

2. Variables aleatorias.

2.1. Conceptos generales de variables aleatorias.

2.1.1. Definición.

Consideremos un experimento aleatorio. Sea E su espacio muestral, que tal como se definió en el capítulo anterior es el conjunto de todos los sucesos elementales del experimento.

Supongamos ahora que establecemos una **función** X entre los **sucesos elementales** del experimento y los **números reales**, o sea, entre E y R . Por ser X una función se cumplirán las dos condiciones siguientes:

1. Todo suceso elemental tendrá su correspondiente número real como imagen, sin quedar ninguno suceso elemental sin la imagen.
2. A un suceso elemental le corresponde sólo una imagen, y sólo una, o sea, a un suceso elemental no se le pueden hacer corresponder dos o más números, sólo le corresponde uno. Entonces a esta función así establecida le llamamos **variable aleatoria**.

Una **variable aleatoria** consiste pues en **establecer una función** entre el espacio muestral y los números reales.

Una variable aleatoria **si puede a dos sucesos elementales diferentes hacerles corresponder el mismo número real, lo que no puede es a un suceso elemental hacerle corresponder dos números diferentes.**

De esta forma, si llamamos X a la variable aleatoria, entonces: $X: E \rightarrow R$ y para cada suceso elemental e_i de E , $X(e_i) = X_i$ donde X_i es un número real cualquiera. Cumpliéndose que para todo suceso elemental $e \in E$ existe $X(e)$ y además si $e_1 = e_2$ entonces $X(e_1) = X(e_2)$.

2.1.2. Ejemplos de variables aleatorias.

2.1.2.1. Ejemplo 1. Lanzamiento de una moneda.

Es el ejemplo más sencillo que se puede poner, supongamos el lanzamiento de una moneda. En este caso $E = \{\text{cara, cruz}\}$. Si le hacemos corresponder al suceso elemental $\{\text{cara}\}$ el número cero, y al suceso elemental $\{\text{cruz}\}$ el número uno, habremos establecido una variable aleatoria, a la cual podemos llamar X , de manera que: $X: E \rightarrow R$ donde $E = \{\text{cara, cruz}\}$ y está definida así:

$X(\text{cara}) = X_1 = 0$ y $X(\text{cruz}) = X_2 = 1$, por lo que dicha variable aleatoria toma sólo dos valores, el cero y el uno.

2.1.2.2. Ejemplo 2. Lanzamiento de un dado.

Supongamos que lanzamos un dado, podemos definir una variable aleatoria también muy sencilla, a cada suceso elemental o número del dado le hacemos corresponder el número que nos sale, así si X es dicha variable aleatoria, se tendrá que:

Si $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Entonces se define la variable aleatoria X , de manera que:

$X_1=X(1)=1$ $X_2=X(2)=2 \dots X_6=X(6)=6$ esta variable aleatoria toma sólo 6 valores posibles, que son los números del 1 al 6. Y cumple evidentemente las dos condiciones de la variable aleatoria.

2.1.2.3. Ejemplo 3. Sacar una bola de una bolsa.

Supongamos una bolsa con 3 bolas blancas, 5 negras y 2 rojas, y el experimento de sacar una bola de la bolsa.

Podemos definir una variable aleatoria X , de manera que si sacamos bola blanca toma el valor 1, si sale negra, el valor 2, y si sale roja el valor 3, o sea:

Si $E=\{b1,b2,b3,n1,n2,n3,n4,n5,r1,r2\}$ definimos X de la forma siguiente:

$$X(b1)=X(b2)=X(b3)=1=X_1$$

$$X(n1)=X(n2)=X(n3)=X(n4)=X(n5)=2=X_2$$

$$X(r1)=X(r2)=3=X_3$$

En este caso como vemos la variable toma el mismo número para todos los sucesos elementales con el mismo color de bola. No importa, la variable aleatoria está bien definida ya que a un suceso elemental le corresponde un sólo valor, y para todos los sucesos elementales está definida la variable aleatoria.

Si $A = \{\text{sacar blanca}\} = \{b1,b2,b3\}$ es inmediato que la variable toma para todos los sucesos elementales de A el valor 1, si B es $B=\{\text{sacar negra}\}$ sobre B toma el valor 2 y $C=\{\text{sacar roja}\}$ toma el valor 3. Luego:

$A=\{b1,b2,b3\}=\{e \in E / X(e)=1\}$ o sea conjunto de sucesos tales que para ellos la variable toma el valor 1. De igual forma:

$$B=\{n1,n2,n3,n4,n5\}=\{e \in E / X(e)=2\} \text{ y}$$

$$C=\{r1,r2\}=\{e \in E / X(e)=3\}$$

2.1.2.4. Ejemplo 4. Lanzar dos dados.

Supongamos el experimento de lanzar dos dados, y una variable aleatoria que consiste en sumar los número que nos salen. De esta forma la variable X , toma los valores siguientes:

Para el suceso elemental: (1,1) el valor 2, o sea $X_1=2$.

Para los sucesos elementales.: (1,2),(2,1) toma el valor 3, $X_2=3$.

luego en: (1,3),(2,2),(3,1) toma el valor 4, $X_3=4$.

(1,4),(2,3),(3,2),(4,1) el valor 5, $X_4=5$.

(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1) el valor 6, $X_5=6$.

(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) el valor 7, $X_6=7$.

(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2) el valor 8, $X_7=8$.

(3,6),(4,5),(5,4),(6,3) el valor 9, $X_8=9$

(4,6),(5,5),(6,4) el valor 10, $X_9=10$.

(5,6),(6,5) el valor 11, $X_{10}=11$.

y para: (6,6) el valor 12, $X_{11}=12$.

Ahora la variable aleatoria X , toma los valores del 2 al 12.

Evidentemente $\{e \in E / X(e)=7\} = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

2.1.2.5. Ejemplo 5. Sacar una carta de una baraja.

Supongamos una baraja española, si consideramos el experimento de sacar una carta de la baraja podemos definir una variable que a dicha carta le corresponda el número que salga (del uno al siete), pero además a la sota le corresponda un 8, al caballo 9 y al rey 10. En este caso la variable aleatoria toma los valores del uno al 10. Por lo que por ejemplo si $X(\text{as oros})=1$, $X(\text{sota de copas})=8$ etc

2.1.2.6. Ejemplo 6. elegir una persona entre los habitantes de una nación.

Supongamos que elegimos a una persona entre los habitantes de una nación, y tomamos como variable aleatoria la que hace corresponder a dicha persona su altura. En este caso la variable no toma un número pequeño de valores muy determinados, en este caso la variable toma un intervalo grande de valores por ejemplo entre 30 cm. (se incluyen bebés) y 2,30 m. y entre esos valores puede tomar cualquiera incluso con varios decimales.

2.1.3. Tipos de variables aleatorias.

Comparando entre las variables aleatorias de los 5 primeros ejemplos y la variable aleatoria del último podemos ver que las 5 primeras sólo toman un número finito de valores y que además entre dos valores no toman ningún otro. Sin embargo la variable del último ejemplo puede tomar un número en teoría infinito de valores dentro de un intervalo de valores, y cualquier número de dicho intervalo puede ser tomado.

Las variables aleatorias de los cuatro primeros ejemplos, **se llaman variables aleatorias discretas**, son las habituales para los experimentos aleatorios típicos. Se insiste **sólo pueden tomar un número determinado de valores, de manera que entre dos valores no toman ningún otro**. En el caso de que el espacio muestral sea infinito (formado por infinitos sucesos elementales) pueden tomar un número infinito de valores, pero de manera que entre dos valores, no pueden tomar otro.

La variable aleatoria de **sexto ejemplo se llama continua** y es justo lo contrario de la discreta, puede tomar **infinitos valores en un intervalo de los mismos**.

Vamos a estudiar detalladamente los dos tipo de variables, y además veremos los ejemplos principales de cada una, que son las **variables aleatorias binomial, poison y normal**.

2.2. Variables aleatorias discretas.

2.2.1. Definición.

Por lo dicho anteriormente es una **función** entre los sucesos elementales de un espacio muestral de un experimento aleatorio y los números reales, de manera que sólo toma un número determinado de valores por lo que entre dos valores no puede tomar ningún otro. En las variables aleatorias discretas hay 4 cuestiones básicas que definiremos a continuación y que son:

2.2.2. Función de probabilidad.

Es la fundamental en este tipo de variables, y se define así:

Si la variable **aleatoria discreta** X que toma los valores $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$, en un espacio muestral. E .

Consideremos todos los suceso aleatorios A_i definidos así:

$$A_i = \{e \in E / X(e) = X_i\} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Entonces para cada valor que toma la variable aleatoria podemos calcular la probabilidad de que tome dicho valor, o sea definimos:

$$P_i = P(X = X_i) = P(A_i) = p(\{e \in E / X(e) = X_i\}) \quad \text{con } i = 1, 2, 3, 4, \dots$$

P_i es pues la probabilidad del suceso A_i , que es el suceso para el cual la variable toma el valor X_i , o sea, la probabilidad de que X tome el valor X_i .

Evidentemente como cada P_i es una probabilidad y se cumplirá que $0 \leq P_i \leq 1$.

La **función que a cada valor que toma la variable aleatoria le hace corresponder la probabilidad de que tome dicho valor se llama función de probabilidad**, y hace corresponder a cada valor de X_i de la variable discreta su probabilidad P_i .

La función de probabilidad debe de cumplir una **propiedad fundamental** para que esté bien definida y sea en realidad una función de probabilidad, que consiste en que **la suma de todos los valores que toma sea uno**. O sea $\sum P_i = \sum p(X = X_i) = 1$.

La razón de la anterior es que si la variable aleatoria está bien definida, a todo suceso del espacio muestral le corresponde un número. Esto sólo se cumple si y sólo si $\sum P_i = 1$. Que es pues la condición necesaria y suficiente para que la variable aleatoria esté bien definida.

Veamos cual es la función de probabilidad en las variables aleatorias de los anteriores ejemplos.

2.2.2.1. Ejemplo de la moneda. (2.1.2.1)

La variable aleatoria sólo toma dos valores $X_1 = 0$ $X_2 = 1$, sobre la cara y la cruz, luego:

$P_1 = p(X=0) = p(\text{cara}) = \frac{1}{2}$ y $P_2 = p(X=1) = p(\text{cruz}) = \frac{1}{2}$. Estos valores de la función de probabilidad para variables discretas pueden ser escritos en forma de una sencilla tabla parecida a las tablas estadísticas de la siguiente forma.

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
0	1/2
1	1/2
Suma	1

2.2.2.2. Ejemplo de un sólo dado. (2.1.2.2)

En este caso los valores de X son del 1 al 6, y la probabilidad de que salga cualquiera de ellos es la probabilidad de que salga el correspondiente número. Luego

$P_1 = p(X=1) = P_2 = p(X=2) = \dots = P_6 = p(X=6) = \frac{1}{6}$ y en forma de tabla:

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Suma	1

2.2.2.3. Ejemplo de la bolsa y las bolas. (2.1.2.3)

En este caso la variable toma 3 valores 1,2,3 y los valores de las probabilidades son los siguientes:

$P_1 = p(X=1) = p(\text{Blanca}) = \frac{3}{10}$ $P_2 = p(X=2) = p(\text{negra}) = \frac{5}{10}$ $P_3 = p(X=3) = p(\text{roja}) = \frac{2}{10}$

La tabla será así:

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
1	3/10
2	5/10
3	2/10
Suma	1

2.2.2.4. Ejemplo de los dos dados. (2.1.2.4)

En este caso los valores que toma la variable son de $X=2$ a $X=12$, las probabilidades de cada un son:

$$P_1 = p(X=2) = p(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P_2 = p(X=3) = p(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P_3 = p(X=4) = p(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P_4 = p(X=5) = p(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36} \text{ de igual forma}$$

$$P_5 = p(X=6) = \frac{5}{36} \quad P_6 = p(X=7) = \frac{6}{36} \quad P_7 = p(X=8) = \frac{5}{36} \quad \dots \quad P_{11} = p(X=12) = \frac{1}{36}$$

En forma de tabla:

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
Suma	1

Se puede observar que la suma de la columna de las probabilidades es siempre 1. Esto es siempre así. Una variable aleatoria sólo está bien definida si la suma de las probabilidades en la función de probabilidad es uno. En caso contrario no estaría bien definida y no sería una variable aleatoria.

2.2.3. Función de distribución.

Se define como la probabilidad F_i de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a uno dado, p sea $F_i = p(X \leq X_j)$. Es muy fácil obtener ese valor, basta sumar todos los valores para los cuales la variable sea más pequeña o igual que el buscado. Por ejemplo para el lanzamiento de los dos dados (2.1.2.4):

$$F_5 = p(X \leq 5) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

En el caso de la bolsa y las bolas

$$F_2 = p(X \leq 2) = p(X=1) + p(X=2) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10}$$

Por lo que la función de distribución se define de forma correcta así:

$$F_i = p(X \leq X_i) = p(X=X_1) + p(X=X_2) + \dots + p(X=X_i) = \sum_1^i P_i$$

Si en una tabla de la función de probabilidad añadimos una columna con las probabilidades acumuladas, tendríamos una columna con la función de distribución. Por ejemplo en el caso de la extracción de la bola:

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$	$F_i = P(X \leq X_i)$
1	3/10	3/10
2	5/10	8/10
3	2/10	1
Suma	1	

La columna F_i añadida corresponde a la de la función de distribución.

2.2.4. Media o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta.

Se define de una forma parecida a la media de las variables estadísticas, si X es una variable aleatoria entonces $\bar{X} = \sum X_i \cdot P_i$. A la media también se le llama esperanza matemática y se escribe como $E(X)$.

Utilizando las tablas es muy fácil calcular la media, es prácticamente igual a como se calculaban las medias de las variables estadísticas, así en la variable de la suma de los números del dado (2.1.2.4):

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$	$X_i \cdot P_i$
2	1/36	2/36
3	2/36	6/36
4	3/36	12/36
5	4/36	20/36
6	5/36	30/36
7	6/36	42/36
8	5/36	40/36
9	4/56	36/36
10	3/36	30/36
11	2/36	22/36
12	1/36	12/36
Suma	1	252/36

Luego $\bar{X} = \frac{252}{36} = 7$ o sea la media de esta variable es siete. Siempre se hace igual en la tabla de la variable se hace la columna $X_i \cdot P_i$ y se suma, el resultado es la media de la variable

2.2.5. Varianza y desviación típica.

Definimos la varianza de la variable aleatoria discreta como la media del cuadrado de desviaciones respecto a la media. O sea:

$$V = \sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot P_i = \sum (X_i^2 - 2 \cdot \bar{X} \cdot X_i + \bar{X}^2) \cdot P_i = \sum X_i^2 \cdot P_i - 2 \cdot \bar{X} \cdot \sum X_i \cdot P_i + \bar{X}^2 \cdot \sum P_i$$

$$V = \sum X_i^2 \cdot P_i - 2 \cdot \bar{X} \cdot \bar{X} + \bar{X}^2 = \sum X_i^2 \cdot P_i - \bar{X}^2$$

y también definimos la *Desviación Típica* $\sigma = \sqrt{V}$. Es frecuente llamar a la varianza el cuadrado de la desviación típica, o sea: $\sigma^2 = V = \sum X_i^2 \cdot P_i - \bar{X}^2$.

La varianza la calculamos introduciendo la columna $X_i^2 \cdot P_i$ sumándola y luego restando el cuadrado de la media. Así en la variable aleatoria del lanzamiento de un sólo dado (2.1.2.2).

X_i	P_i	$X_i \cdot P_i$	X_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
1	1/6	1/6	1	1/6
2	1/6	2/6	4	4/6
3	1/6	3/6	9	9/6
4	1/6	4/6	16	16/6
5	1/6	5/6	25	25/6
6	1/6	6/6	36	36/6
Suma	1	21/6		91/6

$$\bar{X} = \frac{21}{6} = 3,5 \quad \sigma^2 = V = \frac{91}{6} - \frac{21 \cdot 21}{36} = \frac{91 \cdot 6 - 21 \cdot 21}{36} = \frac{546 - 441}{36} = \frac{105}{36} = 2,91666$$

$$\sigma = \sqrt{(2,91)} = 1,70$$

2.2.6. Ejercicios

2.2.6.1. Ejercicio 1.

En un experimento aleatorio se define una variable aleatoria X con la siguiente tabla correspondiente a una función de probabilidad.

