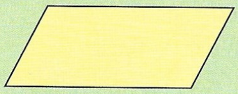
Los **planos** son superficies sin aristas ni ondulaciones. No tienen grosor y son ilimitados, no tienen principio ni fin. Para representarlos dibujamos una parte, que solemos representar en forma de paralelogramo.

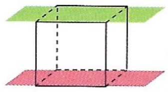


1 Rectas y planos en el espacio

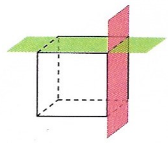
1.1. Posiciones relativas de dos planos

Dos planos pueden ser paralelos o secantes.

- Son **paralelos** si no tienen ningún punto en común.
- Son **secantes** si se cortan en una recta.



Paralelos

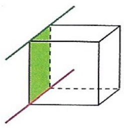


Secantes

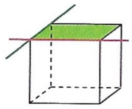
1.2. Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas pueden ser paralelas, secantes o cruzarse.

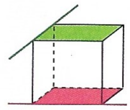
- Son **paralelas** si están en el mismo plano y no tienen ningún punto en común.
- Son **secantes** si están en el mismo plano y se cortan en un punto.
- Se **cruzan** si están en planos diferentes y no tienen puntos comunes.



Paralelas



Secantes



Se cruzan

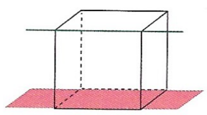
RESUELVE EL RETO

¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio? ¿Cuántos planos contienen a una recta en el espacio?

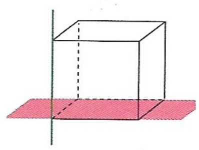
1.3. Posiciones relativas de una recta y un plano

Una recta puede ser paralela o secante a un plano o estar contenida en él.

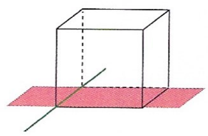
- Es **paralela** a un plano si no tienen ningún punto en común.
- Es **secante** a un plano si tienen un punto en común.
- Está **contenida** en un plano si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.



Paralela



Secante



Contenida

ACTIVIDADES

1 **PRACTICA.** Observa la habitación donde estás e indica elementos que sugieran:

a) Planos paralelos.

b) Planos secantes.

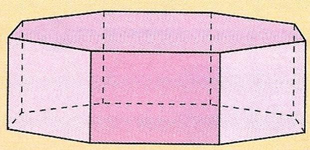
c) Rectas paralelas.

d) Rectas que se cruzan.

e) Rectas secantes a un plano.

f) Rectas contenidas en un plano.

2 **APLICA.** Indica las posiciones de los planos y las rectas que encuentres en el cuerpo geométrico de la derecha.



3 **REFLEXIONA.** Piensa y contesta.

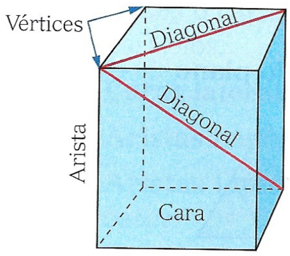
a) Dos rectas secantes, ¿están siempre en el mismo plano?

b) ¿Cuándo será una recta perpendicular a un plano?

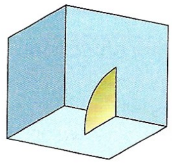
2 Poliedros

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por caras en forma de polígonos.

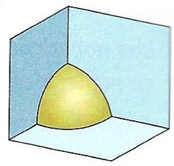
Los elementos de un poliedro son:



- **Caras**: son los polígonos que limitan al poliedro.
- **Aristas**: son las líneas donde concurren dos caras; son los lados de estas.
- **Vértices**: son los puntos en los que se cortan tres o más aristas.
- **Diagonal**: es el segmento que une dos vértices que no están en la misma arista. La podemos trazar en una misma cara o entre caras diferentes.



Ángulo diedro



Ángulo poliedro

Poliedros cóncavos y convexos

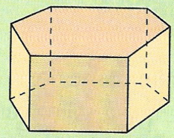
Los **poliedros convexos** son aquellos en los que, cuando prolongamos una cara cualquiera, esta no corta el poliedro.

Los **poliedros cóncavos** son aquellos que tienen alguna cara que, cuando la prolongamos, corta el poliedro.

