siguiente:

Lo contrario a {Al menos un uno} es {Ninguno de los dos sea uno} o sea {no uno y no uno} Esto nos permite calcular la probabilidad del contrario de A, ya que al ser:

$p(no\,uno)=p(no\,sacar\,uno)=p(\bar{1})=\frac{5}{6}$ luego:

$$p(\{\,Al\ menos\ un\ uno\})=1-p(\bar{1}\,y\,\bar{1})=1-p(\bar{1}).\,p(\bar{1})=1-\frac{5}{6}.\frac{5}{6}=1-\frac{25}{36}=\frac{36-25}{36}=\frac{11}{36}$$

1.6.2. Ejercicio 2.

Una bolsa contiene tres bolas blancas, 5 negras, y dos rojas. Se extraen 2 bolas sin reemplazamiento. Calcular:

1. Probabilidad de sacar blanca y negra por este orden.
2. Probabilidad de una de cada color.
3. Al menos una blanca.

Apartado 1. $P(B\,y\,N)=p(B).\,P(N/B)=\frac{3}{10}.\frac{5}{9}=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{6}$

Apartado 2. Una de cada color pueden ser {BR} {RB} {BN} {NR} {RN} {NR} o sea 6 posibilidades (Según el apartado 1.4.3. 3 objetos en dos lugares importando el orden y sin repetir). Habrá que calcular la probabilidad de esas 6 posibilidades y sumarlas.

$$P(B\,y\,R)=p(B).\,P(R/B)=\frac{3}{10}.\frac{2}{9}=\frac{6}{90}$$

$$p(R\,y\,B)=p(B\,y\,R)=\frac{6}{90}$$

$$P(B\,y\,N)=P(B).\,P(N/B)=\frac{3}{10}.\frac{5}{9}=\frac{15}{90}=p(N\,y\,B)$$

$$P(R\,y\,N)=p(R).\,P(N/R)=\frac{2}{10}.\frac{5}{9}=\frac{10}{90}=p(N\,y\,R)$$

Si A es sacar una de cada color, la probabilidad pedida es:

$$P(A)=2.\,P(B\,y\,R)+2.\,P(B\,y\,N)+2.\,P(R\,y\,N)=2.\frac{6}{90}+2.\frac{15}{90}+2.\frac{10}{90}=\frac{12+30+20}{90}=\frac{62}{90}=\frac{31}{45}$$

Apartado 3. Al menos una blanca es lo contrario de ninguna blanca. Entonces

P(al menos una blanca) = 1 – P(ninguna bola blanca) = 1-P(No blanca y No blanca)

$$P=1-P(\bar{B}\,y\,\bar{B})=P(\bar{B}).\,P(\bar{B}/\bar{B})=1-\frac{7}{10}.\frac{6}{9}=1-\frac{42}{90}=\frac{90-42}{90}=\frac{48}{90}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

1.6.3. Ejercicio 3.

En la misma bolsa del ejercicio anterior sacamos ahora 3 bolas sin reemplazamiento. Calcular:

1. Probabilidad de sacar dos rojas y una negra por este orden.
2. Probabilidad de R,R y N en cualquier orden.

Apartado 1.

$$p(R\,y\,R\,y\,N)=p(R).P(R/N).P(N/R\,y\,N)=\frac{2}{10}.\frac{1}{9}.\frac{5}{8}=\frac{10}{720}=\frac{1}{72}$$

Apartado 2. La probabilidad anterior la multiplicamos por las formas de ordenar 2 R y 1 N o sea por $\frac{(2+1)!}{2!.1!}=\frac{3!}{2!}=\frac{3.2}{2}=3$ Por lo que la probabilidad es:

$$P=3.\frac{1}{72}=\frac{1}{24}$$

1.6.4. Ejercicio 4.

Se extraen ahora 4 bolas sin reemplazamiento. Calcular:

1. Probabilidad de 2 bolas negras en cualquier orden.
2. Probabilidad de 2 negras y 2 blancas en cualquier orden.
3. Probabilidad de 2 Negras, 1 blanca y una roja en cualquier orden.
4. Al menos una blanca.

Apartado 1.

Calculamos $p(N\,y N\,y\,\bar{N}\,y\,\bar{N})$ y la multiplicamos por formas de ordenar $\{N\,N\,\bar{N}\,\bar{N}\}$ o sea por $\frac{4!}{2!.2!}=\frac{4.3.2}{2.2}=6$

Luego $p=6\,.\,p(N\,y\,N\,y\,\bar{N}\,y\,\bar{N})=6.\frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}=\frac{6.5.4}{2.2.9.7}=\frac{6.5}{9.7}=\frac{2.5}{3.7}=\frac{10}{21}$.