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
1	0,1
2	0,2
3	x

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
4	0,3
5	0,1
6	0,1
Suma	1

1. Que valor debe de tener “x” para que la variable esté bien definida.
2. Calcular $P(X < 4)$ $P(2 \leq X < 6)$ $P(X \leq 2)$ $P(X > 5)$
3. Mediante el suceso contrario calcular $P(X > 1)$ y $P(X < 6)$
4. Calcular la media
5. Calcular varianza y desviación típica.

Apartado 1. Para que la función de probabilidad esté bien definida, es necesario que la suma de todos sus valores $\sum P_i$ sea 1, pero si sumamos:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_6 = 0,1 + 0,2 + x + 0,3 + 0,1 + 0,1 = 0,8 + x = 1 \text{ de donde } 0,8 + x = 1 \text{ luego } x = 1 - 0,8 = 0,2$$

Por lo que para que la tabla esté bien definida el valor que falta debe de ser 0,2. La tabla completa será:

X_i (valores de X)	$P_i = P(X = X_i)$
1	0,1
2	0,2
3	0,2
4	0,3
5	0,1
6	0,1
Suma	1

Apartado 2. Calculemos las probabilidades que se piden:

$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$.O Sea se suman las probabilidades para valores de X por debajo de 4, sin incluir el cuatro.

$P(2 \leq X < 6) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,2 + 0,2 + 0,3 + 0,1 = 0,8$. Se suma las probabilidades para valores entre 2 y 6 incluyendo el 2, sin incluir el 6.

$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 = 0,3$. Se suman las probabilidades para valores de X menores que 2 incluyendo el dos.

$P(X > 5) = P(X = 6) = 0,1$ O sea para valores mayores que cinco, sin incluir el 5.

Apartado 3. Lo contrario a que $X > 1$ será $X \leq 1$. Si queremos calcular directamente la $P(X > 1)$ tendríamos que calcular la $P(X = 2), P(X = 3) \dots P(X = 6)$ y sumarlas. Sin embargo por el suceso contrario es más fácil ya que:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 1)) = 1 - (0,1) = 0,9$$

Lo contrario a $X < 6$ es $X \geq 6$

$$\text{Luego } P(X < 6) = 1 - P(X \geq 6) = 1 - P(X = 6) = 1 - 0,1 = 0,9$$

Apartados 4 y 5. Calculemos la tabla para el apartado:

X_i	$P_i = P(X = X_i)$	$X_i \cdot P_i$	X_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
1	0,1	0,1	1	0,1
2	0,2	0,4	4	0,8
3	0,2	0,6	9	1,8
4	0,3	1,2	16	4,8
5	0,1	0,5	25	2,5
6	0,1	0,6	36	3,6
Sumas	1	3,4		13,6

Entonces:

$$\bar{X} = \sum X_i \cdot P_i = 3,4 \quad \text{y} \quad \sigma^2 = V = \sum X_i^2 \cdot P_i - \bar{X}^2 = 13,6 - (3,4)^2 = 13,6 - 11,56 = 2,04$$

$$\text{y } \sigma = \sqrt{V} = \sqrt{2,04} = 1,4281$$

2.2.6.2. Ejercicio 2.

Se tiene una bolsa con 10 bolas, 2 Negras, 2 Rojas 3 Blancas y 3 azules. Se considera el experimento de sacar una bola de la bolsa. Se define una variable aleatoria X así definida.

$$X_1 = X(\text{negra}) = 0 \quad X_2 = X(\text{Roja}) = 1 \quad X_3 = X(\text{Blanca}) = 2 \quad X_4 = X(\text{azul}) = 3$$

Calcular su función de probabilidad, la media, varianza y desviación típica.

La función de probabilidad es muy simple:

$$P_1 = P(X = 0) = p(\text{negra}) = \frac{2}{10} \quad P_2 = P(X = 1) = p(\text{Roja}) = \frac{2}{10}$$

$$P_3 = P(X = 2) = p(\text{blanca}) = \frac{3}{10} \quad P_4 = P(X = 3) = p(\text{azul}) = \frac{3}{10}$$

La tabla con esta función y para hacer los cálculos de la media y desviación típica será así:

X_i	$P_i = P(X = X_i)$	$X_i \cdot P_i$	X_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
0	0,2	0	0	0
1	0,2	0,2	1	0,2
2	0,3	0,6	4	1,2
3	0,3	0,9	9	2,7

X_i	$P_i = P(X = X_i)$	$X_i \cdot P_i$	X_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
Sumas	1	1,7		4,1

$$\bar{X} = \sum X_i \cdot P_i = 1,7 \quad \sigma^2 = V = 4,1 - (1,7)^2 = 4,1 - 2,89 = 1,21 \quad \sigma = \sqrt{1,21} = 1,1$$

2.2.6.3. Ejercicio 3.

Se tiene una bolsa con 8 bolas, 5 blancas y 3 negras. Se extraen dos bolas con reemplazamiento. Se define una variable aleatoria de manera que toma el valor 0 si las dos bolas son blancas, toma el valor 1 si son una bola de cada color, y toma el valor 2 si las dos son negras.

Calcular:

1. Función de probabilidad, y comprobar que está bien definida.
2. Media, varianza y desviación típica.

Apartado 1. Por la definición dada:

$$P_1 = P(X=0) = P(B, B) = p(B) \cdot p(B) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$$

$$P_2 = P(X=1) = P(B, N) = 2 \cdot P(B \text{ y } N) = 2 \cdot p(B) \cdot p(N) = 2 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{64}$$

$$P_3 = p(X=2) = P(N, N) = P(N) \cdot P(N) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

$$\text{Está bien definida ya que } P_1 + P_2 + P_3 = \frac{25}{64} + \frac{30}{64} + \frac{9}{64} = \frac{25+30+9}{64} = \frac{64}{64} = 1$$

X_i	$P_i = P(X = X_i)$	$X_i \cdot P_i$	X_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
0	25/64	0	0	0
1	30/64	30/64	1	30/64
2	9/64	18/64	4	36/64
Sumas	1	48/64		66/64

$$\bar{X} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4} \quad \sigma^2 = V = \frac{66}{64} - \left(\frac{48}{64}\right)^2 = \frac{33}{32} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{32} - \frac{9}{16} = \frac{33}{32} - \frac{18}{32} = \frac{15}{32}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15}{32}}$$

2.2.7. Ejercicios propuestos.

2.2.7.1. Ejercicio 1.

La tabla de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta es la siguiente:

X_i	$P_i = p(X = X_i)$
0	0,05
2	0,10
4	0,15
6	x
8	x+0,07
10	x
12	0,15
14	0,10
16	0,05

Calcular:

1. Calcular x para que la función de probabilidad esté bien definida.
2. La columna de la función de distribución, o sea $F_i = p(X \leq X_i)$
3. Media, varianza y desviación típica de la variable aleatoria.

2.2.7.2. Ejercicio 2.

Se lanzan tres dados, se define una variable aleatoria de manera que si los tres números son distintos toma el valor 0, si hay dos iguales toma el valor uno, y si los tres son iguales toma el valor 2.

1. Hacer la tabla de la función de probabilidad y de distribución.
2. Comprobar que está bien definida.
3. Calcular la media, varianza y desviación típica.

2.2.7.3. Ejercicio 3.

Un arquero tiene dos blancos, en el primero las probabilidades de obtener 10, 20, 30, 40, 50 puntos son $5/16$, $4/16$, $3/16$, $2/16$ y $1/16$ respectivamente, la de no acertar es de $1/16$. En el segundo las probabilidades de obtener 10, 20, 30, 40, 50 puntos son $9/32$, $7/32$, $5/32$, $3/32$ y $1/32$ respectivamente, la de no acertar es de $7/32$. El arquero elige un blanco al azar sabiendo que la probabilidad del primer blanco es $1/3$ y la del segundo es $2/3$ y lanza una flecha.

Se considera la variable aleatoria que a cada tiro le hace corresponder su puntuación de cero a 50 puntos. Calcular:

1. La tabla de la función de probabilidad.
2. La media, varianza y desviación típica.
3. Si ha obtenido 40 puntos. ¿Cuál es la probabilidad de haber elegido el primer blanco?.

2.3. Ejemplos de variables aleatorias discretas.

2.3.1. Variable aleatoria discreta uniforme.

Supongamos un experimento aleatorio y E su espacio muestral, dicho espacio tiene un número finito de sucesos elementales o sea $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$. Se supone que dichos sucesos elementales son equiprobables, o sea, todos tienen la misma probabilidad de salir. En este caso se define una variable aleatoria X de manera que $X(e_i) = i$. O sea a cada suceso elemental se le hace corresponder su número de orden dentro del espacio muestral.

Evidentemente X es una variable aleatoria discreta cuya función de probabilidad es:

$$P(X=i) = p(e_i) = \frac{1}{n} \quad \text{Donde } i=1,2,3 \dots n$$

Vemos que la probabilidad para cualquier valor que tome la variable siempre es el mismo, y corresponde a la probabilidad de cada suceso elemental. Dicha probabilidad viene dada por la probabilidad laplaciana. Como la función de probabilidad toma siempre un valor único, a esta variable se le llama variable uniforme.

La función de probabilidad está bien definida ya que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} P(X=i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} 1 = \frac{1}{n} n = 1$$

La media de esta variable es:

$$\bar{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(n+1)}{2}$$

Aquí se ha aplicado que la suma de $1+2+3+4+5+\dots+n$ es la suma de una progresión aritmética con $a_1=1$ $a_n=n$ y diferencia $d=1$ u la suma es $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(1+n)n}{2}$

Para la varianza partimos de considerar demostrada la siguiente expresión para la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{No se demuestra la expresión ya que hay que}$$

utilizar métodos matemáticos más superiores. Supuesta cierta la expresión, entonces:

$$\sigma^2 = V = \sum_{i=1}^n i^2 \frac{1}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{1}{n} (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\sigma^2 = V = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = (n+1) \frac{2(2n+1) - 3(n+1)}{12} = (n+1) \frac{4n+2-3n-3}{12}$$

$$\sigma^2 = V = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

La distribución uniforme puede generalizarse, en este caso la variable aleatoria se define de la forma siguiente:

Si a es un número real cualquiera, entonces:

$X(e_1)=a+1 \quad X(e_2)=a+2 \quad \dots \quad X(e_n)=a+n=b$. La variable toma pues los n valores comprendidos entre $a+1$ y b (incluidos $a+1$ y b) y $P(X=a+i)=\frac{1}{n}$. En este caso la **media es**:

$$\bar{X}=E(X)=\sum_{i=1}^n (a+i) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \frac{(a+1+a+n)n}{2} = \frac{(n+1+2a)}{2} = \frac{(a+b+1)}{2} = a + \frac{(n+1)}{2}$$

Para la varianza:

$$\sigma^2=V=\sum_{i=1}^n (a+i)^2 \frac{1}{n} - (\bar{X})^2 \quad \text{Vamos a desarrollar para cada } i \text{ la expresión } (a+i)^2 .$$

$$(a+1)^2 = a^2 + 2.1.a + 1^2$$

$$(a+2)^2 = a^2 + 2.2.a + 2^2$$

$$(a+3)^2 = a^2 + 2.3.a + 3^2$$

.....

$$(a+n)^2 = a^2 + 2.n.a + n^2 \quad \text{luego:}$$

$$\sum_{i=1}^n (a+i)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a^2 + 2a \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \frac{1}{n} \left(na^2 + 2a \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n (a+i)^2 \frac{1}{n} = a^2 + (n+1)a + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{Entonces:}$$

$$\sigma^2=V=\sum_{i=1}^n (a+i)^2 \frac{1}{n} - \left(a + \frac{(n+1)}{2} \right)^2 \quad \text{donde en vez de la media se ha puesto su valor,}$$

luego:

$$\sigma^2 = a^2 + (n+1)a + \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - a^2 - 2.a. \frac{(n+1)}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

luego:

$$\sigma^2 = (n+1) \left(\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{12} \right) = (n+1) \left(\frac{4n-3n+2-3}{12} \right) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Que es el mismo valor de la varianza antes obtenido. Finalmente si:

$$b=a+n \quad n=b-a \quad , \text{ entonces:}$$

$$\sigma^2=V=\frac{(b-a)^2-1}{12} \quad \text{que se será la expresión más general de la varianza.}$$

2.3.2. Variable aleatoria de Bernouilli.

Consideremos un experimento aleatorio, y sea E su espacio muestral. Si A es un suceso aleatorio definimos una variable aleatoria X de la forma siguiente:

Para cada suceso elemental de A toma el valor uno o sea $X(A)=1$, y para cada suceso elemental que no pertenece a A toma el valor cero. O sea para el suceso contrario $\bar{A}$ se verifica

que $X(\bar{A})=0$.

Entonces si la probabilidad $0 < P(A)=p < 1$, evidentemente $P_1=(X=1)=P(A)=p$ y $P_0=P(X=0)=P(\bar{A})=1-p=q$.

Esta variable aleatoria se llama de Bernouilli y su tabla para la función de probabilidad, su media y varianza son las siguientes:

X_i	$P_i=P(X=i)$	$F_i=P(X \leq i)$	$X_i \cdot P_i$	x_i^2	$X_i^2 \cdot P_i$
0	1-p	1-p	0	0	0
1	p	1	p	1	p
Sumas	1		p		p

$$\text{Entonces } \bar{X}=p \quad \sigma^2=V=p-p^2=p(1-p)=p.q \quad \sigma=\sqrt{p.q}$$

La repetición del experimento anterior n veces va a dar lugar a la variable aleatoria que llamamos binomial.

2.3.3. Variable aleatoria geométrica.

Es una generalización de Bernouilli. Se hace un experimento aleatorio, su espacio muestral es E, y A es un suceso aleatorio cuya probabilidad es $0 < P(A)=p < 1$. Así mismo $\bar{A}$ es el suceso contrario y su probabilidad $P(\bar{A})=1-p=q$. Se define una variable aleatoria que cuenta las veces que se repite el experimento hasta conseguir que salga el suceso A. Así $X=0$ si no hay fracaso A sale a la primera. $X=1$ si la primera vez no sale A, A sale después de un fracaso. $X=k$ si A sale después de k fracasos, o sea, k veces se falla y a la k+1 se acierta. Se supone además que cada repetición del experimento no influye en la siguiente.

La función de probabilidad de esta variable será así:

$$P(X=k)=P(\bar{A}, \bar{A}, \dots k \text{ veces } \dots \bar{A}, A)=p(\bar{A})^k p(A)=q^k \cdot p$$

Es inmediato que está bien definida ya que:

$$\sum_k P(X=k)=\sum_k q^k p=p(1+q+q^2+q^3+\dots+q^k+\dots)=p \frac{1}{1-q}=\frac{p}{p}=1$$

Al tener la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $q < 1$.

Se puede demostrar que la media de la variable aleatoria geométrica es:

$$\bar{X}=E(X)=\frac{q}{p} \text{ y la varianza es:}$$

$$\sigma^2=\frac{q}{p^2}$$

2.4. Variable aleatoria binomial.

2.4.1. Definición de la Binomial.

Consideremos un experimento aleatorio. Sea A un suceso de dicho experimento. Y sea $\bar{A}$ su suceso contrario. Por ejemplo, el experimento de lanzar una flecha al blanco, y el suceso A de dar en el blanco y el suceso $\bar{A}$ de no dar en el blanco.

A partir de ahora llamamos p a la probabilidad de que A ocurra, o sea $0 < p = P(A) < 1$ y llamamos q a la probabilidad de que ocurra el contrario, o sea $q = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - p$. Por lo tanto $q = 1 - p$ y $p = 1 - q$.

El experimento se repite n veces y **se supone que son independientes**, o sea que cada vez que se repite el experimento **no se influye en el siguiente**. Por ejemplo lanzar 20 flechas al blanco. Entonces de esas n veces que se hace el experimento se cuenta las veces que ocurre A , Evidentemente A puede salir entre cero y n veces. Llamamos k las veces reales que ocurre A .