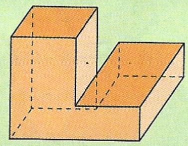
En todos los poliedros convexos se cumple la fórmula de Euler:

$$\underset{\text{n.º de caras}}{C} + \underset{\text{n.º de vértices}}{V} = \underset{\text{n.º de aristas}}{A} + 2$$

Poliedro convexo



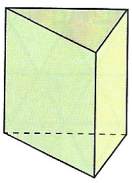
Poliedro cóncavo



No todos los poliedros cóncavos cumplen la fórmula de Euler.

EJEMPLO

1. Comprueba si cumple la fórmula de Euler en este poliedro.



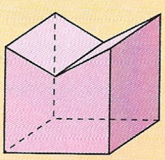
N.º de caras: 5
N.º de vértices: 6
N.º de aristas: 9

$C + V = A + 2$
$5 + 6 = 9 + 2$
$11 = 11$

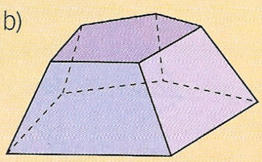
ACTIVIDADES

4 **PRACTICA.** Halla el número de caras, vértices y aristas de estos poliedros.

a)



b)



5 **APLICA.** Clasifica los poliedros de la actividad anterior en cóncavos y convexos, y comprueba si cumplen la fórmula de Euler.

6 **REFLEXIONA.** ¿Cuál es el menor número de caras que puede tener un poliedro? ¿Y de aristas? ¿Y de vértices?

3 Poliedros regulares

Los poliedros se nombran según su número de caras:

4 caras → tetraedro

5 caras → pentaedro

6 caras → hexaedro

7 caras → heptaedro

RECUERDA

El **desarrollo plano** de un poliedro es la figura que resulta cuando lo extendemos sobre un plano.

RESUELVE EL RETO

¿En qué poliedro regular sus aristas coinciden con sus diagonales?

Un **poliedro** es **regular** si cumple estas dos condiciones:

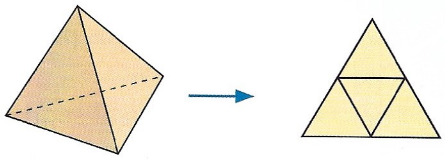
- Todas sus caras son polígonos regulares iguales.
- En cada vértice concurren el mismo número de aristas.

Solo existen cinco poliedros regulares.

Desarrollo plano

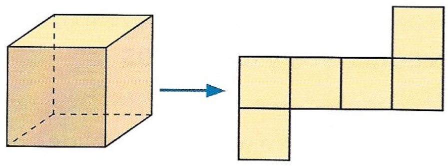
Tetraedro

Tiene 4 caras que son triángulos equiláteros.



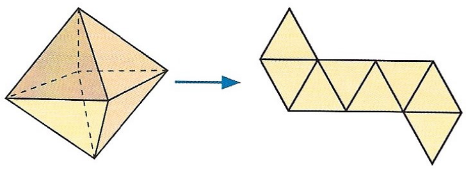
Cubo

Tiene 6 caras que son cuadrados.



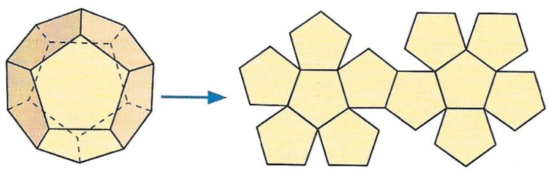
Octaedro

Tiene 8 caras que son triángulos equiláteros.



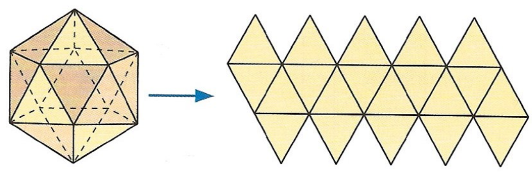
Dodecaedro

Tiene 12 caras que son pentágonos regulares.



Icosaedro

Tiene 20 caras que son triángulos equiláteros.



ACTIVIDADES

7 **PRACTICA.** Piensa y contesta.

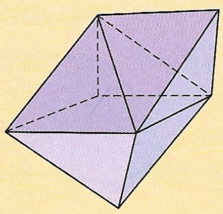
a) ¿Qué poliedros regulares tienen como caras triángulos equiláteros? ¿Y hexágonos regulares?

b) ¿Cuántas aristas concurren en un mismo vértice en un icosaedro?