Apartado 2.

Calculamos $p(N\,y N\,y\,B\,y\,B)$ y la multiplicamos por las maneras de ordenar {NNBB} o sea 6 como en el apartado anterior.

$$p=6.\mathrm{p}(N\,y\,N\,y\,B\,y\,B)=6.\frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{3}{8.}\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$$.

Apartado 3.

Será la probabilidad de {NNBR} por las posibilidades de ordenar {NNBR} o sea multiplicar por : $\frac{4!}{2.!1!.1!}=\frac{4.3.2}{2}=12$ .Luego

$$p=12\,.\,p(N\,y\,N\,y\,R\,y\,B)=12\,.\frac{5}{10}.\frac{4}{9}.\frac{2}{8}.\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

Apartado 4.

Lo hacemos por el suceso contrario. A = {sacar al menos una blanca} su contrario es no sacar ninguna blanca.

$$p(A)=1-p(\bar{B}\ y\ \bar{B}\ y\ \bar{B}\ y\ \bar{B})=1-\frac{7}{10}.\frac{6}{9}.\frac{5}{8}.\frac{4}{7}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

1.6.5. Ejercicio 5.

La probabilidad de que una bomba de un avión de en el blanco es de $\frac{1}{5}$. Un avión tira cuatro bombas. Calcular:

1. Probabilidad de destruir al blanco (Al menos una bomba dé en el blanco)
2. Probabilidad de que 2 bombas den en el blanco.
3. Probabilidad de que 3 o más bombas den en el blanco.

Apartado 1. Es la probabilidad de A = {al menos una dé en el blanco}. Buscaremos la del suceso contrario, o sea ninguna dé en el blanco, luego B = {dar en el blanco}

$$p(A)=1-p(\textit{ninguna dé en el blanco})=1-p(\bar{B}\ y\ \bar{B}\ y\ \bar{B}\ y\ \bar{B})$$

Pero como $p(B)=\frac{1}{5}$ se tiene $p(\bar{B})=1-\frac{1}{5}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{5}$ luego como además que una bomba dé en el blanco no influye sobre que las demás den en el blanco, los sucesos son independientes, luego:

$$p(A)=1-p(\bar{B}).p(\bar{B}).p(\bar{B}).p(\bar{B})=\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}=1-\frac{256}{625}=\frac{625-256}{625}=\frac{369}{625}=0{,}5904$$

Apartado 2. Es la probabilidad de dos blancos y dos no blancos en cualquier orden, o sea la probabilidad $\{BB\bar{B}\bar{B}\}$. Para ello calculamos la probabilidad de $\{B\ y\ B\ y\ \bar{B}\ y\ \bar{B}\}$ y la multiplicamos por las formas de ordenar dos blancos y dos no blancos o sea por $\frac{(2+2)!}{2!.2!}=\frac{4!}{2!.2!}=\frac{4.3.2}{2.2}=6$ Luego:

$$p(\{BB\bar{B}\bar{B}\})=6.p(B).p(B).p(\bar{B}).p(\bar{B})=6.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}=6.\frac{16}{625}=\frac{96}{625}=0{,}1536$$

Apartado 3. Este suceso es que 3 bombas den en el blanco o que 4 bombas den en el blanco. Para calcular la probabilidad calcularemos la probabilidad de que tres bombas den en el blanco mas la probabilidad de que 4 bombas den en el blanco.

Por lo tanto si A es el suceso que nos piden tendremos:

$$p(A)=p(BBB\bar{B})+p(BBBB)=\frac{4!}{3!.1!}.p(B\ y\ B\ y\ B\ y\ \bar{B})+p(B\ y\ B\ y\ B\ y\ B)$$ Luego:

$$p(A)=4.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{4}{5}+\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}=\frac{16}{625}+\frac{1}{625}=\frac{17}{625}=0{,}0272$$

1.6.6. Ejercicio 6.

Se tiran 5 dados. Calcular:

1. Probabilidad de obtener 3 Ases, y dos no ases y diferentes.
2. Probabilidad de obtener 3 números iguales y otras dos números diferentes.

3. Probabilidad de obtener 4 ases y otra que no sea as en este orden.
4. Probabilidad de sacar poker o bien 4 ases en cualquier orden.