Se va a definir una variable aleatoria que llamamos X y que cuenta las veces que nos ha salido el suceso A al repetir el experimento. O sea:

A no sale nunca, entonces $X = 0$.

A Sale una vez entonces $X = 1$.

A Sale dos veces entonces $X = 2$.

.....

A sale k veces entonces $X = k$.

.....

A sale todas la veces entonces $X = n$.

Por ejemplo en el caso de lanzar las 20 flechas al blanco X simplemente contará el número de aciertos en el blanco.

Una variable aleatoria así definida se llama Binomial, en concreto Binomial para n repeticiones y p de probabilidad. O también $B(n, p)$.

2.4.2. Función de probabilidad de la distribución binomial.

La variable aleatoria binomial es discreta ya que sólo toma los valores comprendidos entre cero y n y sólo esos, y tampoco ningún valor comprendido entre esos. La variable aleatoria Binomial tendrá una función de probabilidad veamos cuál es.

Empecemos por $P_0 = P(X=0)$ o sea que en las n repeticiones A no salga nunca. Este cálculo es fácil (recordemos que $P(A) = p$ $P(\bar{A}) = 1 - p = q$).

$$p(X=0) = p(\bar{A} \bar{A} \bar{A} \dots_{n-\text{veces}} \bar{A}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \dots_{n-\text{veces}} \dots p(\bar{A}) = p(\bar{A})^n = (1-p)^n = q^n$$

$P_1 = p(X=1) = P(A, \bar{A}, \bar{A}, \dots_{n-1 \text{ vez}} \dots \bar{A})$ o sea que A salga una vez y no salga el resto en cualquier orden. Luego:

$$p(X=1)=P(A, \bar{A}, \bar{A}, \dots, \bar{A}) = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} \cdot p(A y \bar{A} y \bar{A} y \dots y \bar{A}) \text{ luego}$$

$$p(X=1) = \binom{n}{1} \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \cdot p(\bar{A}) \dots p(\bar{A}) = \binom{n}{1} \cdot p \cdot q \cdot q \dots q = \binom{n}{1} \cdot p \cdot q^{n-1}$$

$$P_2 = p(X=2) = P(A, A, \bar{A}, \dots, \bar{A}) = \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} \cdot p(A y A y \bar{A} y \dots y \bar{A}) \text{ luego}$$

$$p(X=2) = \binom{n}{2} \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \dots p(\bar{A}) = \binom{n}{2} \cdot p \cdot p \cdot q \dots q = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$$

$$P_3 = p(X=3) = P(A, A, A, \bar{A}, \dots, \bar{A}) = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} \cdot p(A y A y A y \bar{A} y \dots y \bar{A})$$

$$p(X=3) = \binom{n}{3} \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(\bar{A}) \dots p(\bar{A}) = \binom{n}{3} \cdot p \cdot p \cdot p \cdot q \dots q = \binom{n}{3} \cdot p^3 \cdot q^{n-3}$$

Así sucesivamente, entonces cuando sale k veces A

$$P_k = p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

que es la expresión de la función de probabilidad para una binomial $B(n, p)$

Demostraremos más adelante que la expresión de la función de probabilidad es correcta, o sea la suma de todos los valores que toma es uno, o sea $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = 1$. Veamos un **ejemplo**:

Ejemplo 1. Supongamos que lanzamos una flecha a un blanco, sabemos que la probabilidad de acertar es de 0,3. Lanzamos 20 flecha:

1. ¿Tenemos una binomial? ¿Cuál?
 2. ¿Cuál es la función de probabilidad?
 3. Cual es la probabilidad de acertar 5 flechas.
1. Evidentemente es una binomial, donde $n=20$, y $p=0,3$ luego $q=1-0,3=0,7$ luego es una $B(20, 0,3)$.
 2. La función de probabilidad será: $p(X=k) = \binom{20}{k} \cdot (0,3)^k \cdot (0,7)^{20-k}$.
 3. Será la $P(X=5)$ y $p(X=5) = \binom{20}{5} \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^{20-5} = \frac{20!}{15! \cdot 5!} \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^{15} = 0,1788$

Por desgracia sale una expresión que puede ser un complicada de calcular, sin embargo no es complicado, ya que existen una tabla que permite los cálculos anteriores de una forma fácil y efectiva. Más adelante veremos esta tabla. En el ejemplo hemos calculado la probabilidad introduciendo los datos en una calculadora científica.

2.4.3. Binomio de Newton.

La binomial debe su nombre a lo que se conoce en matemáticas como **binomio de Newton**, a continuación vamos a estudiarlo. Para ello recordamos de cursos anteriores las expresiones del cuadrado de una suma y del cuadrado de una diferencia. Estas son:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+.a+bb=a^2+2ab+b^2$$

y de igual forma:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa-ab-ba+bb=a^2-2ab+b^2 \quad .$$

Podemos generalizar estas expresiones para :

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb$$

luego

$$(a+b)^3=aaa+3aab+3bba+bbb=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Podemos ver que a^3 y b^3 aparecen una vez y los factores a^2b y ab^2 tantas veces como formas de combinar dos letras a y una b, o formas de combinar dos letras b y una a, o sea $\binom{3}{1}$ y

$\binom{3}{2}$ respectivamente. Luego podremos escribir la siguiente expresión:

$$(a+b)^3=\binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

Como $\binom{3}{0}=1$ El coeficiente de a^3 se ha puesto como un número combinatorio con el fin de que todos los coeficientes sean números combinatorios. Si desarrollamos $(a-b)^3$ obtenemos una expresión similar pero ahora los signos de cada coeficiente se alternan entre positivos y negativos, resultando la expresión:

$$(a-b)^3=\binom{3}{0}a^3-\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2-\binom{3}{3}b^3$$

Si desarrollamos la expresión genérica $(a+b)^n$ en cada término aparecen multiplicaciones de los números a y b, el primer término será n-veces el número a, luego será a^n . El segundo tendrá n-1 a y una b, y aparece como formas de combinar n-1 a y una b o sea aparece $\binom{n}{1}$ vez, en el siguiente término aparecen n-2 veces el número a y dos veces el b, el coeficiente será $\binom{n}{2}$ y así sucesivamente. Esto nos da la siguiente expresión también llamada desarrollo del binomio de Newton.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+..\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+...+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

O bien:

$$(a+b)^n=\sum_{k=1}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Si fuese la diferencia, sale el mismo resultando pero alterando los signos positivos y negativos. O sea:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}(-1)^k a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}(-1)^n b^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}(-1)^k a^{n-k}b^k$$

O bien:

$$(a-b)^n = \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k}(-1)^k a^{n-k}b^k$$

El coeficiente $(-1)^k$ hace que los coeficientes se alteren de signo ya que según sea k par o impar la potencia $(-1)^k$ vale 1 o vale -1. Esto provoca que los coeficientes cambien de signo.

2.4.4. La función de probabilidad de la binomial es correcta.

Se ha llegado a que en una $B(n, p)$ la función de probabilidad es:

$$p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Si hacemos $\sum_0^n p(X=k)$ se tiene:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = (q+p)^n = (1-p+p)^n = 1^n = 1$$

Ya que la suma de todas la probabilidades es exactamente igual al desarrollo de un Binomio de Newton, en concreto $(q+p)^n$. Por lo que la suma de todas las probabilidades es 1 y la función de probabilidad está bien definida.

2.4.5. Cálculo de cualquier número de aciertos.

Es frecuente que en la binomial no sólo sea necesario calcular la probabilidad para un número exacto de veces, puede ser necesario calcularla para cuando se acierte más de un número de veces, o menos de un número de veces, o que se acierte entre dos número de veces, o sea: $p(X < k)$ o $p(X \leq k)$ o $p(X > k)$ o $p(X \geq k)$ o $p(k < X < h)$ o bien $p(k \leq X \leq h)$.

En todos los caos se hace igual, se mira para que valores de X se cumple la condición, se calculan todas estas probabilidades, y se suman los resultados. Por ejemplo:

$p(X < 5)$ será: $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$ O sea, se calculan todas las probabilidades entre cero y 4 y se suman. Si hubiese sido:

$p(X \leq 5)$ será: $p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$ o sea se incluiría también el caso 5.

Si fuese:

$p(X > 5)$ tomaríamos todos los caos de 6 a n y sumaríamos, así en una binomial

$B(8, p)$ será: $p(X > 5) = p(X=6) + p(X=7) + p(X=8)$ y si fuese:

$p(X \geq 5)$ será: $p(X \geq 5) = p(X=5) + p(X=6) + p(X=7) + p(X=8)$

Si nos piden la probabilidad de X entre dos valores, basta sumar las probabilidades para los valores comprendidos entre ambos, así:

$p(3 \leq X < 6) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$ o sea incluimos el 3 pero no el 6.

A veces conviene hacer los cálculos por el suceso contrario, ya que siempre lo contrario a $X < k$ es $X \geq k$ o bien lo contrario $X > k$ es $X \leq k$.

Así, si nos piden: $p(X > 1)$, posiblemente tendríamos que hacer muchas sumas desde 2 hasta n . Pero como lo contrario a $X > 1$ es $X \leq 1$. Entonces $p(X > 1) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1))$, que es más fácil.

También pueden preguntar la probabilidad de que A ocurra al menos una vez, o sea $p(X \geq 1)$.

Evidentemente lo haremos siempre por el contrario o sea:

$p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0)$. Calculamos evidentemente la probabilidad del contrario, o sea de que A no ocurra nunca.

Ejemplo 2. Repetimos el ejercicio del avión y las bombas. O sea. Se sabe que la probabilidad de que un avión acierte con una bomba en el blanco es $\frac{1}{5}$. El avión lanza 5 bombas.

1. ¿Estamos ante una binomial? ¿Cuál?
2. Probabilidad de que al menos una bomba dé en el blanco.
3. Probabilidad de que más de dos bombas den en el blanco.
4. Probabilidad de que entre 1 y 3 bombas den en el blanco.

Apartado 1. Es una binomial donde $n=5$ y $p=\frac{1}{5}=0,2$ y $q=1-p=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0,8$

Apartado 2. Lo que se pide es $X \geq 1$ lo hacemos por el contrario $X < 1$ o sea $X = 0$. Entonces:

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 - 1 \cdot \frac{4^5}{5^5} = 1 - \frac{1024}{3125} = \frac{3125 - 1024}{3125} = \frac{2101}{3125}$$

Apartado 3. Se pide que $X > 2$ o sea:

$p(X > 2) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5)$ Calculamos cada uno de ellos y los sumamos:

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{5^3} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{4 \cdot 4}{25} = 10 \cdot \frac{16}{3125} = \frac{160}{3125}$$

$$p(X = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{1}{5^4} \cdot \frac{4}{5} = 5 \cdot \frac{4}{3125} = \frac{20}{3125} \quad \text{Y por último}$$

$$p(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{5!}{5!0!} \cdot \frac{1}{5^5} = 1 \cdot \frac{1}{3125} = \frac{1}{3125} \quad \text{. Luego}$$

$$p(X > 2) = \frac{160}{3125} + \frac{20}{3125} + \frac{1}{3125} = \frac{181}{3125}.$$

Apartado 3. Se pide $p(1 \leq X \leq 3) = p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3)$

$$p(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{5!}{1!4!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4^4}{5^4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{625} = 5 \cdot \frac{256}{3125} = \frac{1280}{3125}$$

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{625} = 10 \cdot \frac{64}{3125} = \frac{640}{3125}$$

$$p(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{1}{5^3} \cdot \frac{4^2}{5^2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{4 \cdot 4}{25} = 10 \cdot \frac{16}{3125} = \frac{160}{3125}$$

$$\text{Luego: } p(1 \leq X \leq 3) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = \frac{1280}{3125} + \frac{640}{3125} + \frac{160}{3125} = \frac{2080}{3125}$$

Ejemplo 2.

La probabilidad de que al lanzar una bomba un avión esta dé en el blanco es $\frac{1}{10}$. Cuál es la probabilidad de que se fallen 20 lanzamientos antes de alcanzar el blanco 5 veces.

Para alcanzar lo que se pide en los primeros 24 lanzamientos deben de haber 20 fallos y 4 aciertos en cualquier orden. A esto lo sigue un último lanzamiento que debe de acertar. Tendremos que calcular mediante la binomial la probabilidad de que en 24 lanzamientos se acierten 20, y multiplicar esto por la probabilidad de acertar el último.

$$p = p(A, A, A, A, \bar{A} \dots 20 \text{ veces } \dots \bar{A}) \cdot p(A) = \binom{24}{20} \left(\frac{1}{10}\right)^4 \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \left(\frac{1}{10}\right) = 0,0129$$

2.4.6. Media y varianza de la Binomial.

Veamos cuales son la **media** y la **varianza** de una binomial, para la media:

$$\begin{aligned} \bar{X} = E(X) &= \sum_{k=0}^{k=n} k p(X=k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ si desarrollamos la expresión } k \binom{n}{k} \text{ se tiene:} \\ k \cdot \binom{n}{k} &= k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{k \cdot n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \text{ luego:} \\ \bar{X} = E(X) &= \sum_{k=1}^{k=n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{((n-1)-(k-1))} = np(q+p)^{n-1} = np(1)^{n-1} \\ \bar{X} = E(X) &= np \end{aligned}$$

Luego la **media** de una $B(n, p)$ es np

Para la **varianza** aplicamos la expresión:

$\sigma^2 = V = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 P(X=K) - (\bar{X})^2$ Calcularemos primero la suma y luego le restaremos el cuadrado de la media.

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 p(X=K) = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ . Desarrollamos la expresión } k^2 \cdot \binom{n}{k} \text{ . Entonces:}$$

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= k^2 \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{k^2 n!}{k(k-1)! (n-k)!} = \frac{k n!}{(k-1)! (n-k)!} = \frac{(k-1)n! - n!}{(k-1)! (n-k)!} \\ k^2 \binom{n}{k} &= \frac{(k-1)n!}{(k-1)(k-2)! (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!} + \frac{n(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \end{aligned}$$

$$k^2 \binom{n}{k} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} + n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}$$

$$k^2 \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} + n \binom{n-1}{k-1}$$

De donde:

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 p(X=K) = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^{k=n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{k=n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 p(X=K) = n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} + np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^2 p(X=K) = n(n-1) p^2 (p+q)^{(n-2)} + np (p+q)^{(n-1)} = n^2 p^2 - np^2 + np$$

De donde:

$$\sigma^2 = V = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 P(X=K) - (\bar{X})^2 = n^2 p^2 - n p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = n(p - p^2) = np(1-p)$$

luego la varianza será:

$$\sigma^2 = V = np(1-p) = npq$$

De esta forma si en un ejercicio se nos pide la media y varianza aplicaremos directamente estas fórmulas, así:

Ejercicio 1. Supongamos que lanzamos una flecha a un blanco, sabemos que la probabilidad de acertar es de 0,3. si lanzamos 20 flechas es una binomial $B(20, 0,3)$

La media es:

$$\bar{X} = np = 20 \cdot 0,3 = 6$$

La varianza es

$$\sigma^2 = V = npq = 20 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3) = 20 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 6 \cdot 0,7 = 4,2$$

Ejercicio 2. En el ejercicio del avión y las bombas calcular la media y varianza.