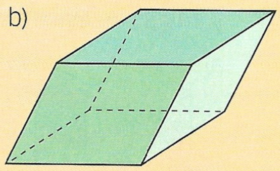
8 **APLICA.** Comprueba que los poliedros regulares cumplen la fórmula de Euler.

9 **REFLEXIONA.** ¿Son regulares estos poliedros? Razona tu respuesta.

a)



b)

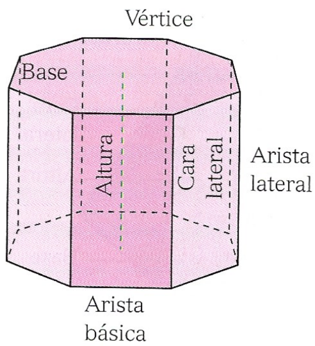


4 Prismas

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas entre sí, siendo el resto de ellas paralelogramos.

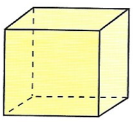
Los elementos de un prisma son:

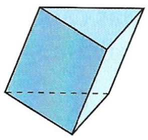
- **Bases o caras básicas**: son dos polígonos iguales situados en planos paralelos.
- **Caras laterales**: son paralelogramos.
- **Aristas básicas**: son los lados de los polígonos de las bases.
- **Aristas laterales**: son los lados de las caras laterales que unen las bases.
- **Vértices**: son los puntos donde se cortan las aristas.
- **Altura** del prisma: es la distancia entre las bases.

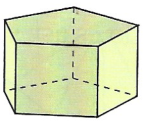


Clases de prismas

Para nombrar los prismas se consideran sus bases:

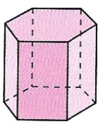

Prisma cuadrangular

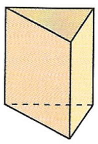

Prisma triangular

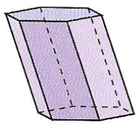

Prisma pentagonal

Si las aristas laterales de un prisma son perpendiculares a las aristas básicas, se dice que el prisma es **recto**; en caso contrario, lo denominamos prisma **oblicuo**.

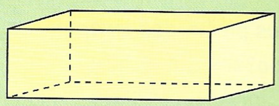
En los prismas rectos, si los polígonos de las bases son regulares, se denominan **prismas regulares**. Cuando no son regulares, los prismas se denominan **prismas irregulares**.


Prisma recto regular


Prisma recto irregular


Prisma oblicuo

Los **paralelepípedos** son un tipo de prisma muy frecuente, en el que todas las caras son paralelogramos. Si además son rectos, reciben el nombre de **ortoedros**.



ACTIVIDADES

10 **PRACTICA.** Dibuja un prisma recto de base rectangular y un prisma oblicuo triangular. ¿Cuántos vértices y aristas tiene cada uno?

11 **PRACTICA.** Dibuja un prisma regular y uno irregular.

12 **APLICA.** Calcula el número de vértices, aristas y caras de un prisma que tiene como base un hexágono regular.

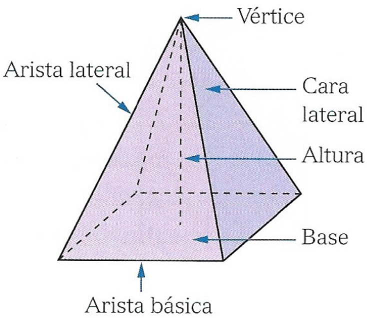
13 **REFLEXIONA.** Indica el polígono que forma la base de un prisma que tiene 15 aristas.

5 Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro en el que una de las caras es un polígono cualquiera, y las demás caras son triángulos que se unen en un punto.

Los elementos de una pirámide son:

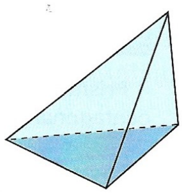
- **Base**: es un polígono cualquiera.
- **Caras laterales**: son triángulos que se unen en un punto denominado vértice de la pirámide.
- **Aristas básicas** y **aristas laterales**: son las aristas de la base y de las caras laterales, respectivamente.
- **Altura** de la pirámide: es el segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta la base.