Partimos de que la tirada de varios dados siempre son sucesos independientes, ya que el resultado de un dado no influye en los demás.

Apartado 1. Como siempre habrá que calcular la probabilidad de sacar tres ases seguidos y después otro dos numeros que ninguno sea as y diferentes entre sí. Como $p(As)=p(1)=\frac{1}{6}\ \ y\ p(\bar{1})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ La probabilidad de sacar dos números que no sean as niguno y sean diferentes entre sí, será: $p(ninguno\,AS\ y\ diferentes)=\frac{5}{6}.\frac{4}{6}$. Como estos dos números pueden estar en cualquier sitio, entonces:

$$p(111\,\bar{1}\,otro)=\frac{5!}{3!.2!}.p(1\,y\,1\,y\,1\,y\,\bar{1}\,y\,otro)=\frac{5.4.3.2}{3.2.2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{4}{6}=10.\frac{20}{7776}=\frac{25}{972}$$

Apartado 2. Por el apartado anterior hemos calculado la probabilidad de obtener 3 ases y dos no ases. El suceso que nos piden es que sean tres ases y dos no ases o 3 doses y 2 no doses o sea lo mismo que el apartado anterior pero con todos los números del dado, esto nos da 6 posibilidades iguales a la del apartado uno. Por lo tanto la probabilidad pedida es multiplicar por 6 la del apartado uno. Por tanto:

$$p=6.\frac{25}{972}=\frac{25}{162}$$

Apartado 3. En este caso hay que sacar 4 ases seguidos y otra que no sea As. O sea:

$$p(1\,y\,1\,y\,1\,y\,1\,y\,\bar{1})=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}=\frac{5}{7776}$$

Apartado 4. Será lo que se ha obtenido antes, multiplicado por las formas de combinar 4 ases y otra que no sea as. O sea:

$$p(1111\,\bar{1})=\frac{5!}{4!.1!}.p(1\,y\,1\,y\,1\,y\,1\,y\,\bar{1})=\frac{5.4.3.2}{4.3.2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}=5.\frac{5}{7776}=\frac{25}{7776}$$

1.6.7. Ejercicio 7.

Un temario consta de 100 temas. De los cuales se estudian 40. Un examen consiste en elegir al azar 3 temas, de los cuales hay que saberse dos de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen?

El problema es como si en una bolsa tenemos los 100 números de los temas, y sacamos 3 bolas sin reemplazamiento ya que no podemos repetir tema. De los tres número que obtengamos tenemos que sabernos dos o más temas. Como no hay reemplazamiento hay dependencia en cada extracción.

Si llamamos S a sacar un tema que se sabe, para aprobar hay que sacar dos que se sepan o tres que se sepan, por lo tanto para aprobar habrá que sacar "dos sabidos y uno sin saber" o "los tres sabidos" o sea la probabilidad pedida se calculará así:

$$p = p(SS\bar{S}) + p(SSS) = \frac{3!}{2!.1!}.\, p(S\ y\ S\ y\ \bar{S}) + p(S\ y\ S\ y\ S) \quad \text{Luego}$$

$$p = \frac{3.2}{2}.\, p(S).\, p(S/S).\, p(\bar{S}/S\ y\ S) + p(S).\, p(S/S).\, p(S/S\ y\ S) = 3.\frac{40}{100}.\frac{39}{99}.\frac{60}{98} + \frac{40}{100}.\frac{39}{99}.\frac{38}{98}$$

$$p = \frac{280800}{970200} + \frac{59280}{970200} = \frac{340080}{970200} = 0{,}3505$$ o sea el 35% de posibilidades de aprobar, muy baja.

1.6.8. Ejercicio 8. (Propuesto)

De una baraja española se extraen dos cartas sin reemplazamiento, Calcular:

1. Probabilidad de que la primera sea oros, y la segunda no lo sea.
2. Probabilidad de que una de las dos sea copas.
3. Se extraen 5 cartas sin reemplazamiento. Probabilidad de que 3 sean copas y dos oros en cualquier orden.

1.6.9. Ejercicio 9. (Propuesto).

Se extraen 3 cartas de una baraja española de 40 cartas, no hay remplazamiento. Calcular:

1) Probabilidad de obtener 3 ases.
2) Probabilidad de dos oros y una copa, por este orden
3) Probabilidad de 3 cartas iguales
4) Probabilidad dos oros y una copa, en cualquier orden.