Es una binomial $B\left(5, \frac{1}{5}\right)$ La media y varianza son:

$$\bar{X} = np = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1 \quad \text{y la varianza} \quad \sigma^2 = V = npq = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

2.4.7. Uso de tablas en la binomial.

Los calculos de las probabilidades en la binomial pueden ser largos y tediosos, nada más que viendo los ejercicios resueltos se puede comprobar fácilmente. Afortunadamente existe una tabla que simplifica el cálculo, veamos como se emplea. La tabla aparece como el la figura siguiente:

TABLA I
Distribución binomial, $p(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$

<i>n</i>	<i>r</i>	<i>p</i>	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	$\frac{1}{3}$	.35	.40	.45	.49	.50
2	0		.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1		.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2		.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0		.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2963	.2160	.1664	.1327	.1250
	1		.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2		.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3		.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0		.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1875	.1296	.0915	.0677	.0625
	1		.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2		.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3		.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4		.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0		.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1		.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2		.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3		.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4		.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5		.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312
6	0		.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1		.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2		.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3		.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4		.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5		.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6		.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0		.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1		.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2		.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3		.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4		.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5		.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6		.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0		.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1		.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2		.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3		.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4		.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5		.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6		.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7		.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0		.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1		.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2		.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3		.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4		.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5		.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6		.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7		.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0		.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1		.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2		.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3		.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4		.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5		.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6		.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7		.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8		.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

En las columnas verticales aparece n y k que en la tabla la llama r y en la columna horizontal aparece p . En primer lugar diremos que el máximo valor de n es 10, ya que para valores más grandes que 10 se hace una aproximación con las distribución normal o de poisson que más adelante veremos. Por lo tanto esta tabla sólo la emplearemos si $n \leq 10$. Veamos como buscar en la tabla.

Ejemplo 1. Tenemos una binomial $B(5, 0,2)$ o sea $n=5$ y $p=0,2$ y queremos buscar por ejemplo:

$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot (0,2)^3 \cdot (1-0,2)^2$ Entonces o hacemos el cálculo de la anterior expresión o en la tabla buscamos la fila $n=5, k=r=3$ y la columna $p=0,20$

Encontramos el valor 0,0512 luego $P(X=3)=0,0512$

Ejemplo 2. Tenemos una binomial con $n=8$ y $p=\frac{1}{3}$ queremos buscar:

1. $P(X>1)$ y $P(X<3)$
2. $P(3 \leq X < 5)$

Apartado 1. La primera probabilidad la buscamos por el suceso contrario luego:

$$p(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) + P(X=1) = 1 - (0,0390 + 0,1561) = 1 - 0,1951 = 0,8049$$

$$p(X<3) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = 0,0390 + 0,1561 + 0,2731 = 0,4862$$

Apartado 2.

$$P(3 \leq X < 5) = p(X=3) + p(X=4) = 0,2731 + 0,1707 = 0,4438$$

Ejemplo 3. Si vemos la tabla esta sólo tiene las opciones para $p \leq 0,5$ si intentamos utilizar una binomial para valores más grandes de p no encontraríamos el valor. Sin embargo esto es fácilmente evitable.

Supongamos una binomial $B(n, p)$ y otra binomial $B(n, 1-p)$. Evidentemente si $p \geq 0,5$ entonces $1-p < 0,5$. O sea, si $p > 0,5$ y no aparece la tabla, podemos considerar la binomial con $1-p$ que si aparece en la tabla. Veamos entonces estas dos expresiones:

$$p(X=k) \text{ en la } B(n, p) \text{ es } \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$p(X=n-k) \text{ en la } B(n, 1-p) \text{ será } \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot (1-(1-p))^k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Por lo tanto es la misma expresión, de esta forma si en una $B(8, 0,6)$ tuviésemos que calcular $P(X=3)$ no podemos, ya que no está en la tabla. Pero por lo anterior esto se soluciona fácilmente, tomamos la binomial $B(8, 0,4)$ ya que $1-p=1-0,6=0,4$ y calculamos la probabilidad para $n-k=8-3=5$, o sea:

$P(X=5)=0,1239$ que es la probabilidad buscada.

Ejercicio 4. En una $B\left(10, \frac{2}{3}\right)$. Calcular:

1. $P(X \leq 2)$.
2. $P(X > 3)$.
3. $P(5 \leq X < 7)$.

Apartado 1.

$P(X \leq 2) = P(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$. X que es $B\left(10, \frac{2}{3}\right)$. Sea Y que es una $B\left(10, 1 - \frac{2}{3}\right)$ o sea $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$ entonces:

$$p(X=0) = p(Y=10) \quad p(X=1) = p(Y=9) \quad p(X=2) = p(Y=8) \quad \text{luego:}$$

$$p(X \leq 2) = p(Y=10) + p(Y=9) + p(Y=8) = 0,0000 + 0,0003 + 0,0003 = 0,0006$$

Apartado 2. La hacemos por el caso contrario. Como antes, Y es $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - (p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)) \quad \text{luego}$$

$$p(X > 3) = 1 - (p(Y=10) + p(Y=9) + p(Y=8) + p(Y=7)) \quad \text{luego}$$

$$p(X > 3) = 1 - (0,0000 + 0,0003 + 0,0030 + 0,0163) = 1 - 0,0196 = 0,9804$$

Apartado 3. Como antes, Y es $B\left(10, \frac{1}{3}\right)$

$$p(5 \leq X < 7) = p(X=5) + p(X=6) = p(Y=10-5) + p(Y=10-6)$$

$$p(5 \leq X < 7) = 0,1366 + 0,0569 = 0,1935$$

2.5. Variable aleatoria de Poisson.

2.5.1. Definición de la variable aleatoria de Poisson.

En las tablas de la binomial el valor de n es más pequeño de 10, en el caso de ser n más grande y la probabilidad pequeña, se dice que la variable aleatoria sigue una distribución de Poisson o de sucesos raros. La distribución de Poisson se puede decir que es seguida por las binomiales cuando $n \rightarrow \infty$ y $p \rightarrow 0$. En concreto para valores para valores de $np < 5$ y $p < 0,1$ o bien $n > 100$ y $p < 0,05$.

Si X es una variable de Poisson puede tomar los valores $k=0,1,2,3,\dots$ o sea, puede tomar cualquier valor positivo, y la función de probabilidad es la siguiente:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \text{donde } k=0,1,2,3,4,5,6,7,\dots$$

A λ se le llama parámetro de la distribución y diremos que X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ o una $P(\lambda)$.

La variable de Poisson está bien definida ya que:

$$\sum_k P(X=k) = \sum_k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_k \frac{\lambda^k}{k!}$$

El saber como calcular esa suma de infinitos número requiere unos conocimientos matemáticos superiores a los requeridos en bachillerato, en concreto se necesita conocer los desarrollos en serie de Taylor. Simplemente diremos que la suma es justamente e^λ .

Luego:

$$\sum_k P(X=k) = e^{-\lambda} e^\lambda = e^0 = 1. \quad \text{La función de probabilidad es correcta.}$$

2.5.2. Media y varianza de una distribución de Poisson.

La media la calculamos como:

$$\bar{X} = E(X) = \sum_k k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \lambda \sum_k \frac{e^{-\lambda} \lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda$$

Para la varianza calculamos primero :

$$\begin{aligned} \sum_k k^2 p(X=k) &= \sum_k k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_k \frac{k e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left[\sum_k \lambda^k \left(\frac{k-1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) \right] \\ \sum_k k^2 P(X=k) &= e^{-\lambda} \sum_k \lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda} \sum_k \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^\lambda + e^{-\lambda} \lambda e^\lambda = \lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

La varianza será pues:

$$\sigma^2 = V = \sum_k k^2 P(X=k) - (\bar{X})^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

Por lo tanto en la variable aleatoria de Poisson coinciden su media y su varianza y ambas

son el parámetro de la variable λ .

2.5.3. Tablas de la distribución de Poisson.

Como en el caso de la binomial también existe una tabla para el cálculo de probabilidades en la función de probabilidad de esta variable aleatoria. Dicha tabla es la siguiente:

Función de probabilidad de la distribución de Poisson: $f(x) = p[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

$\lambda \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,0000								
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,0000							
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0002	0,0000							
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	0,0000						
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,0000						
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000						
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001	0,0000					
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000					
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003	0,0000					
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001	0,0000				
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008	0,0001	0,0000				
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012	0,0002	0,0000				
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018	0,0003	0,0001	0,0000			
1,4	0,2466	0,3452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001	0,0000			
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001	0,0000			
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047	0,0011	0,0002	0,0000			
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061	0,0015	0,0003	0,0001	0,0000		
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000		
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098	0,0027	0,0006	0,0001	0,0000		
2,0	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	0,0000		
2,2	0,1108	0,2438	0,2681	0,1966	0,1082	0,0476	0,0174	0,0055	0,0015	0,0004	0,0001	0,0000	
2,4	0,0907	0,2177	0,2613	0,2090	0,1254	0,0602	0,0241	0,0083	0,0025	0,0007	0,0002	0,0000	
2,6	0,0743	0,1931	0,2510	0,2176	0,1414	0,0735	0,0319	0,0118	0,0038	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000
2,8	0,0608	0,1703	0,2384	0,2225	0,1557	0,0872	0,0407	0,0163	0,0057	0,0018	0,0005	0,0001	0,0000
3,0	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001
3,2	0,0408	0,1304	0,2087	0,2226	0,1781	0,1140	0,0608	0,0278	0,0111	0,0040	0,0013	0,0004	0,0001
3,4	0,0334	0,1135	0,1929	0,2186	0,1858	0,1264	0,0716	0,0348	0,0148	0,0056	0,0019	0,0006	0,0002
3,6	0,0273	0,0984	0,1771	0,2125	0,1912	0,1377	0,0826	0,0425	0,0191	0,0076	0,0028	0,0009	0,0003
3,8	0,0224	0,0850	0,1615	0,2046	0,1944	0,1477	0,0936	0,0508	0,0241	0,0102	0,0039	0,0013	0,0004
4,0	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006
5,0	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034
6,0	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0688	0,0413	0,0225	0,0113
7,0	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490	0,1490	0,1304	0,1064	0,0710	0,0452	0,0264
8,0	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0573	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481
9,0	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607	0,0911	0,1171	0,1318	0,1318	0,1186	0,0970	0,0728
10,0	0,0000	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948

$\lambda \backslash x$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
5,0	0,0013	0,0005	0,0002										
6,0	0,0052	0,0022	0,0009	0,0003	0,0001								
7,0	0,0142	0,0071	0,0033	0,0014	0,0006	0,0002	0,0001						
8,0	0,0296	0,0169	0,0090	0,0045	0,0021	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001				
9,0	0,0504	0,0324	0,0194	0,0109	0,0058	0,0029	0,0014	0,0006	0,0003	0,0001			
10,0	0,0729	0,0521	0,0347	0,0217	0,0128	0,0071	0,0037	0,0019	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	

Buscar una probabilidad en esta tabla es sumamente fácil, en el lado izquierdo aparecen los

valores del parámetro λ desde $\lambda=0,1$ a $\lambda=10$. En horizontal están los valores que toma la variable aleatoria. Así por ejemplo para una variable aleatoria de Poisson donde $\lambda=3$ tenemos que:

$$P(X=5)=0,1008$$

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,0498+0,1494+0,2240$$

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-0,0498=0,9502$$

Siempre que tengamos una binomial $B(n, p)$ que cumpla $np<5$ con $p<0,1$, o bien, $n>100$ con $p<0,01$, podemos aproximar la binomial por una poisson $P(\lambda)$ con $\lambda=np$, ya que la media de $P(\lambda)$ es λ , que tendrá que ser igual a la media de la binomial que es np .

Es lo que vamos a hacer en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.

La probabilidad de que una bomba lanzada desde un avión dé en un blanco es de $p=0,01$. Un avión lanza 50 bombas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una dé en el blanco?

Solución.

En principio tenemos una binomial $B(50,01)$. Pero como $n=50$ $p=0,01$, entonces $np=50 \cdot 0,01=0,5<5$ y $p<0,1$, luego podemos aproximar la binomial por una de Poisson con $\lambda=np=0,5$.

Como se pide la probabilidad de que al menos uno dé en el blanco hay que calcular $P(X>0)$ ya que X cuenta el número de blancos.

Entonces:

$$P(X>0)=1-P(X=0)=1-0,6065=0,3935$$

Como vemos a pesar de lanzar muchas bombas, la probabilidad de alcanzar el blanco es poca.

Podía preguntarse, ¿Cuántas bombas hay que lanzar para que la probabilidad de alcanzar el blanco fuese superior al 90%?

En este caso supuestas que son muchas bombas y que se ajusta a la distribución de Poisson, vemos en la tabla que para $\lambda=2,4$ $P(X=0)=0,0907$.

Luego $P(X>0)=1-P(X=0)=1-0,0907=0,9093$ superior al 90%, como para valores más grandes de λ esta probabilidad aumenta, entonces $np=n \cdot 0,01=2,4=\lambda$ luego

$$n>\frac{2,4}{0,01}=240. \text{ Por lo que se necesitan al menos 240 bombas para asegurar el objetivo.}$$

Esta es la estrategia que siguieron los ingleses en la segunda guerra mundial en los bombardeos de Londres, situar los objetivos difuminados para que la probabilidad de alcanzar uno fuese pequeña y obligar a lanzar muchas bombas con el consiguiente gasto para los alemanes.

2.6. Variables aleatorias derivadas de la binomial.

2.6.1. Variable hipergeométrica.

Cada repetición del experimento de la binomial es independiente del anterior. La probabilidad de un suceso sigue siendo la misma en cada uno de los experimentos que se realizan. Vamos a considerar ahora que hacemos una repetición de un experimento pero dichos experimentos no son independientes. Este es el caso de una distribución hipergeométrica. Vamos a estudiar este caso solamente con un sencillo ejemplo.

Se tiene una urna con N bolas de las cuales N_1 son de un color y N_2 de otro color. Evidentemente $N = N_1 + N_2$. Se extraen a continuación y sin reemplazamiento n bolas, se trata de calcular la probabilidad de que k bolas con $k \leq n$ sean de un determinado color. Supondremos además que el color deseado es el primero, para el cual hay N_1 bolas.

Evidentemente $n \leq N$, $k \leq N_1$ y $n - k \leq N_2 = N - N_1$. Si sacásemos las bolas con reemplazamiento sería una típica binomial $B(n, p)$ con $p = \frac{N_1}{N}$. Pero como no hay reemplazamiento la probabilidad en cada extracción varía y no es una binomial. Sin embargo es fácil calcular la probabilidad pedida.

Si llamamos A el suceso de extraer una bola del color deseado. Se trata de calcular la probabilidad de obtener k veces A y $n - k$ veces $\bar{A}$. Por lo tanto la probabilidad de obtener $A, A, A \dots k \text{ veces} \dots A, \bar{A}, \bar{A}, \dots n - k \dots \bar{A}$ en cualquier orden. Para lo cual calcularemos la probabilidad de que primero salgan todos los sucesos deseados y luego sus contrarios, y multiplicaremos esta probabilidad por las formas de ordenar estos objetos, o sea, por

$\binom{n}{k}$. Entonces, calculando:

$$p(A \text{ y } \dots k \dots \text{ y } A \text{ y } \bar{A} \text{ y } \dots n - k \dots \text{ y } \bar{A}) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 - 1}{N - 1} \dots \frac{N_1 - k + 1}{N - k + 1} \cdot \frac{N_2}{N - k} \cdot \frac{N_2 - 1}{N - k - 1} \dots \frac{N_2 - (n - k) + 1}{N - n + 1}$$

Simplificando cada parte de la anterior expresión

$$\frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 - 1}{N - 1} \dots \frac{N_1 - k + 1}{N - k + 1} = \frac{N_1(N_1 - 1) \dots 1}{(N_1 - k) \dots 1 \cdot N(N - 1) \dots (N - k + 1)} = \frac{N_1!}{(N_1 - k)! \cdot N(N - 1) \dots (N - k + 1)} \text{ y}$$

$$\frac{N_2}{N - k} \cdot \frac{N_2 - 1}{N - k - 1} \dots \frac{N_2 - (n - k) + 1}{N - k - (n - k) + 1} = \frac{N_2(N_2 - 1) \dots 1}{(N_2 - (n - k)) \dots 1 \cdot (N - k)(N - k - 1) \dots (N - n + 1)}$$

Que resulta ser igual a:

$$\frac{N_2!}{(N_2 - (n - k))! \cdot (N - k)(N - k + 1) \dots (N - n + 1)} \text{ entonces uniendo las dos expresiones:}$$

$$p(A \text{ y } \dots k \dots \text{ y } A \text{ y } \bar{A} \text{ y } \dots n - k \dots \text{ y } \bar{A}) = \frac{N_1!}{(N_1 - k)! \cdot N \cdot 1 \cdot (N - k + 1)} \cdot \frac{N_2!}{(N_2 - (n - k))! \cdot (N - k) \dots (N - n + 1)}$$

Pero:

$$N(N - 1) \dots (N - k + 1) \cdot (N - k) \dots (N - n + 1) = N(N - 1) \dots (N - n + 1) \cdot \frac{(N - n)(N - n - 1) \dots 1}{(N - n)(N - n - 1) \dots 1}$$

Esta expresión queda así:

$$N(N - 1) \dots (N - k + 1) \cdot (N - k) \dots (N - n + 1) = \frac{N!}{(N - n)!} \text{ por lo que:}$$

$$p(A \text{ y } \dots k \dots \text{ y } A \text{ y } \bar{A} \text{ y } \dots n-k \dots \text{ y } \bar{A}) = \frac{N_1! \cdot N_2!}{(N_1-k)! \cdot \frac{N!}{N-n!} \cdot (N_2-(n-k))!}$$

Como la probabilidad que nos interesa considera que al suceso A y su opuesto pueden salir en cualquier posición, si P es la probabilidad pedida, entonces:

$$P = \binom{n}{k} \cdot p(A \text{ y } \dots k \dots \text{ y } A \text{ y } \bar{A} \text{ y } \dots n-k \dots \text{ y } \bar{A}) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{N_1! \cdot N_2!}{(N_1-k)! \cdot \frac{N!}{N-n!} \cdot (N_2-(n-k))!}$$

luego:

$$P = \frac{\frac{N_1!}{k! \cdot (N_1-k)!} \cdot \frac{N_2!}{(N_2-(n-k))! \cdot (n-k)!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N-n)!}} = \frac{\binom{N_1}{k} \cdot \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Entonces si X es una variable aleatoria que toma los valores desde $0, 1, 2, \dots, k \dots n$ según las veces que sale A en el anterior experimento. Entonces X sigue una variable aleatoria hipergeométrica cuya función de probabilidad es:

$$P = P(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k} \cdot \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

También se puede demostrar que la **media** de la hipergeométrica es:

$$\bar{X} = n \cdot \frac{N_1}{N} \text{ y la } \mathbf{varianza}:$$

$$\sigma^2 = V = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_2}{N}$$

2.6.1.1. Ejemplo de una hipergeométrica.

En una bolsa hay 8 bolas blancas y 7 de otros colores. Se sacan sin reemplazamiento 5 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 sean blancas en cualquier orden?.