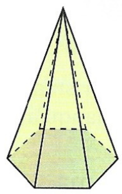


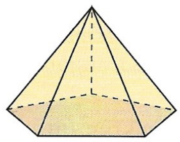
Clases de pirámides

Para nombrar las pirámides, se hace también referencia al polígono de la base.

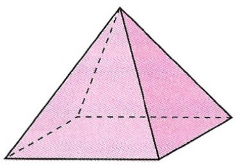
Una pirámide es **recta** si todas las caras laterales son triángulos isósceles. Si no es así, se denomina **oblicua**.

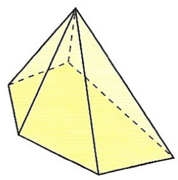

Pirámide triangular oblicua

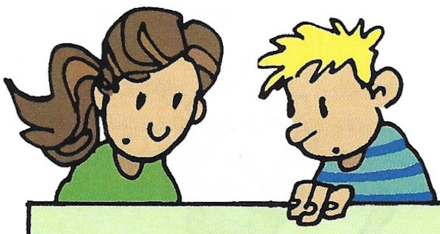

Pirámide hexagonal recta


Pirámide pentagonal recta

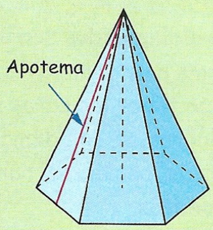
Una pirámide es **regular** si es recta y su base es un polígono regular. En caso contrario, la pirámide es **irregular**.


Pirámide regular


Pirámide irregular



Se llama **apotema** de una pirámide regular a la altura de cualquiera de sus caras laterales.



En las pirámides irregulares la apotema no existe.

ACTIVIDADES

14 **PRACTICA.** Dibuja una pirámide pentagonal regular y una pirámide irregular de base triangular.

Indica el número de aristas y vértices que tiene cada una de ellas.

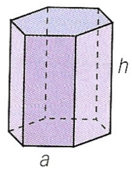
15 **APLICA.** Una pirámide tiene 7 vértices. ¿Cuántos lados tiene el polígono de la base?

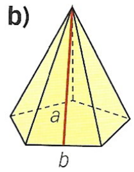
16 **REFLEXIONA.** Una pirámide tiene 10 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

SABER HACER

Obtener el desarrollo plano de prismas y pirámides

Dibuja el desarrollo plano de estos poliedros.

a) 

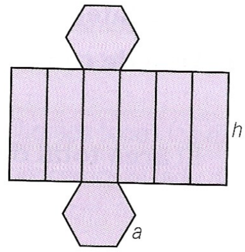
b) 

Pasos a seguir

1. Identificamos qué tipo de poliedro es.

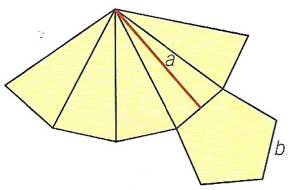
a) Prisma.
b) Pirámide.

2. Si es un **prisma**:
   - Dibujamos una base.
   - Dibujamos una de las caras laterales unida a la base y el resto de caras unidas a esta cara.
   - Dibujamos la segunda base sobre una de las caras laterales.

a) 

3. Si es una **pirámide**:
   - Dibujamos la base.
   - Dibujamos una de las caras laterales unida a la base y el resto de caras unidas a esta cara.

   En una pirámide las bases de las caras laterales no pueden formar una línea recta.

b) 

El **desarrollo plano de un prisma recto** está constituido por:

- Un rectángulo formado por las caras laterales, cuya altura es la del prisma y cuya anchura es el perímetro de la base.
- Los dos polígonos de las bases.

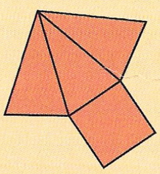
El **desarrollo plano de una pirámide regular** está constituido por:

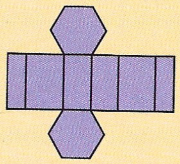
- Tantos triángulos isósceles como lados tiene la base.
- El polígono de la base.

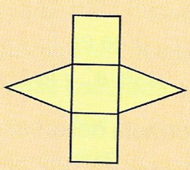
ACTIVIDADES

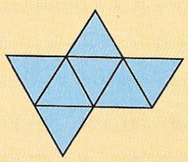
17 Dibuja el desarrollo plano de un prisma triangular y de una pirámide cuadrangular regular.