1.6.10. Ejercicio 10. (Propuesto).

La probabilidad de que llueva un día en una ciudad es de 0,1. ¿Cual es la probabilidad de que una semana?

1. Llueva al menos un día.
2. Lluevan uno o dos días.

1.6.11. Ejercicio 11.

Se lanzan dos dados. Calcular:

1. Probabilidad de que el primer número sea distinto de 1, y el segundo mayor o igual a 3 en este orden. (Es lo mismo que decir segundo mayor que 2).
2. Probabilidad anterior pero en cualquier orden.

El objetivo de este ejercicio es comprobar que algunas veces fallan los métodos antes expuestos para calcular la probabilidad. Analicemos el ejercicio propuesto en sus dos apartados.

Para el primer apartado consideramos el suceso A = {primer número no uno, segundo número mayor que 2} entonces: B={primero no uno} y C={segundo mayor que 2}

$$p(A)=P(B\ y\ C)=p(B).p(C)=\frac{5}{6}.\frac{4}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

Para el primer apartado esta probabilidad es correcta pero si intentamos calcular la probabilidad del segundo considerando que el suceso del segundo apartado es la unión de los sucesos {B y C} con {C y B} o sea:

$$p(\text{distinto de uno y mayor que dos en cualquier orden})=p(B\ y\ C)+p(C\ y\ B)=2*p(B\ y\ C)$$

Nos encontramos un terrible fallo que nos lleva a que algo está mal ya que nos sale que la probabilidad buscada sería $p=2.\frac{5}{9}=\frac{10}{9}$ que es un tremendo disparate por ser la probabilidad mayor que uno. ¿Dónde está el fallo? La respuesta es que todos los cálculos se hacen suponiendo que {B yC} y {C y B} son incompatibles o sea su intersección es vacía. Por eso la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades. En todos los ejercicios efectuados anteriormente esto es cierto, pero en este NO lo es, por lo tanto la probabilidad buscada NO es la suma de las probabilidades. Para comprobarlo vamos a escribir todos los sucesos elementales de ambos.

Suceso {B y C} = {primero distinto de uno , segundo mayor que 2} =
{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)} que son 20 sucesos elementales.

Suceso {C y B} o sea, lo mismo que antes pero en el otro orden , será:
{ (3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),
(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)} que son otros 20 sucesos

Evidentemente hay muchos sucesos que están en ambos sucesos, luego su intersección no es vacía. Por lo que la probabilidad buscada que es la probabilidad de la unión de ambos sucesos se deberá de calcula así:

$$p=p((B\ y\ C)\cup(C\ y\ B))=p(B\ y\ C)+p(C\ y\ B)-p((B\ y\ C)\cap(C\ y\ B))$$

Hemos de ver cual es la intersección y cuál es su probabilidad. Si observamos la intersección son simplemente ambos números sean mayores que 2. Entonces la probabilidad de esta intersección será $p=p(\text{ambos mayores que } 2)=\frac{4}{6}.\frac{4}{6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$. Luego la probabilidad del apartado 2 es: $p=\frac{5}{9}+\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

1.7. Probabilidad condicionada, dependencia de sucesos.

1.7.1. En ejemplo de introducción.

Comencemos este apartado con un sencillo problema, el cual nos servirá para construir la teoría.

En una clase de 50 alumnos se sabe que 15 han aprobado matemáticas, 20 han aprobado física, y las dos asignaturas a la vez 10 alumnos. Con estos datos se pueden hacer algunas preguntas, por ejemplo: ¿Cuántos han aprobado física pero no matemáticas? ¿Sabiendo que un alumno ha aprobado la física, cuál es la probabilidad de haber aprobado también matemáticas?. ¿Cuál es la probabilidad de no haber aprobado ni física, ni matemáticas? .

Si intentamos generalizar el problema, podemos pensar que se tiene un experimento aleatorio y en el dos sucesos, A y B. En el ejemplo propuesto sería A = {Aprobar matemáticas} y B = {Aprobar física}. Tanto en nuestro ejemplo particular como en el caso general podemos hacer una tabla resumen del experimento. Dicha tabla es la siguiente:

Resultados	A {Aprobar Mate.}	$\bar{A}$ {No aprobar Mate.}	Total
B {Aprobar F.}	$A\cap B$ (10)	$\bar{A}\cap B$ (10)	B (20)
$\bar{B}$ {No aprobar F.}	$A\cap\bar{B}$ (5)	$\bar{A}\cap\bar{B}$ (25)	$\bar{B}$ (30)
Total	A (15)	$\bar{A}$ (35)	E (50)