Planteando el ejercicio como una hipergeométrica se tendrá que:

$$N=15, N_1=8, N_2=7, n=5, k=3$$

Entonces:

$$P = \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{56 \cdot 21}{3003} = \frac{56}{143}$$

2.6.2. Variable aleatoria binomial negativa.

Es otra variable que se obtiene de la binomial y de la geométrica. Consiste en lo siguiente. Se considera un suceso A de un experimento cuya probabilidad es $P(A)=p$, análogamente para el contrario, $p(\bar{A})=1-p=q$. Se considera la variable aleatoria que cuenta las veces que no sale el suceso A antes de que salga n -veces. Se considera que cada repetición del experimento es

independiente, o sea, ningún experimento influye sobre los demás. De esta forma para que un suceso falle k-veces antes de n-éxitos, debe de no salir k veces mientras que debe de salir n-1 veces, y luego la siguiente vez debe de salir la última vez.

Por lo que si A es salir y $\bar{A}$ es no salir. Entonces debemos obtener lo siguiente:

$A, A \dots n-1 \text{ veces} \dots A, \bar{A}, \bar{A}, \dots, k \text{ veces} \dots \bar{A}$ en cualquier orden, seguida necesariamente del último acierto. Pero:

$p(A, A \dots n-1 \text{ veces} \dots A, \bar{A}, \bar{A}, \dots, k \text{ veces} \dots \bar{A}) = \binom{n+k-1}{k} p^{n-1} \cdot q^k$ ya que es una binomial $B(n+n-1, k)$. Como a esto hay que añadir al último acierto, la probabilidad buscada es:

$$p = p(A, A \dots n-1 \text{ veces} \dots A, \bar{A}, \bar{A}, \dots, k \text{ veces} \dots \bar{A} \text{ y } A) = \binom{n+k-1}{k} p^n \cdot q^k$$

Una variable aleatoria como la anterior se llama binomial negativa, y k tomará los valores de cero en adelante, es una variable discreta pero con infinitos valores.

2.6.2.1. Ejemplo binomial negativa.

Se lanza un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un as 4 veces, antes de que salgan dos ases?.

Si la calculamos directamente por la fórmula.

$$p(X=4) = \binom{2+4-1}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5!}{4!} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{625}{1296} = \frac{3125}{46656} = 0,06697$$

También podemos buscar en unas tablas de la $B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ el valor k=1

Pero en las tablas lo más preciso es para una binomial con $p=0,15$ en vez de $p=\frac{1}{6}=0,166$ y nos sale para k= 1 $p(X=1)=0,3915$ que multiplicando por $\frac{1}{6}$ para le último acierto. Tenemos $p(X=4)=0,3915 \cdot \frac{1}{6}=0,065$ - Que se aproxima bastante al cálculo manual, ya que se ha cometido un error por no tener la tabla del todo correcta.

2.7. Variables aleatorias continuas.

2.7.1. Definición.

Si una variable aleatoria X puede tomar un intervalo infinito de valores, de manera que entre dos valores puede tomar cualquier otro, se **denomina variable aleatoria continua**. Un ejemplo sería considerar el experimento aleatorio de escoger un individuo entre los habitantes de una ciudad y como variable aleatoria medir su altura.

2.7.2. Función de densidad.

Por desgracia el tratamiento matemático de las variables aleatorias de tipo continuo es más complejo, y exige conocimientos que no se poseen. Por lo que nos limitaremos a dar conocimientos muy elementales de estas variables, conocimientos que en general van a ser intuitivos. Lo primero que necesitamos es recordar el concepto de función real en matemáticas.

2.7.2.1. Repaso del concepto de función real de variable real.

Recordemos que una función real de variable real es simplemente una correspondencia entre números reales. En general una función viene dada por una expresión del tipo $y=f(x)$ que nos da la regla práctica por la cual a un número real x le corresponde el número real y . Por ejemplo en la expresión $y=x^2$ se hace corresponder a cada número real x su cuadrado. El número x se llama origen e $y=f(x)$ su imagen. Recordemos que además que dibujando en un plano unos ejes de coordenadas podíamos hacer una representación gráfica de la función, la cual consiste en dibujar los puntos del plano de coordenadas $(x, f(x))$. Dentro de las funciones algunas se dicen definidas a trozos, veamos un ejemplo:

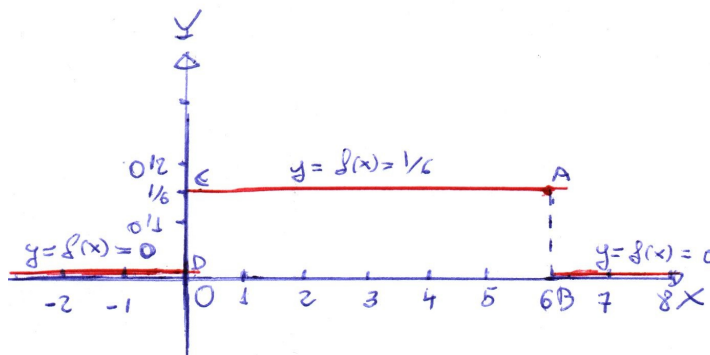
$$y = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0, 6] \\ 0 & x < 0 \text{ o } x > 6 \end{cases} \quad \text{Esto significa que a los números comprendidos entre 0 y 6 (incluidos) les}$$

hacemos corresponder $\frac{1}{6}$ y a los menores que 0 o mayores que el 6 el número cero. Así:

$$x=3 \rightarrow f(3)=\frac{1}{6} \quad x=6 \rightarrow f(6)=\frac{1}{6} \quad \text{por estar en } [0, 6] \quad \text{en cambio } x=-1 \rightarrow f(-1)=0 \quad \text{por ser } x \leq 0 \text{ y además } x=8 \rightarrow f(8)=0 \quad \text{por ser } x > 6.$$

La representación gráfica de esta función es fácil ya que si hacemos la tabla:

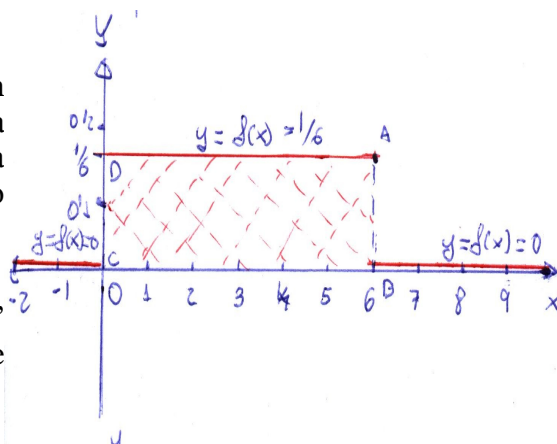
X	Y
-2	0
-1	0
0	1/6
2	1/6
4	1/6
6	1/6
7	0



Como se ve la gráfica es una recta en el intervalo $[0, 6]$ a una distancia de $\frac{1}{6}$ del eje OX y en cualquier otro sitio otra recta que coincide con el eje OX. Y además la gráfica **nunca queda por debajo del eje OX**.

Una cuestión que nos va a interesar en probabilidad es el área que está encerrada entre la función y el eje OX, en el ejemplo anterior sería la que encierra el rectángulo de la figura. Rectángulo que llamamos ABCD y es el rayado en la figura.

Como el rectángulo tiene de base 6 unidades, y de altura $\frac{1}{6}$ el área señalada será de $S = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.



En este caso el área ha sido fácil de calcular ya que la figura es un rectángulo, pero si la función hubiese sido por ejemplo una parábola, la cuestión es más complicada y es necesario recurrir a las integrales.

No obstante para aquellos que han visto integrales y cálculo de áreas en Matemáticas II. El área encerrada entre la función y el eje OX se calcula mediante la integral siguiente:

$$S = \int_0^6 \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} [x]_0^6 = \frac{1}{6} (6 - 0) = 1$$

2.7.2.2. Definición de función de densidad.

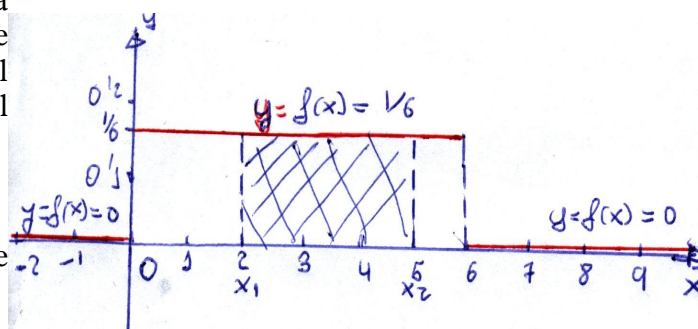
En una variable aleatoria continua no tiene sentido la función de probabilidad, ya que esta tendría que dar la $p(X = X_i)$ pero como ahora X toma infinitos valores, existirían infinitos valores para los valores de las probabilidades.

En las variables aleatorias continuas no existe la función de probabilidad, en su lugar existe una función que llamamos función de densidad, que consiste en una función del tipo $y = f(x)$, como la estudiada en el apartado anterior, de manera que se cumplen estas dos condiciones.

1. El área encerrada **por dicha función y el eje OX es 1**, estando además la gráfica siempre **por encima del eje OX**. Esto es imprescindible para que la función de densidad esté bien definida.
2. La $P(x_1 < X < x_2)$ o sea la probabilidad de que la variable esté comprendida entre dos valores es justamente el área encerrada entre la función, el eje OX y dichos dos valores.

La función del apartado anterior sería un perfecto ejemplo de una función de densidad, ya que el área que encierra con el eje OX es justamente 1, está por encima del eje OX. así si:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0, 6] \\ 0 & x < 0 \text{ o } x > 6 \end{cases} \quad \text{Es la función de de}$$



densidad, podemos utilizarla para calcular probabilidades de la siguiente forma:

Caso 1. Probabilidad entre dos valores x_1 y x_2 . Por ejemplo entre $x_1=2$ y $x_2=5$ o sea la probabilidad $P(2 < X < 5)$. Para ello basta ver el área encerrada entre la gráfica, el eje OX y los dos valores dados que será la de la figura.

Como nuevamente el área es la de un rectángulo su cálculo es fácil:

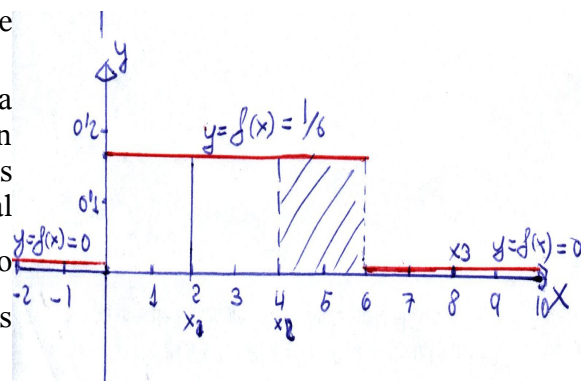
$$P(2 < X < 5) = \text{Área} = \frac{1}{6} \cdot (X_2 - X_1) = \frac{1}{6} \cdot (5 - 2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Caso 2. Si ahora $x_1=2$ $x_2=4$ $x_3=8$ se tiene que: $P(x_2 < X < x_3) = P(4 < X < 8)$ será

$P(4 < X < 6) + P(6 < X < 8)$ pero como el área entre 6 y 8 es cero ya que a partir de 6 la función coincide con el eje OX en este caso la probabilidad es es la del área entre 4 y 6. Basta ver la figura de al

lado. Luego $P = \text{Área} = \frac{1}{6} \cdot (6 - 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Por lo

tanto si un valor queda por encima del 6, el área es hasta 6 ya que por encima vale cero.



Caso 3. Si intentamos calcular la $P(X = x_1) = P(X = 2)$ el rectángulo se convierte en una simple línea (ver figura superior) entonces el área es simplemente cero. **Esto ocurre siempre. Por lo tanto en variables aleatorias continuas $P(X = X_i) = 0$ O sea la probabilidad de que tome un valor simple es siempre cero.**

Caso 4. Si en vez de calcular $P(x_1 < X < x_2)$ queremos calcular $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ como la probabilidad $P(X = x_1) = 0$ y $P(X = x_2) = 0$ entonces ambas probabilidades son las mismas, por lo que en variables aleatorias continuas da igual $P(x_1 < X < x_2)$ y $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ ambas son iguales además el área en ambos caso es la misma por lo que se confirma lo dicho

Caso 5. Si queremos calcular $P(X > x_2) = P(X \geq x_2) = P(X \geq 4)$ vemos nuevamente la figura anterior y será el área encerrada entre la función, el eje OX y los valores mayores que cuatro. En nuestro ejemplo coincide con la de la figura superior luego $P(X > x_2) = \text{Área} = \frac{1}{6} \cdot (6 - 4) = \frac{1}{3}$

Caso 6. Si queremos calcular la $P(X \leq x_2) = P(X \leq 4)$ podemos hacerlo como antes, o sea viendo el área, b bien por el suceso contrario, o sea:

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

2.7.2.3. Resumen función de densidad.

Por todo lo dicho en los apartados anteriores debe de quedar claros los siguientes conceptos:

1. En variables continuas, no existe función de probabilidad, existe función de densidad.
2. La función de densidad es una simple función matemática $y = f(x)$ de manera que está siempre por encima de OX y el área que encierra con dicho eje es siempre 1.
3. La probabilidad entre dos valores es el aré encerrada por la función el eje OX y dichos dos valores. Además $P(X = x_1) = 0$ y $P(x_1 < X < x_2)$ es la misma que $P(x_1 \leq X \leq x_2)$
4. Las $P(X \leq x_1)$ es el área encerrada con valores menores que x_1 y lo mismo para el

caso de $P(X \geq x_1)$ que es el área encerrada por valores mayores que x_1 .