18 Halla el error que hay en cada uno de estos desarrollos. Corrígelos en tu cuaderno.

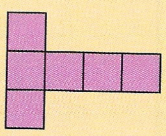
a) 

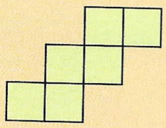
c) 

b) 

d) 

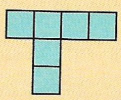
19 Observa estos desarrollos planos de un cubo.

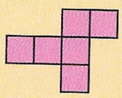
a) 

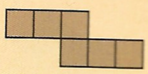
b) 

Colócales los puntos de las caras para que sean el desarrollo de un dado. Recuerda que las caras opuestas de un dado suman 7.

20 Indica cuáles de estos desarrollos planos no pertenecen a un cubo.

a) 

b) 

c) 

Dibuja otros tres desarrollos diferentes de un cubo.

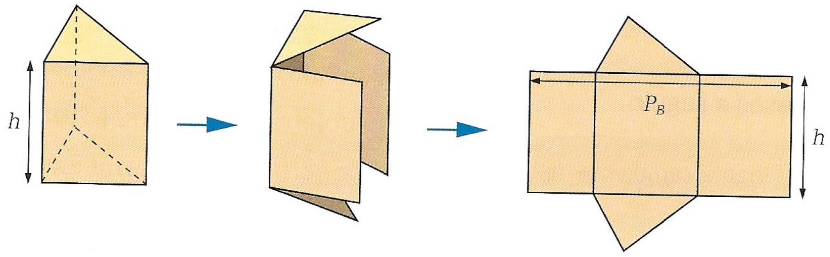
6 Área de prismas y pirámides

SE ESCRIBE ASÍ

A_L = área lateral
A_B = área de la base
A_T = área total
P_B = perímetro de la base
a = apotema de la pirámide
a' = apotema de la base

El área de un poliedro es igual a la suma de las áreas de todas sus caras.

6.1. Área de un prisma

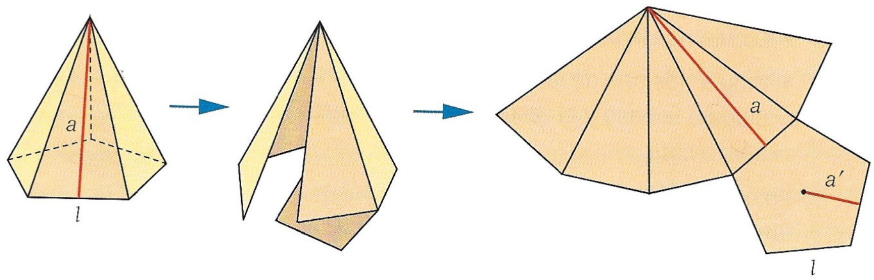


- **Área lateral**, A_L, se cumple que: $A_L = P_B \cdot h$.
- **Área de cada base**, A_B, es la suma del área de las dos bases.

El **área total de un prisma recto** es:

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$$

6.2. Área de una pirámide regular



- **Área lateral**, A_L, si n es el n.º de lados de la base: $A_L = n \cdot \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{P_B \cdot a}{2}$.
- **Área de la base**, A_B, si la base es un polígono regular: $A_B = \dfrac{P_B \cdot a'}{2}$.

El **área total de una pirámide regular** es:

$$A_T = A_L + A_B = \frac{P_B \cdot a}{2} + \frac{P_B \cdot a'}{2}$$

ACTIVIDADES

21 **PRACTICA.** Escribe la fórmula del área de un cubo en función de su arista, l.

22 **PRACTICA.** La base de una pirámide regular es un cuadrado. Escribe la fórmula de su área en función del lado de la base, l, y la apotema de la pirámide, a.

23 **APLICA.** La base de un prisma es un hexágono regular. Escribe la fórmula de su área en función de su lado, l, la apotema de la base, a', y la altura, h.

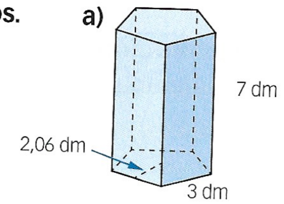
24 **REFLEXIONA.** ¿Cuál sería la fórmula del área del tetraedro en función de su arista, l, y su apotema, a?