Las cantidades de cada casilla las hemos averiguado fácilmente, ya que si de entrada se conoce el número de sucesos elementales de A y B, los de $\bar{A}\ y\ \bar{B}$ se calculan como el total (50 alumnos) menos los que hay en A y en B respectivamente. Con esto ya es evidente que:

$$p(A)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10} \qquad p(B)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5} \qquad p(\bar{A})=\frac{35}{50}=\frac{7}{10} \qquad p(\bar{B})=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

También conocemos los que han aprobado física y matemáticas a la vez, o sea $A\cap B$ entonces como $A=A\cap E=A\cap(B\cup\bar{B})=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$ y $(A\cap B)\cap(A\cap\bar{B})=\emptyset$ los sucesos elementales de $A\cap\bar{B}$ serán los de A menos los de $A\cap B$ o sea 15 – 10 = 5. Como de forma análoga esa relación se cumple en cada fila y en cada columna, podemos calcular los de $\bar{A}\cap B$ como 20 -10 y los de $\bar{A}\cap\bar{B}$ como 30 -5 o bien como 35 -10. Por todo esto ya podemos ya responder a más preguntas. Por ejemplo:

¿Cuántos aprueban física pero no matemáticas? . Esto sería $\bar{A}\cap B$ o sea 10.
¿Cuántos no aprueban ninguna? Esto sería $\bar{A}\cap\bar{B}$ o sea 25

Todo esto nos permite gracias a las siguientes 4 propiedades obtener las siguientes 4 probabilidades.

Propiedades:

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}) \qquad \bar{A}=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$$
$$B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B) \qquad \bar{B}=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$$

Probabilidades:

$$p(A\cap B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5} \quad p(A\cap\bar{B})=\frac{5}{50}=\frac{1}{10} \quad p(\bar{A}\cap B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5} \quad p(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$$

1.7.2. Probabilidad condicionada.

La siguiente pregunta que nos podemos hacer es la siguiente: Se sabe que un alumno ha aprobado física, ¿Cuál es la probabilidad de que también tenga aprobadas las matemáticas?. La respuesta es fácil, como de los 20 alumnos que aprueban física, 10 aprueban física y matemáticas, la probabilidad buscada será: $p=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ A esta probabilidad se le llama probabilidad condicionada, y es la probabilidad de que ocurra A = {aprobar matemáticas} supuesto que B ={aprobar física} sea cierto. Esta probabilidad se escribe así $p(A/B)$.

Los resultados del ejemplo sirven para generalizar el cálculo de la probabilidad condicionada. En dicho ejemplo se tiene que:

$$p(A/B)=\frac{10}{20}=\frac{\frac{10}{50}}{\frac{20}{50}}=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$ Si generalizamos esto, podemos afirmar que:

Si E es un espacio muestral de un experimento aleatorio, y A y B son dos sucesos aleatorios del mismo. Llamamos probabilidad de A condicionada por B a la probabilidad de que ocurra A si B es cierto, y realmente es como si restringimos el espacio muestral a B y calculamos la probabilidad de A restringida a B.

Según los resultados del ejemplo, podemos calcular dicha probabilidad con la expresión:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$ Que nos permite calcularla en función de las probabilidad de B y de la intersección de A y B.

En virtud de esta expresión la probabilidad de aprobar física supuesto que las matemáticas se han aprobado es $p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{10}{50}}{\frac{15}{50}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$ Si calculamos en ejemplo todas las condicionadas posibles tenemos los siguientes resultados:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{10}{50}:\frac{20}{50}=\frac{1}{2} \qquad p(A/\bar{B})=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\frac{5}{50}:\frac{30}{50}=\frac{1}{6}$$

$$p(\bar{A}/B)=\frac{p(\bar{A}\cap B)}{p(B)}=\frac{10}{50}:\frac{20}{50}=\frac{1}{2} \qquad p(\bar{A}/\bar{B})=\frac{p(\bar{A}\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\frac{25}{50}:\frac{30}{50}=\frac{5}{6}$$

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{10}{50}:\frac{15}{50}=\frac{2}{3} \qquad p(B/\bar{A})=\frac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})}=\frac{10}{50}:\frac{35}{50}=\frac{2}{7}$$

$$p(\bar{B}/A)=\frac{p(A\cap\bar{B})}{p(A)}=\frac{5}{50}:\frac{15}{50}=\frac{1}{3} \qquad p(\bar{B}/\bar{A})=\frac{p(\bar{A}\cap\bar{B})}{p(\bar{A})}=\frac{25}{50}:\frac{35}{50}=\frac{5}{7}$$

La probabilidad condicionada en este capítulo es semejante a la estudiada dentro del espacio producto, aunque no es necesariamente la misma ya que entonces el contexto era diferente. En el espacio producto la probabilidad condicionada hace referencia a un espacio muestral de un experimento que se repite varias veces, y se estudia el efecto que cada repetición sobre la siguiente. Ahora es un sólo experimento y se estudia el efecto de un suceso sobre otro pero dentro de un sólo experimento, no dentro de una serie de experimentos repetidos.