Para los que dominan el cálculo integral al ser la probabilidad un área, podemos también decir:

$$p(x_1 < X < x_2) = p(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad \text{Donde no es necesario tomar el valor absoluto}$$

de la integral ya que la función de densidad es siempre positiva. También se verifica que:

$$p(X < x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \quad y \quad p(X > x_1) = \int_{x_1}^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx \quad \text{donde la función de}$$

densidad siempre cumple que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

2.7.2.4. Ejemplo de función de densidad y cálculo con integrales.

Dada la función $y = 6x(a - x) = 6xa - 6x^2$ para $0 \leq x \leq a$, e $y = 0$ para cualquier otro valor de x . Determinar el valor de a , para que sea una función de densidad y calcular las siguientes probabilidades: $p(0 < X < 2)$, $p\left(X < \frac{1}{2}\right)$, $p\left(X > \frac{1}{8}\right)$, $p\left(-3 < X < \frac{1}{4}\right)$.

Solución.

La función dada $y = 6xa - 6x^2$ es una parábola que corta el eje OX precisamente en $x=0$ y $x=a$, cuyo vértice está en $x = \frac{(a+0)}{2} = \frac{a}{2}$ y es dicho vértice máximo por ser el coeficiente de x^2 igual a -6 . Por lo tanto esta función es positiva entre $x=0$ y $x=a$ y cero para cualquier otro valor, por lo que cumple la primera condición de la función de densidad.

Respecto al área esta es la encerrada por la parábola y el eje OX entre $x=0$ y $x=a$ ya que la función es cero para cualquier otro valor. Entonces:

$$S = \int_0^a (6ax - 6x^2) dx = 6 \left[a \frac{x^2}{2} - x^3 \right]_0^a = 6 \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = 6 \frac{a^3}{6} = a^3 \quad \text{Como la superficie debe de ser}$$

uno para que sea función de densidad, entonces $a^3 = 1$ luego $a = 1$.

La función es: $y = 6x - 6x^2$ si $0 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ en los demás casos.

Para las probabilidades:

$$p(0 < X < 2) = \int_0^1 (6x - 6x^2) dx = 1 \quad \text{ya que el área entre 1 y 2 es cero por se la función nula.}$$

$$p\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (6x - 6x^2) dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 6 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = 6 \frac{2}{24} = \frac{1}{2}$$

$$p\left(X > \frac{1}{8}\right) = 1 - p\left(X < \frac{1}{8}\right) = 1 - \int_0^{\frac{1}{8}} 6(x - x^2) dx = 1 - 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{8}} = 1 - 6 \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{3.512} \right) \quad \text{luego:}$$

$$p\left(X > \frac{1}{8}\right) = 1 - 6 \left(\frac{3.4}{3.512} - \frac{1}{3.512} \right) = 1 - 6 \frac{11}{3.512} = 1 - \frac{11}{256} = \frac{245}{256}$$

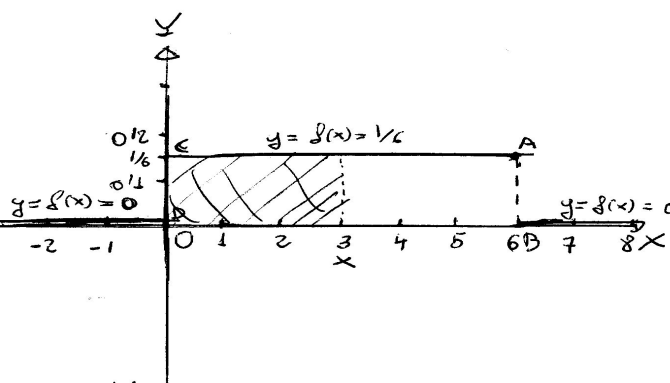
$$p\left(-3 < X < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{\frac{1}{4}} 6(x - x^2) dx = 6 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{4}} = 6 \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{3.64} \right) = 6 \frac{6-1}{3.64} = \frac{5}{32}$$
 ya que el área entre $x=-3$ y $x=0$ vuelve a ser cero por ser la función nula.

2.7.3. Función de distribución.

Para variables continuas existe la función de distribución, definida de forma parecida a las variables discretas. Ahora la función de distribución se llama $F(x)$ y es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual que x o sea el área encerrada entre la función de densidad, el eje OX y un valor menor que x , o sea $F(X) = p(X \leq x)$ en la función dada como ejemplo:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0, 6] \\ 0 & x < 0 \text{ o } x > 6 \end{cases}$$

Para un valor x la función de densidad es simplemente el área de la siguiente figura:



Entonces si $x < 0$ como el área encerrada es cero al ser $f(x) = 0$. Para estos valores la función de distribución es cero.

Si x es como en la figura, o sea un valor $0 < x < 6$. El área es la del rectángulo rayado que tiene de base x y altura $\frac{1}{6}$. por lo que $F(x) = \text{Área} = \frac{1}{6} \cdot x$. Por último para valores

$x \geq 6$ será el área encerrado por el rectángulo completo, o sea $F(x) = \text{Área} = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$ Por lo tanto queda que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{6}x & 0 < x < 6 \\ 1 & 6 \leq x \end{cases}$$

Esto es simplemente un ejemplo de un caso sencillo, para funciones de densidad más complicadas, se hará mediante integrales.

2.7.3.1. Ejemplo de función de distribución y cálculo con integrales.

En ejemplo donde la función de densidad era $y = 6x - x^2$ podemos mediante integrales calcular la función de distribución.

Evidentemente si $x < 0$ $P(x < 0) = F(x) = 0$ ya que al ser $f(x) = 0$ el área es cero.

Para $0 < x < 1$

$$F(x) = p(X < x) = \int_0^x 6(t - t^2) dx = 6 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = 6 \left(\frac{3x^2}{6} - \frac{2x^3}{6} \right) = 3x^2 - 2x^3$$

Si $x > 1$ entonces como el área a partir de $x=1$ es cero, el área será la encerrada entre cero y 1, o sea 1.

$$F(x) = p(0 < X < 1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 = 3 - 2 = 1$$

2.7.4. Media de la variable aleatoria.

Lo mismo que las distribuciones discretas tenían una media y esta se definía como:

$\bar{x} = \sum X_i \cdot P_i$ ahora para variables continuas hay que considerar la función $x \cdot f(x)$ donde $f(x)$ es la función de densidad, y calcular el área encerrada por la función $x \cdot f(x)$ y el eje OX. Por lo tanto: la media de X a la que llamamos $\bar{X}$ o $E(X)$ será el área encerrada por la función $y = xf(x)$ entre dicha función y el eje OX. Si hacemos el cálculo con integrales la media tiene la expresión siguiente:

$$\bar{X} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Expresión que nos vemos obligados a emplear siempre, por consiguiente el ejemplo siguiente será para aquellos que en Matemáticas hayan estudiado las integrales.

2.7.4.1. Cálculo de una media mediante integrales.

Para la función de densidad:

$$y = \begin{cases} 6x - 6x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

vamos a calcular su media. Como para valores $x < 0$ o $x > 1$ vale cero el área, por lo tanto la integral queda limitada a $0 \leq x \leq 1$. Luego:

$$\bar{X} = \int_0^1 x(6x - 6x^2) dx = 6 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 6 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 6 \left(\frac{4-3}{12} \right) = \frac{1}{2}$$

2.7.5. Varianza y desviación típica.

También la varianza, esta se calcula mediante la media del cuadrado de las desviaciones respecto a la media, o sea, por la media de $(X - E(X))^2$, que será el área encerrada entre la función $(x - E(X))^2 f(x)$ y el eje OX. O sea:

$$\sigma^2 = V = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(X) - E(X)^2) dx$$

$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2E(X) \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + E(X)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ donde se ha sacado la media fuera de la integral por ser una constante. Entonces:

$$\sigma^2 = V = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2E(X)^2 + E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - E(X)^2$$

Por lo tanto para calcular la varianza, calculamos el área encerrada por la función $y = x^2 f(x)$ y el eje OX y le restamos el cuadrado de la media.

Expresión que siempre emplearemos por lo que el ejemplo siguiente es para quien tenga

conocimientos matemáticos de integrales.

2.7.5.1. Cálculo de una varianza mediante integrales.

Calculamos ahora la varianza de:

$$y = \begin{cases} 6x - 6x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V &= \int_0^1 x^2 (6x - 6x^2) dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \int_0^1 (x^3 - x^4) dx - \frac{1}{4} = 6 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 - \frac{1}{4} = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{4} \\ \sigma^2 = V &= \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

2.7.6. Ejemplos de variables aleatorias continuas.

2.7.6.1. Distribución uniforme. Definición.

Una variable aleatoria X que tiene la función de densidad siguiente:

$$y = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Donde a, b son dos números reales cualesquiera siendo $a < b$, se llama variable aleatoria uniforme, o distribución continua uniforme. El primer ejemplo que se puso de variable aleatoria continua era en realidad una distribución uniforme.

La variable aleatoria está bien definida, ya que su gráfica es un rectángulo cuya base tiene una longitud de $b-a$ y un altura de $\frac{1}{b-a}$. Luego su superficie es $S = (b-a) \cdot \frac{1}{(b-a)} = 1$. O bien por integrales:

$$S = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [x]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1$$

Su función de distribución será:

$$F(x) = p(X < x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases} \text{ pero:}$$

$\int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} [t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$ este es valor de $F(x)$ entre a y b . Antes de a vale cero y después de b vale uno.

2.7.6.2. Media de la distribución uniforme.

La media por integrales será:

$$E(X) \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2) = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

que corresponde al valor medio de a y b .

2.7.6.3. Varianza de la distribución uniforme.

Para calcular la varianza mediante integrales:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V &= \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 dx - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ \sigma^2 &= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} \\ \sigma^2 = V &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Que es la expresión de la varianza.

2.7.6.4. Variable aleatoria exponencial. Definición.

Una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por la expresión:

$y = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$ y cero para los demás valores, recibe el nombre de exponencial.

A λ se la llama parámetro de la exponencial. Se puede utilizar para experimentos aleatorios de espera.

Veamos que es una función de densidad:

Evidentemente la función es siempre es positiva o cero, ya que la función exponencial siempre es positiva. Tenemos que comprobar que el área encerrada entre la función y el eje OX es uno.

Pero como en este caso como la función está definida entre 0 e infinito, y no es nula entre dichos valores, hay que calcular

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ o sea, o sea una función cuyos límites de integración no son finitos. En este

caso para calcularla podemos hacer lo siguiente: Mediante la regla de Barrow si $G(x)$ es una primitiva de la función de densidad. Entonces:

$\int_0^y f(x) dx = [G(x)]_0^y = G(y) - G(0)$. Calculada la anterior expresión, la integral con límite

infinito se calcula mediante un límite.

$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} (G(y) - G(0))$ Luego en el caso de la función dada :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[e^{-\lambda x} \frac{-1}{-\lambda} \right]_0^y = -\frac{\lambda}{\lambda} \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda y} - e^0) = -(-1) = 1$$

Por lo que es una función de densidad correcta.

La función de distribución es una consecuencia de lo anterior ya que:

Si $x \leq 0$ $F(x) = p(X \leq x) = 0$ por ser la función de densidad nula en esta región.

Y si $x > 0$ la función de distribución se calcula así:

$$F(x) = p(X < x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\frac{\lambda}{\lambda} (e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

2.7.6.5. Media de la variable exponencial.

Mediante la utilización de integrales calculemos la media. La cual es una nueva integral con límite infinito:

$$\bar{X} = E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \text{Integral que hay que hacer por partes tomando:}$$

$$dv = e^{-\lambda x} dx, v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}, u = x, du = dx \quad \text{luego:}$$

$$\bar{X} = \lambda \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{x e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^y - \lambda \int_0^y \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx = \frac{\lambda}{-\lambda} \lim_{y \rightarrow +\infty} (y e^{-\lambda y} - 0 e^0) + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx.$$

Como el límite de la primera parte es cero, entonces queda sólo la segunda integral, o sea:

$$\bar{X} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^y = -\frac{1}{\lambda} \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda y} - 1) = -\frac{1}{\lambda} (-1) = \frac{1}{\lambda}$$

Luego la media de la exponencial es $\frac{1}{\lambda}$.

2.7.6.6. Varianza de la variable exponencial.

Mediante el cálculo integral calculamos la varianza mediante la expresión:

$$\sigma^2 = V = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - (\bar{X})^2 = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}. \quad \text{La integral se hace nuevamente por}$$

partes:

$$dv = e^{-\lambda x} dx, v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}, u = x^2, du = 2x dx. \quad \text{Luego:}$$

$$\sigma^2 = \lambda \left[\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \frac{2\lambda}{-\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{ya que:}$$

$$\left[\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{\lambda} \left[\lim_{y \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-\lambda x}) - 0 \cdot e^{-\lambda \cdot 0} \right] = \frac{-1}{\lambda} \cdot 0 = 0$$

Haciendo otra vez la integral por partes.

$$dv = e^{-\lambda x} dx, v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}, u = x, du = dx \quad \text{Llegamos a:}$$

$$\sigma^2 = V = 2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{x e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^y - 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{-2}{\lambda} \lim_{y \rightarrow +\infty} (y e^{-\lambda y} - 0 e^0) + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^y - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2} \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda y} - 1) - \frac{1}{\lambda^2} = -\frac{2}{\lambda^2} (-1) - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = V = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{que es el valor de la varianza para la variable exponencial.}$$

2.8. Variable aleatoria de la distribución normal.

2.8.1. Definición.

Como se ha visto el estudio de variables aleatorias continuas puede ser complicado, existe sin embargo un tipo de variable aleatoria que llamamos **normal por la cantidad de experimentos aleatorios que pueden representarse por la misma**. El nombre de **normal** viene precisamente de eso, o sea, que era la variable aleatoria que **normalmente seguían los experimentos aleatorios**. Experimentos como el ya comentado de medir pesos, alturas u otros parámetros de una población siguen precisamente este tipo de variable.

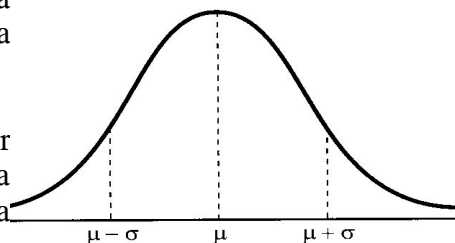
Por ser una variable aleatoria continua, la variable **normal** tiene una **función de densidad** que es la que realmente define esta variable aleatoria. El nombre de esta función de densidad se llama campana de **Gaus**. Esto es debido a su forma y en honor al matemático Gaus. La expresión matemática de esta función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Los parámetros μ y σ son los dos parámetros de la normal, y se demuestra aunque en este caso no se hace por resultar integrales más complicadas que la media de la normal es μ y la varianza de la normal es el parámetro σ^2 . O sea: $\bar{X} = E(X) = \mu$ y $V = \sigma^2$. Se suele escribir diciendo que la variable aleatoria sigue una $N(\mu, \sigma)$.

Si representamos gráficamente una variable normal siendo μ su media y σ su desviación típica, la forma de la misma es la de conocida campana de Gaus, que se representa tal como aparece en la figura.

El centro de la campana de Gaus es justamente el valor de su media μ . El valor de la desviación típica representa la apertura de la campana, cuanto más grande sea σ , la campana será menos alta y más achatada.

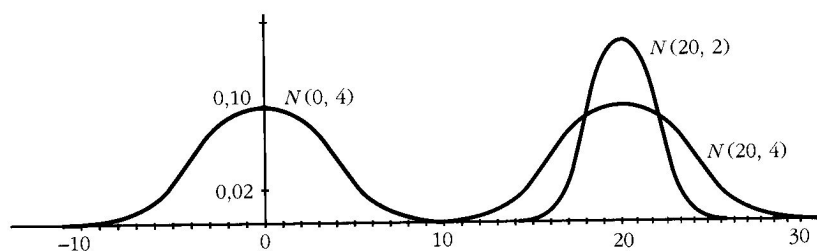


En el caso de ser la media **cero** y la **desviación típica uno** es la **variable normal tipificada**. En este caso la campana de Gaus se centra en el eje OY. Se escribe como $N(0,1)$. Su función de densidad será:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

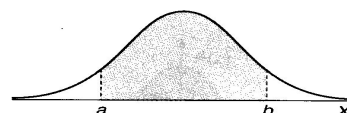
En la figura de la campana las ramas de la misma se acercan constantemente al eje OX pero no llegan a tocarlo nunca. Se puede demostrar que el área encerrada por la campana y el eje OX es siempre uno, o sea que la función de densidad es correcta, aunque en este caso hay necesidad de emplear la integral doble para su demostración por lo que no se hará.