SABER HACER

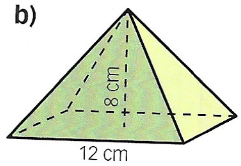
Calcular el área de un poliedro

Halla el área de estos poliedros.

a)



b)



En muchos casos hay que utilizar el teorema de Pitágoras para hallar longitudes que no conocemos.

Pasos a seguir

1. Identificamos qué tipo de poliedro es y qué datos necesitamos para calcular su área.

   a) Prisma pentagonal regular.

   Necesitamos conocer el lado y la apotema de la base y la altura del prisma.

   b) Pirámide cuadrangular regular.

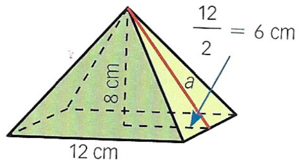
   Necesitamos conocer el lado de la base, la altura de la pirámide y su apotema.

2. Hallamos los datos que no conozcamos a partir de los datos que tenemos.

   a) Sabemos todos los datos; $l = 3$ dm, $a = 2{,}06$ dm, $h = 7$ dm.

   b) Conocemos el lado de la base y la altura de la pirámide, $l = 12$ cm, $h = 8$ cm.

   Para hallar la apotema, a, utilizamos el teorema de Pitágoras.



$$a^2 = 8^2 + 6^2 \rightarrow a^2 = 100$$
$$\rightarrow a = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

3. Aplicamos la fórmula correspondiente a cada poliedro.

   a) $A_T = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B = 5 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 2{,}06}{2} = 135{,}9 \text{ dm}^2$

   b) $A_T = \dfrac{P_B \cdot a}{2} + l^2 = \dfrac{4 \cdot 12 \cdot 10}{2} + 12^2 = 384 \text{ cm}^2$

ACTIVIDADES

25 Calcula el área de un cubo cuya arista mide 10 cm.

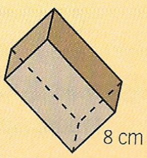
26 Halla el área de un prisma:

a) Hexagonal regular con lado de la base 8 cm y altura 12 cm.

b) Con forma de ortoedro de dimensiones 12 cm, 8 cm y 15 cm.

c) Pentagonal regular con altura 13 cm, lado de la base 8 cm y apotema de la base 5,5 cm.

27 Calcula la altura de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que su área total es 200 cm^2 y la arista de su base mide 8 cm.



28 Halla el área de una pirámide:

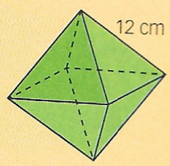
a) Hexagonal regular con lado de la base 6 cm y altura 10 cm.

b) De base cuadrada, con lado 10 cm y altura 8 cm.

c) Pentagonal regular con apotema 15 cm, lado de la base 8 cm y apotema de la base 5,5 cm.

29 Calcula el área de un tetraedro de arista 10 cm.

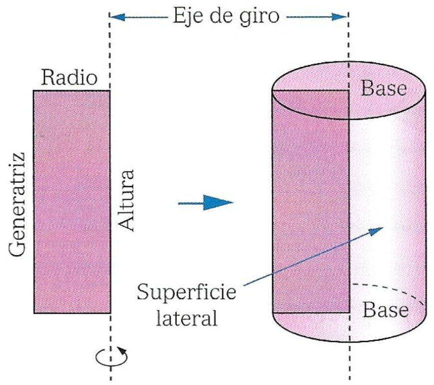
30 Calcula la longitud de la arista de un cubo determinado sabiendo que su área total es la misma que la de un octaedro cuya arista mide 12 cm.



7 Cuerpos de revolución

Un **cuerpo de revolución** es un cuerpo geométrico que se obtiene a partir de una figura plana que gira alrededor de un **eje**.

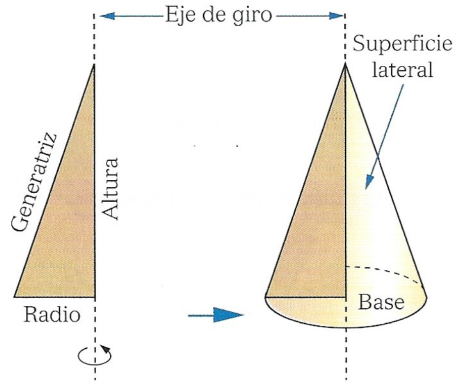
Se llama **altura** del cuerpo a la longitud del eje.