1.7.3. Sucesos independientes en un espacio muestral.

Cuando repetíamos un experimento se dijo que cada repetición podía influir o no sobre la siguiente, cuando no influía se decía que los sucesos eran independientes, cuando sí influía se decía que eran dependientes. Ahora podemos hacer lo mismo:

Si A y B son dos sucesos de un experimento aleatorio decimos que son independientes si el **resultado de uno no influye sobre otro, o sea:** $p(A)=p(A/B)$ cuando esto ocurre, se tiene:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A) \quad \text{de donde} \quad p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

Recíprocamente, si $p(A\cap B)=p(A).p(B)$ entonces:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A)$$ y los sucesos A y B son independientes. Luego

Dos sucesos A y B son independientes cuando y solamente cuando:

$$p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

Evidentemente si **no son independientes** se tendrá que: $p(A\cap B)\neq p(B).p(A/B)$

Si A es independiente de B, entonces B es independiente de A ya que:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{p(A).p(B)}{p(A)}=p(B)$$

Por lo tanto **concluimos que dos sucesos A y B son independientes cuando, y solamente cuando:**

$p(A\cap B)=p(A).p(B)$ **y por lo tanto** $p(A/B)=p(A)\ y\ p(B/A)=p(B)$

Por el contrario si son dependientes $p(A\cap B)=p(A).p(B/A)=p(B).p(A/B)$

En ejemplo ya estudiado: $p(A\cap B)=\frac{10}{50}$ $p(A).p(B)=\frac{15}{50}.\frac{20}{50}=\frac{3}{10}.\frac{2}{5}=\frac{6}{50}$ Como son diferentes A y B son sucesos dependientes, o sea aprobar física si influye sobre aprobar matemáticas.

1.7.4. Segundo ejemplo.

En un determinado grupo de personas, la probabilidad de tener menos de 20 años es de 2/7. La probabilidad de estar entre 20 y 40 es de 4/7. Por otra parte la probabilidad de contraer una enfermedad supuesto que se es menor de 20 años es de 1/10 . La probabilidad de estar entre 20 y 40 y estar sano es de 3/7 y para finalizar, la probabilidad de estar enfermo supuesto que se es mayor de 40 años es de 3/5.

Hacemos el esquema siguiente:

Llamamos suceso A={ser menor de 20 años}, suceso B = {estar entre 20 y 40} y suceso C={ser mayor de 40}. Por otra parte suceso S = {estar sano} y suceso F={Estar enfermo}. Vamos a ir calculando algunos resultados del problema.

En primer lugar es evidente que $E=A\cup B\cup C$ y también $E=S\cup F$ y además $S\cap F=\emptyset$ y también $A\cap B=\emptyset$ $A\cap C=\emptyset$ $B\cap C=\emptyset$ $A\cap B\cap C=\emptyset$

Los datos del problema son $p(A)=\frac{2}{7}$ $p(B)=\frac{4}{7}$ *luego* $p(C)=1-p(A)-p(B)=\frac{1}{7}$

además: $p(F/A)=\frac{1}{10}$ $p(B\cap S)=\frac{3}{7}$ $p(F/C)=\frac{3}{5}$ Con estos datos podemos calcular de forma inmediata:

$$p(A\cap F)=p(F/A).\,p(A)=\frac{1}{10}.\frac{2}{7}=\frac{1}{35} \qquad p(A\cap S)=p(A)-p(A\cap F)=\frac{2}{7}-\frac{1}{35}=\frac{9}{35}$$

$$p(B\cap F)=p(B)-p(B\cap S)=\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$ además

$$p(C\cap F)=p(F/C).\,p(C)=\frac{3}{5}.\frac{i}{7}=\frac{3}{35} \qquad p(C\cap S)=p(C)-p(C\cap F)=\frac{1}{7}-\frac{3}{35}=\frac{2}{35}$$