Para entender mejor como son las gráficas de la campana de Gaus vamos a representar una $N(0,4)$ $N(20,2)$ $N(20,4)$



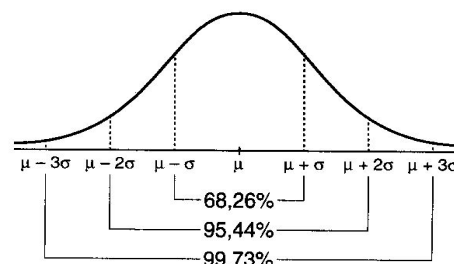
2.8.2. Probabilidades con la distribución normal.

Como toda función de densidad el área que encierra la campana de Gaus entre dos valores a y b es la $p(a < X < b)$. El cálculo de ese área es muy complicado, sin embargo está resuelto de una forma fácil, ya que como en caso de la binomial existe una tabla con la cual podemos calcular cualquier probabilidad que nos interese. Se considera muy difícil intentar calcular este área directamente, o sea, mediante la expresión:



$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

Para una $N(\mu, \sigma)$ las probabilidades de que X esté entre los valores $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ o bien entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$ o bien entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ vienen dadas según la siguiente figura:



Por tanto en una $N(20,5)$ la probabilidad de que X esté entre $p(20-5 < X < 20+5) = 0,6828$ y la $P(20-10 < X < 20+10) = 0,9544$.

2.8.3. Cálculo de la probabilidad con la tabla de la normal.

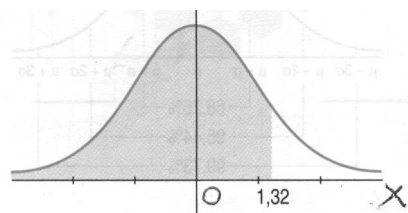
Con la tabla de la normal podemos en principio calcular cualquier probabilidad que queramos. La tabla de la normal sólo hay una, y corresponde a una normal tipificada o sea a una $N(0,1)$. Además en la tabla sólo aparece la $P(X \leq x) = P(X < x)$ donde $x \geq 0$. Sin embargo vamos a ver que con esta tabla podemos calcular cualquier probabilidad y con cualquier tipo de normal. La tabla de la normal es la siguiente.

La tabla de la normal tipificada da por consiguiente la siguiente probabilidad:

$$p(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7643	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9710	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

Esta tabla nos da directamente la $P(X < x)$ donde X es una $N(0,1)$. Y además $x \geq 0$ O sea el área de la figura.:



Por ejemplo para $p(X < 1,32)$ buscamos en la columna de las unidades y décimas 1,3 y 2 en las centésimas y encontramos el valor 0,9066 que es la probabilidad buscada, que es el área de la figura. Como $P(X \leq x) = P(X < x)$ también $p(X \leq 1,32) = 0,9066$.

2.8.3.1. Caso de una normal cualquiera. Tipificación.

En la tabla sólo aparecen probabilidades para la $N(0,1)$ pero supongamos que queremos calcular en una $N(10,5)$ la $p(X < 11)$. La solución es fácil, si X es nuestra variable que es una $N(10,5)$ se demuestra que $Y = \frac{X-10}{5}$ es una $N(0,1)$ y en general si X es una $N(\mu, \sigma)$

entonces $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es una $N(0,1)$. Entonces se tendrá que:

$p(X < 11) = p\left(\frac{X-10}{5} < \frac{11-10}{5}\right) = P\left(Y < \frac{1}{5}\right) = p(Y < 0,25) = 0,5987$ ya que Y es $N(0,1)$ y hemos buscado 0,25 en la tabla de la normal.

Este procedimiento se llama tipificación de la variable y es el que se sigue para buscar las probabilidades con una normal que no sea tipificada.

2.8.3.2. Cálculo de otras probabilidades.

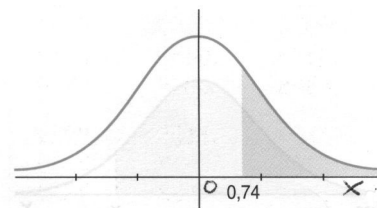
En la tabla de la normal sólo aparece $p(X < x)$ y $x \geq 0$ pero pueden interesarlos los siguientes cálculos que vamos a ir resolviendo uno a uno.

Opción 1. $P(X > x)$ con $x \geq 0$. O sea, por ejemplo $P(X > 0,74)$ que en principio no aparece en la tabla, y que siempre calcularemos por el suceso contrario. O sea:

$$P(X > 0,74) = 1 - P(X < 0,74) = 1 - 0,7704 = 0,2296$$

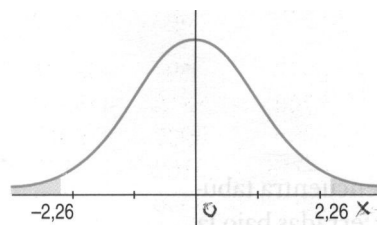
luego: $P(X > x) = 1 - P(X < x)$ cuando $x \geq 0$

En la figura la parte oscura corresponde a la probabilidad que hemos calculado, o sea $P(X > 0,74)$, el área comprendida antes de 0,74 es 0,7704 que es la que aparece en la tabla. También tenemos calculada $P(X \geq 0,74) = P(X > 0,74) = 0,2296$.



Opción 2. $P(X < x)$ con $x < 0$. Por ejemplo $P(X < -2,26)$ que es justamente el área oscura de la figura, en la parte izquierda de la misma.

Pero si miramos dicha figura y la del apartado anterior, y teniendo en cuenta la simetría de la figura, el área de la derecha o sea la correspondiente a $P(X > 2,26)$ es idéntica a la de la izquierda, o sea a $P(X < -2,26)$. Entonces se tendrá que:



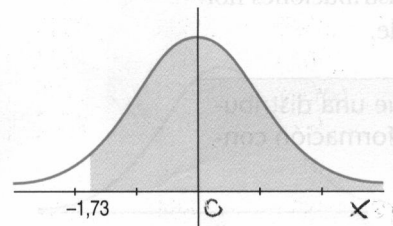
$P(X < -2,26) = P(X > |-2,26|) = P(X > 2,26) = 1 - P(X < 2,26) = 1 - 0,9981 = 0,0019$. Por lo que $x \leq 0$ calculamos la probabilidad de $X > |x|$ mirando en la tabla la de $X < |x|$ por tanto:

$P(X < x) = P(X > |x|) = 1 - P(X < |x|)$ cuando $x < 0$.

Opción 3. $P(X > x)$ con $x < 0$. Por ejemplo $P(X > -1,73)$ que es el área rayada de la figura, si nos fijamos esta parte rayada es justo la contraria al caso anterior, o también por simetría es justo la $P(X < 1,73)$.

Por lo tanto en este caso podemos afirmar directamente que: $P(X > -1,73) = P(X < 1,73) = 0,9582$

Y en este caso podemos afirmar que de forma general se tiene que: $P(X > x) = P(X < |x|)$ si $x < 0$ cosa lógica ya que por simetría el área buscada en este caso es idéntica a la que viene en las tablas. Como en todos los casos $P(X \geq x) = P(X > x)$.

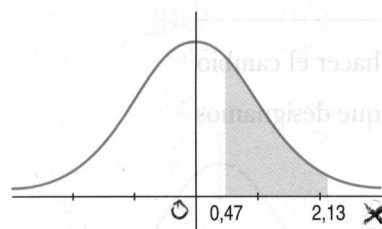


Opción 4. $p(a < X < b)$ con $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Por ejemplo $P(0,47 < X < 2,13)$ que es el área rayada de la figura. En este caso bastará calcular el área por debajo de 2,13 y restar el área por debajo de 0,47, o sea:

$$P(0,47 < X < 2,13) = P(X < 2,13) - P(X < 0,47)$$

Como en este caso los dos valores son positivos basta mirar en la tabla y calcular, o sea:

$$P(0,47 < X < 2,13) = 0,9834 - 0,6808 = 0,3026$$



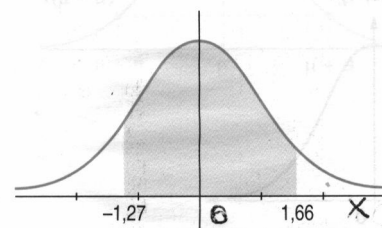
Por lo tanto en este caso $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$ cuando $a \geq 0$ y $b \geq 0$

Opción 5. $p(a < X < b)$ con $a < 0$ y $b \geq 0$. Por ejemplo $P(-1,27 < X < 1,66)$ que es el área rayada de la figura. En este caso en principio seguimos el mismo método que en el caso anterior. Luego

$P(-1,27 < X < 1,66) = P(X < 1,66) - P(X < -1,27)$ La primera de ellas se calcula directamente en las tablas, la segunda corresponde exactamente a lo dicho en la opción 2. Luego:

$$P(-1,27 < X < 1,66) = P(X < 1,66) - P(X < -1,27) = P(X < 1,66) - (1 - P(X < 1,27))$$

$$P(-1,27 < X < 1,66) = P(X < 1,66) + P(X < 1,27) - 1 = 0,9515 + 0,8980 - 1 = 0,8495$$



Por lo tanto ahora $p(a < X < b) = P(X < b) + P(X < |a|) - 1$ cuando $b \geq 0$ $a < 0$

Opción 6. $p(a < X < b)$ con $a < 0$ y $b < 0$ Por ejemplo $P(-2,12 < X < -3,15)$ en este caso también por simetría es bastante fácil, ya que el área comprendida entre los valores negativos es idéntica al área comprendida entre los dos mismos valores pero positivos, luego:

$$P(-3,15 < X < -2,12) = P(X < 3,15) - P(X < 2,12) = 0,9992 - 0,9830 = 0,0162$$

Por lo tanto $p(a < X < b) = P(X < |a|) - P(X < |b|)$ cuando $b < 0$ $a < 0$

2.8.3.3. Ejercicio.

Una variable aleatoria X es $N(5,2)$ Calcular:

1. $P(X < 6)$ y $P(X > 7)$
2. $P(X \leq 4)$ y $P(X \geq 3)$

$$3. \quad P(6 < X < 7) \quad , \quad P(3 < X < 6) \quad \text{y} \quad P(3 < X < 4)$$

Como no hay tabla de una $N(5,2)$ en todos los apartados hemos de tipificar la variable y utilizar la variable $Y = \frac{X-5}{2}$ ya que Y es una $N(0,1)$ cuya tabla es la que tenemos.

Apartado 1.

$$P(X < 6) = P\left(Y < \frac{6-5}{2}\right) = P\left(Y < \frac{1}{2}\right) = P(Y < 0,5) = 0,6915$$

$$P(X > 7) = P\left(Y > \frac{7-5}{2}\right) = P(Y > 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Apartado 2.

$$P(X \leq 4) = P\left(Y \leq \frac{4-5}{2}\right) = P(Y \leq -0,5) = 1 - P(Y \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

$$P(X \geq 3) = P\left(Y \geq \frac{3-5}{2}\right) = P(Y \geq -1) = P(Y \leq 1) = 0,8413$$

Apartado 3.

$$P(6 < X < 7) = P\left(\frac{6-5}{2} < Y < \frac{7-5}{2}\right) = P(0,5 < Y < 1) = P(Y < 1) - P(Y < 0,5) \quad \text{luego}$$

$$P(6 < X < 7) = 0,8413 - 0,6915 = 0,1498$$

$$P(3 < X < 6) = P\left(\frac{3-5}{2} < Y < \frac{6-5}{2}\right) = P(-1 < Y < 0,5) = P(Y < 0,5) + P(Y < 1) - 1 \quad \text{luego}$$

$$P(3 < X < 6) = 0,8413 + 0,6915 - 1 = 0,5328$$

$$P(3 < X < 4) = P\left(\frac{3-5}{2} < Y < \frac{4-5}{2}\right) = P(-1 < Y < -0,5) = P(Y < 1) - P(Y < 0,5) \quad \text{luego}$$

$$P(3 < X < 4) = 0,8413 - 0,6915 = 0,1498$$

2.8.4. Aproximación de una binomial a una normal.

Cuando se estudió la distribución Binomial $B(n, p)$ se vio que en la tabla sólo tenía los casos con $n \leq 10$. Si $n > 10$ tenemos que en principio hacer los cálculos a mano, sin embargo hay casos que se pueden hacer dichos cálculos aproximado mediante una distribución normal. Para ello nos basamos en el siguiente hecho que se puede demostrar.

Si X es una $B(n, p)$ esta variable se puede aproximar por una normal de media $n.p$ y una desviación típica de $\sqrt{n.p.q}$ luego $Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$ es una $N(0,1)$ aproximación que es bastante exacta si $n > 10$ o $np > 5$ y $nq > 5$ o $p < 0,1$ y $np > 5$ o $p > 0,1$ y $np < 5$ o $p = 0,5$ o próximo y $np > 3$.

Existe un pequeño problema, el cual consiste que en una binomial podemos calcular

$P(X=k)$ pero en una normal es cero. Entonces:

Si una binomial la aproximamos por una normal este cálculo se hace así:

$P(X=k)=P(k-0,5<Y<k+0,5)$ donde Y es la normal $N(np, \sqrt{npq})$ además también conviene hacer los ajustes siguientes:

$$P(X \leq k) = P(Y < k + 0,5) \quad \text{y} \quad P(X < k) = P(Y < k - 0,5) \quad \text{Pero en cambio:}$$

$$P(X \geq k) = P(Y > k - 0,5) \quad \text{y} \quad P(X > k) = P(Y > k + 0,5)$$

2.8.4.1. Ejemplo.

La probabilidad de que se acierte una pregunta es de $p=0,3$. Se hacen 20 preguntas. Calcular:

1. Probabilidad de acertar al menos 1.
2. Probabilidad de acertar 3 preguntas.
3. Probabilidad de acertar entre 6 y 10 preguntas.

El ejemplo es claramente una binomial X de $n=20$ $p=0,3$ luego la media de la binomial es $np=20 \cdot 0,3=6$ y varianza $V=20 \cdot 0,3 \cdot 0,7=6 \cdot 0,7=4,2$ Entonces podemos aproximarla por una normal $Y \sim N(6, \sqrt{4,2}) = N(6, 2)$. Y además si Z es la normal tipificada, o sea $Z = \frac{Y-6}{2}$. Entonces:

Apartado 1.

$P(X \geq 1) = P(Y > 1 - 0,5) = P(Z > \frac{0,5-6}{2}) = P(Z > -2,75)$ donde Z es la normal tipificada, luego:

$$P(X \geq 1) = P(Z \geq -2,75) = P(Z < 2,75) = 0,9970$$

Apartado 2.

$$P(X=3) = P(2,5 < Y < 3,5) = P(\frac{2,5-6}{2} < Z < \frac{3,5-6}{2}) = P(-1,75 < Z < -1,25) \quad \text{luego}$$

$$P(X=3) = P(Z < 1,75) - P(Z < 1,25) = 0,9599 - 0,8944 = 0,0655$$

Apartado 3.

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(5,5 < Y < 10,5) = P(\frac{5,5-6}{2} < Z < \frac{10,5-6}{2}) = P(-0,25 < Z < 2,25) \quad \text{luego}$$

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(Z < 2,25) + P(Z < 0,25) - 1 = 0,9878 + 0,5987 - 1 = 0,5865$$

2.8.5. Búsqueda inversa en la tabla de una normal.

Consiste en buscar en la tabla de una $N(0,1)$ el valor de la variable X que corresponde a una probabilidad, o sea, búsqueda inversa en la tabla. Pueden presentarse los casos siguientes:

Opción 1. Encontrar k de manera que: $P(X < k) = \alpha$

En este caso conocemos el resultado de una probabilidad y queremos encontrar k , por ejemplo:

$$p(X < k) = 0,7812 \quad \text{donde } X \text{ es } N(0,1).$$

Como la probabilidad es mayor que 0,5 aparece directamente en la tabla, y encontramos que para 0,7812 el valor más próximo es: $k = 0,78$. El cual es el valor que tomamos como resultado.

Si X no fuese una $N(0,1)$ y fuese por ejemplo X una $N(12,5)$, e Y la normal tipificada, entonces tenemos que:

$$p(Y < 0,78) = p\left(\frac{X-12}{5} < 0,78\right) = 0,7812 \quad \text{luego:}$$

$$p(X < 5 \cdot 0,78 + 12) = 0,7812 \quad \text{luego en este caso} \quad k = 5 \cdot 0,78 + 12 = 15,9 \quad \text{y}$$

$$p(X < 15,9) = 0,7812$$

Esto equivale a sumar a la media 12, el valor de k en la $N(0,1)$ multiplicado por la desviación típica.

En el caso de ser la probabilidad menor 0,5 esta no aparece en la tabla y procederemos así:

Queremos calcular k de forma que $p(X < k) = 0,3456$. Al ser la probabilidad menor que 0,5, esta no aparece en la tabla, y además el valor de k será un número negativo, pero como:

$$p(X < k) = p(X > |k|) = \alpha \quad \text{entonces} \quad p(x < |k|) = 1 - p(x > |k|) = 1 - 0,3456 = 0,6544$$

Buscando el valor $1 - \alpha = 0,6544$ le corresponde 0,40 que será $|k|$ pero como k debe de ser negativo $k = -0,40$ ya que:

$$p(x < -0,40) = p(x > 0,40) = 1 - p(x < 0,40) = 1 - 0,6544 = 0,3456$$

Por lo tanto buscamos en la tabla un valor de k positivo tal que la probabilidad correspondiente sea $1 - \alpha$. El valor buscado será $-k$

Opción 2. $p(X > k) = \alpha$

Como $p(X < k) = 1 - p(X > k)$ Hacemos los cálculos de antes pero con $1 - \alpha$ así:

$$p(x > k) = 0,1234 \quad \text{buscamos } k \text{ con} \quad p(X < k) = 1 - 0,1234 = 0,8766 \quad \text{y } k = 1,16.$$

Si queremos buscar k , pero con $\alpha > 0,5$, por ejemplo k tal que:

$$p(X > k) = 0,7834 \quad \text{buscamos directamente } 0,7834, \text{ nos sale } 0,78 \text{ luego } k = -0,78 \text{ ya que:}$$

$$p(X > -0,78) = p(X < 0,78) = 0,7834$$

Opción 3. Intervalo característico, nivel de confianza. $p(-k < X < k) = \alpha$

Queremos encontrar el número k de manera que se cumpla la expresión anterior. Evidentemente en este caso por encima de k y por debajo de $-k$ la probabilidad es de $1 - \alpha$. Por tanto al ser la normal simétrica se tendrá que: $p(X < -k) = p(X > k) = (1 - \alpha)/2$ por lo tanto:

$p(X < k) = 1 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{(2-1+\alpha)}{2} = \frac{(1+\alpha)}{2}$ Esto nos dice que k debe de ser encontrado de manera que se cumpla la expresión anterior. Por ejemplo:

$p(-k < X < k) = 0,9$ entonces buscamos k de manera que $p(X < K) = \frac{(1+0,9)}{2} = 0,95$. Encontramos $k = 1,645$. Luego $p(-1,655 < X < 1,645) = 0,9$. **Al intervalo $[-k, k]$ es el llamado intervalo característico al nivel de confianza α del 90%. A k también se le llama valor crítico.**

Para una distribución $N(\mu, \sigma)$ se tendrá que:

$$p(\mu - k \cdot \sigma < X < \mu + k \cdot \sigma) = p\left(\frac{\mu - k \cdot \sigma - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{\mu + k \cdot \sigma - \mu}{\sigma}\right) = p(-k < Y < k) = \alpha$$

Donde Y es la Normal tipificada. Esto nos enseña que si $[-k, k]$ es el intervalo característico par una Normal tipificada, **entonces el intervalo $[\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma]$ es el intervalo característico** para una normal $N(\mu, \sigma)$. La probabilidad de que la variable tome un valor en este intervalo es α . **α es el nivel de confianza.**

Frecuentemente nos referimos al intervalo característico llamando a la probabilidad del nivel de confianza como $1 - \alpha$ en vez de α . **En este caso a α se le llama nivel crítico, o nivel de riesgo o significación.** En este caso el intervalo característico es tal que $p(-k < X < k) = 1 - \alpha$. En este caso la probabilidad fuera del intervalo es α y además también en las colas de la Normal se tiene que: $p(-k < X) = \alpha/2$ $p(X > k) = \alpha/2$. En este caso k debe de ser buscado de forma que $p(X < k) = 1 - \alpha/2$.

Si consideramos al valor crítico como Z_α que es un valor tal que $p(X > Z_\alpha) = \alpha$ en una $N(0,1)$. En un intervalo característico al nivel de confianza $1 - \alpha$ los extremos son $-Z_{\alpha/2}$ y $Z_{\alpha/2}$. Siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor crítico para el nivel crítico α del intervalo característico.

Ejemplo. consideramos $\alpha = 0,1$ entonces $1 - \alpha = 0,9$ y $\alpha/2 = 0,05$. El valor de $K_{0,05}$ será $p(Z_{0,05} < X) = 1 - 0,05 = 0,95$ y $Z_{0,05} = 1,645$

Si tuviésemos por ejemplo una $N(30,4)$ entonces el intervalo característico con un nivel crítico o de riesgo anterior será:

$$[30 - 1,645 \cdot 4, 30 + 1,645 \cdot 4] = [23,42, 36,58] \text{ y en él está el 90\% de la población.}$$

Por lo tanto los extremos de un intervalo característico a un nivel crítico o de riesgo α son:

$$\mu \pm K_{\alpha/2} \cdot \sigma$$

2.9. Otras variables aleatorias continuas.

En el próximo tema de nuestro veremos que son necesarias otras variables aleatorias de tipo continuo. A continuación diremos cuales son, veremos sus tablas, y se aprenderán a manejarlas.

2.9.1. Variable χ^2 (Chi) cuadrado de Pearson.

Si $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son variables normales $N(0,1)$ independientes se define la χ^2 de Pearson de n grados de libertad como la variable aleatoria siguiente:

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

Existe una tabla de la variable, tabla que es la siguiente:

TABLA 5

Puntos críticos de la distribución χ^2 de Pearson.

$\alpha \backslash n$	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,00393	0,00157	0,00628	0,00982	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,455
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	13,675	14,440	17,338
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336

La segunda parte de la tabla es:

tos críticos de la distribución χ^2 de Pearson (otros valores de x).

α n	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

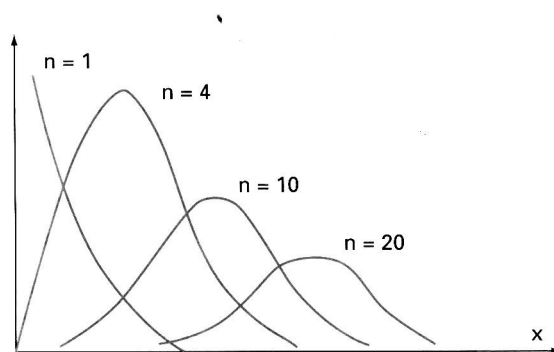
En la tabla aparece en la columna de la izquierda los grados de libertad, que van de 1 a 30. En la fila superior aparece el nivel α . En las distintas filas de la tabla aparecen los valores de $\chi^2_\alpha(n)$ de manera que $p(\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)) = \alpha$. Donde n son los grados de libertad.

Por ejemplo para $n=5$ grados de libertad se tiene que:

$$p(\chi^2 > 6,064) = 0,30 \quad \text{o bien para } n = 18 \text{ grados:}$$

$$p(\chi^2 > 34,805) = 0,01$$

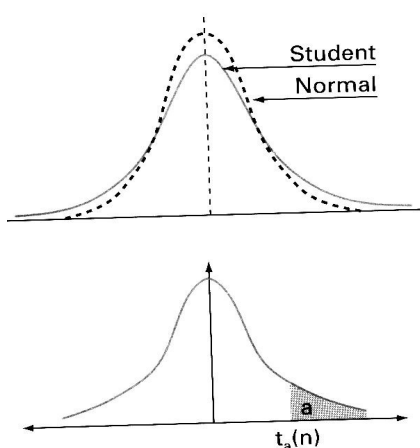
Las gráficas de la χ^2 para los sucesivos grados de libertad son las siguientes:



2.9.2. La t de Student.

Si $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ son $n+1$ variables normales $N(0,1)$ independientes, definimos una t de Student con n grados de libertad como:

$$T = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{n}}}$$



La gráfica es parecida a la de la distribución normal, pero algo más achatada. Sería de la forma que aparece en la figura de la izquierda.

También para la t -Student tiene su tabla, la cual aparece en la página siguiente. En la columna izquierda de dicha tabla aparecen como antes los grados de libertad, en la parte superior los valores α de probabilidad, de manera que de forma idéntica a la anterior tabla se tenga que:

$$p(T > t_\alpha(n)) = \alpha$$

TABLA 6

Puntos críticos de la distribución t de Student.

α n	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,192	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Por ejemplo, en esta tabla se tiene que:

$$p(T > 2,064) = 0,025 \text{ en una } t \text{ de Student con 24 grados de libertad.}$$

En la tabla no aparecen probabilidades α superiores a 0,4., veremos que no serán necesarias para la utilización de la t de Student en estimación y en contraste de hipótesis.

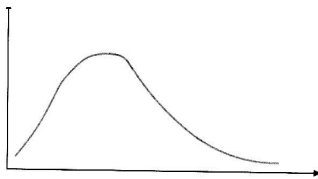
2.9.3. La F de Snedecor.

Realmente esta casi n se va a utilizar, pero conviene incluirla ya que es otra variable aleatoria bastante importante. Su definición es así:

Sean $n+m$ variables aleatorias Normales $N(0,1)$ independiente, que son : $X_1, X_2 \dots X_m$ e $Y_1, Y_2, Y_3 \dots Y_n$. Definimos la F de Snedecor con m, n grados de libertad como:

$$F_{m,n} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j^2}$$

La gráfica es la de la figura:



En la tabla aparece una doble entrada, la superior es m , o sea, el primer grado de libertad, y entrada de la izquierda es n , el segundo grado de libertad.

Esta tabla es muy reducida, ya que sólo es para un valor de la probabilidad α que corresponde al valor 0,05. Realmente no vamos a necesitarla para otro valor.

Dentro de la tabla aparecen los valores $F_{\alpha}(m, n)$ para que $p(F_{m,n} > F_{\alpha}(m, n)) = \alpha$.

TABLA 7

Puntos críticos de la distribución F de Snedecor siendo $\alpha = 0,05$.

Grados de libertad del denominador (n)	Grados de libertad del numerador (m)																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	236,80	238,90	240,50	241,90	243,90	245,90	248,00	249,10	250,10	251,10	252,20	253,30	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Así para $m = 5$, y $n = 3$ $p(F_{5,3} > 9,01) = 0,05$

2.10. Índice de materias

2. Variables aleatorias.....	39
2.1. Conceptos generales de variables aleatorias.....	39
2.1.1. Definición.....	39
2.1.2. Ejemplos de variables aleatorias.....	39
2.1.2.1. Ejemplo 1. Lanzamiento de una moneda.....	39
2.1.2.2. Ejemplo 2. Lanzamiento de un dado.....	39
2.1.2.3. Ejemplo 3. Sacar una bola de una bolsa.....	40
2.1.2.4. Ejemplo 4. Lanzar dos dados.....	40
2.1.2.5. Ejemplo 5. Sacar una carta de una baraja.....	41
2.1.2.6. Ejemplo 6. elegir una persona entre los habitantes de una nación.....	41
2.1.3. Tipos de variables aleatorias.....	41
2.2. Variables aleatorias discretas.....	42
2.2.1. Definición.....	42
2.2.2. Función de probabilidad.....	42
2.2.2.1. Ejemplo de la moneda. (2.1.2.1).....	42
2.2.2.2. Ejemplo de un sólo dado. (2.1.2.2).....	43
2.2.2.3. Ejemplo de la bolsa y las bolas. (2.1.2.3).....	43
2.2.2.4. Ejemplo de los dos dados. (2.1.2.4).....	44
2.2.3. Función de distribución.....	44
2.2.4. Media o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta.....	45
2.2.5. Varianza y desviación típica.....	46
2.2.6. Ejercicios.....	46
2.2.6.1. Ejercicio 1.....	46
2.2.6.2. Ejercicio 2.....	48
2.2.6.3. Ejercicio 3.	49
2.2.7. Ejercicios propuestos.....	49
2.2.7.1. Ejercicio 1.....	49
2.2.7.2. Ejercicio 2.....	50
2.2.7.3. Ejercicio 3.....	50
2.3. Ejemplos de variables aleatorias discretas.....	51
2.3.1. Variable aleatoria discreta uniforme.....	51
2.3.2. Variable aleatoria de Bernoulli.	52
2.3.3. Variable aleatoria geométrica.....	53
2.4. Variable aleatoria binomial.....	54
2.4.1. Definición de la Binomial.....	54
2.4.2. Función de probabilidad de la distribución binomial.....	54
2.4.3. Binomio de Newton.....	55
2.4.4. La función de probabilidad de la binomial es correcta.....	57
2.4.5. Cálculo de cualquier número de aciertos.....	57
2.4.6. Media y varianza de la Binomial.....	59
2.4.7. Uso de tablas en la binomial.....	60
2.5. Variable aleatoria de Poisson.....	64
2.5.1. Definición de la variable aleatoria de Poisson.....	64
2.5.2. Media y varianza de una distribución de Poisson.....	64
2.5.3. Tablas de la distribución de Poisson.....	65
2.6. Variables aleatorias derivadas de la binomial.....	67

2.6.1.Variable hipergeométrica.....	67
2.6.1.1.Ejemplo de una hipergeométrica.....	68
2.6.2.Variable aleatoria binomial negativa.....	68
2.6.2.1.Ejemplo binomial negativa.....	69
2.7.Variables aleatorias continuas.....	70
2.7.1.Definición.....	70
2.7.2.Función de densidad.....	70
2.7.2.1.Repaso del concepto de función real de variable real.....	70
2.7.2.2.Definición de función de densidad.....	71
2.7.2.3.Resumen función de densidad.....	72
2.7.2.4.Ejemplo de función de densidad y cálculo con integrales.....	73
2.7.3.Función de distribución.....	74
2.7.3.1.Ejemplo de función de distribución y cálculo con integrales.....	74
2.7.4.Media de la variable aleatoria.....	75
2.7.4.1.Cálculo de una media mediante integrales.....	75
2.7.5.Varianza y desviación típica.....	75
2.7.5.1.Cálculo de una varianza mediante integrales.....	76
2.7.6.Ejemplos de variables aleatorias continuas.	76
2.7.6.1.Distribución uniforme. Definición.....	76
2.7.6.2.Media de la distribución uniforme.....	77
2.7.6.3.Varianza de la distribución uniforme.....	77
2.7.6.4.Variable aleatoria exponencial. Definición.....	77
2.7.6.5.Media de la variable exponencial.....	78
2.7.6.6.Varianza de la variable exponencial.....	78
2.8.Variable aleatoria de la distribución normal.....	79
2.8.1.Definición.....	79
2.8.2.Probabilidades con la distribución normal.....	80
2.8.3.Cálculo de la probabilidad con la tabla de la normal.....	80
2.8.3.1.Caso de una normal cualquiera. Tipificación.....	82
2.8.3.2.Cálculo de otras probabilidades.....	82
2.8.3.3.Ejercicio.	83
2.8.4.Aproximación de una binomial a una normal.....	84
2.8.4.1.Ejemplo.....	85
2.8.5.Búsqueda inversa en la tabla de una normal.....	85
2.9.Otras variables aleatorias continuas.....	88
2.9.1.Variable (Chi) cuadrado de Pearson.....	88
2.9.2.La t de Student.....	90
2.9.3.La F de Snedecor.....	92
2.10.Índice de materias.....	94