Con esto podemos hacer la tabla siguiente:

	A < 20	B Entre 20y 40	C > 40	Total
S (sanos)	$A\cap S(\frac{9}{35})$	$B\cap S(\frac{3}{7})$	$C\cap S(\frac{2}{35})$	$p(S)=\frac{26}{35}$
F (enfermos)	$A\cap F(\frac{1}{35})$	$B\cap F(\frac{1}{7})$	$C\cap F(\frac{3}{35})$	$p(F)=\frac{9}{35}$
Total	$p(A)=\frac{2}{7}$	$p(B)=\frac{4}{7}$	$p(C)=\frac{1}{7}$	$p(E)=1$

Donde $p(S)$ y $p(F)$ se calculan sumando las probabilidades de las correspondientes filas. O sea:

$p(S)=p(A\cap S)+p(B\cap S)+p(C\cap S)$ y también:
$p(E)=p(A\cap E)+p(B\cap E)+p(C\cap E)$

Con estos datos ya podríamos además calcular cualquier otra probabilidad condicionada, como las probabilidad de supuesto que se es menor de 20 estar sano.

$$p(S/A)=\frac{p(A\cap S)}{p(A)}=\frac{\frac{9}{35}}{\frac{2}{7}}=\frac{9}{10} \quad \text{También} \quad p(S/B)=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{4} \quad p(S/C)=\frac{\frac{2}{35}}{\frac{1}{7}}=\frac{2}{5}$$

O bien las probabilidades de estar en A, B, o C si se está enfermo son:

$$p(A/F)=\frac{\frac{1}{35}}{\frac{9}{35}}=\frac{1}{9} \quad p(B/F)=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{9}{35}}=\frac{5}{9} \quad p(C/F)=\frac{\frac{3}{35}}{\frac{9}{35}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

Como además $p(A\cap S)=\frac{9}{35}$ $p(A).p(S)=\frac{2}{7}.\frac{26}{35}$ son diferente, los sucesos A y S son dependientes.

1.7.5. Teorema de la probabilidad total.

Supongamos un espacio muestral E de un experimento aleatorio. Sean $A_{1,} A_{2,} A_3 ..... A_n$ n sucesos aleatorios mutuamente incompatibles, o sea, la intersección de cualquier par de ellos es vacía. Luego

$A_i \cap A_j = \emptyset$ para cualquier par i, j.

Se cumple además que $E=A_1\cup A_2\cup A_3\cup ...\cup A_n$ por lo que:

$p(E)=1=p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)+...+p(A_n)$.

Sea también un suceso B, siendo supuestamente conocidas las probabilidades condicionadas de B respecto a los otros sucesos, o sea $p(B/A_1), p(B/A_2)... p(B/A_n)$.

Entonces podemos calcular $p(B)$ en función de las otras probabilidades, y la expresión de esta probabilidad es el teorema de la probabilidad total. Veamos cuál es dicha expresión:

Por ser $E=A_1\cup A_2\cup A_3\cup ...\cup A_n$ entonces $B=B\cap E=B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3\cup ...\cup A_n)$

luego $B=(B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup .....\cup(B\cap A_n)$

como $(B\cap A_i)\cap(B\cap A_j)=B\cap(A_i\cap A_j)=A\cap\emptyset=\emptyset$

$p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+p(A\cap A_3)+....+p(B\cap A_n)$ pero como

$p(B\cap A_i)=p(A_i).\,p(B/A_i)$ se llega al mencionado teorema, cuya expresión es:

$$p(B)=p(A_1).\,p(B/A_1)+p(A_2).\,p(B/A_2)+p(A_3).\,p(B/A_3)+....+p(A_n).\,p(B/A_n)$$

1.7.5.1. Ejemplo del teorema de la probabilidad total.

Supongamos 3 bolsas, en la primera hay 3 bolas blancas y dos negras. En la segunda 2 blancas y 6 negras. En la tercera 10 blancas y 8 negras.

Se elige una bolsa (cada una tiene probabilidad 1/3 de salir) y se extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Es un caso del teorema de la probabilidad total, donde A_1 es elegir la primera bolsa, $A_2 y A_3$ la segunda y la tercera bolsa. Por el enunciado: $p(B/A_1)=\frac{3}{5}$ $p(B/A_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ y $p(B/A_3)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$ Entonces por el teorema de la probabilidad total:

$$p(B)=p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)=\frac{1}{3}.\frac{3}{5}+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{3}.\frac{5}{9}$$
$$p(B)=\frac{1}{3}.(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}+\frac{5}{9})=\frac{1}{3}.(\frac{108+45+100}{180})=\frac{253}{3.180}=\frac{253}{540}$$

1.7.6. Teorema de Bayes.

Supongamos el mismo contexto del teorema de la probabilidad total. Como hemos visto podemos calcular $p(B)$ conocidas las probabilidades $p(A_i)$ y $p(B/A_i)$. Pero ahora también estamos interesados en calcular las probabilidades $p(A_i/B)$, o sea, supuesto que el suceso B es cierto, ¿Cuál es la probabilidad de cada A_i ? . La expresión de dichas probabilidades se llama teorema de Bayes.

Supongamos que A_i es uno cualquiera de los sucesos, entonces:

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A_i).p(B/A_i)}{p(B)}$$

Como la expresión de la $p(B)$ la da el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i).p(B/A_i)}{p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)+...+p(A_n).p(B/A_n)}$$

Que es la expresión del teorema de Bayes.

1.7.6.1. Ejemplo del Teorema de Bayes.

Supongamos el mismo ejemplo que en el teorema de la probabilidad total. En este ejemplo se preguntaba por la probabilidad de extraer una bola blanca cuando se elegía una bolsa al azar y luego se extraía una bola de ella.

Formulemos la siguiente pregunta: Se saca una bola, se comprueba que es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga de la primera bolsa?.

En este caso nos preguntan por $p(A_1/B)$ que podemos calcular directamente por el teorema de Bayes, ya que:

$$p(A_1/B)=\frac{p(A_1).p(B/A_1)}{p(B)}=\frac{p(A_1).p(B/A_1)}{p(A_1).p(B/A_1)+p(A_2).p(B/A_2)+p(A_3).p(B/A_3)}$$

Como el denominador es $p(B)$ ya antes calculada, entonces:

$$p(A_1/B)=\frac{\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{5}}{253}}{540}=\frac{540}{253.5}=\frac{108}{253} \quad \text{de igual forma} \quad p(A_2/B)=\frac{\frac{\frac{1}{3.4}}{253}}{540}=\frac{540}{253.3.4}=\frac{45}{253}$$

Y de la misma manera:

$$p(A_3/B)=\frac{\frac{\frac{1.5}{3.9}}{253}}{540}=\frac{540.5}{253.3.9}=\frac{20.5}{253}=\frac{100}{253}$$

1.7.7. Ejemplos (Propuestos).

1.7.7.1. Ejemplo 1.

En un grupo de personas la probabilidad de ser rubio es de 2/10, la probabilidad de ser castaño es de 3/10, y evidentemente en caso de no ser ni rubio, ni castaño, se es moreno.

Se sabe además la probabilidad de ser rubio y tener los ojos azules es de 17/100. La probabilidad de tener los ojos marrones sabiendo que se es castaño es de 4/10 y la probabilidad de tener ojos marrones y ser moreno es 4/10.

1. Hacer un cuadro resumen con la situación.
2. Calcular la probabilidad de tener los ojos azules, y la de tener los ojos marrones.
3. Calcular de suponiendo que se tienen los ojos azules supuesto que se es rubio.
4. Calcular la probabilidad de ser rubio supuesto que se tienen los ojos azules.
5. Calcular la probabilidad de ser moreno supuesto que los ojos son marrones.

1.7.7.2. Ejemplo 2.

Un arquero tiene 4 blancos, elige uno al azar y lanza dos flechas a dicho blanco. La probabilidad de acertar una flecha en el primer blanco es 1/3, en el segundo 2/5 y en tercero 1/5.

1. Cual es la probabilidad de que al menos una de las dos flechas den en el blanco.
2. Se sabe que una de las dos flechas han dado en el blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que sea en la segunda diana?.
3. Se sabe que ambas flechas dieron en el blanco. ¿Cuál es la probabilidad de que sea en la primera diana?.
4. Ninguna flecha da en el blanco. ¿Cuál es la probabilidad de haberlo intentado en la tercera diana?

1.7.7.3. Ejemplo 3.

En un grupo de individuos el 40% son aficionados a un deporte y el 60% a otro deporte. Si ser aficionado al primer deporte no influye sobre la afición al segundo. Calcular:

1. La probabilidad de ser aficionado a ambos deportes.
2. La probabilidad de no ser aficionado a ninguno de ellos.

1.8. Índice.

Índice de contenido