7.1. Cilindro

El **cilindro** es un cuerpo geométrico generado a partir de un rectángulo que gira alrededor de uno de los lados.

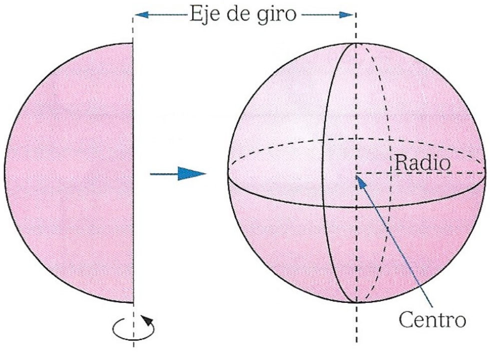
- **Generatriz**: es la longitud del lado opuesto al eje.
- **Bases**: son los dos círculos iguales y paralelos.
- **Radio**: es el radio de la base, o la longitud del lado perpendicular al eje.



7.2. Cono

El **cono** es un cuerpo geométrico generado a partir de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de los catetos.

- **Generatriz**: es la longitud de la hipotenusa del triángulo.
- **Base**: es el círculo generado al girar el cateto perpendicular al eje.
- **Radio**: es el radio de la base, o la longitud del cateto perpendicular al eje.



7.3. Esfera

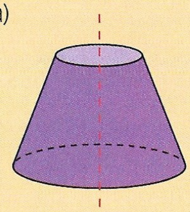
Una **esfera** es un cuerpo de revolución engendrado por un semicírculo que gira sobre su diámetro.

- **Centro**: es el centro del semicírculo.
- **Radio**: es el radio del semicírculo.

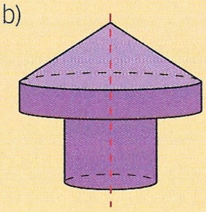
ACTIVIDADES

31 **PRACTICA.** Dibuja la figura que se ha hecho girar alrededor de un eje para obtener estos cuerpos.

a)

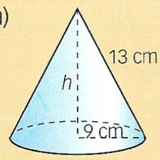


b)

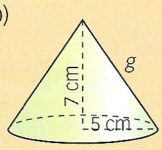


32 **APLICA.** Determina el elemento desconocido.

a)



b)



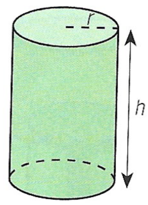
33 **REFLEXIONA.** Un rombo, al girar sobre uno de sus lados, ¿genera un cilindro? ¿Y si es un cuadrado?

SABER HACER

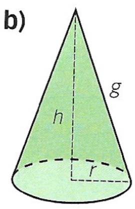
Obtener el desarrollo plano de un cuerpo de revolución

Dibuja el desarrollo plano de estos cuerpos redondos.

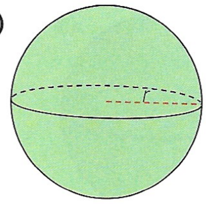
a)



b)



c)



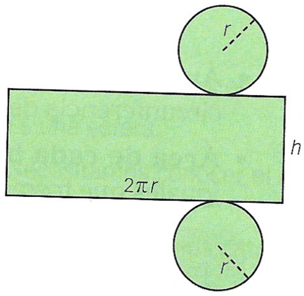
Pasos a seguir

1. Identificamos qué tipo de cuerpo redondo es.

a) Cilindro b) Cono c) Esfera

2. Si es un **cilindro**:
   - Dibujamos el círculo de una base.
   - Dibujamos la superficie lateral unida a la base: un rectángulo con el lado tangente a la base de longitud $2\pi r$.
   - Dibujamos la segunda base al otro lado del rectángulo.

a)

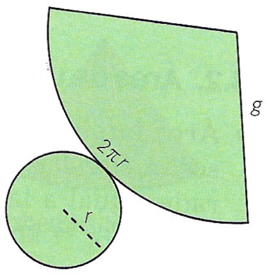


El **desarrollo plano de un cilindro** está formado por:

- Un rectángulo cuya base mide igual que la longitud de la circunferencia de la base y su altura es la del cilindro.
- Dos círculos iguales que constituyen las bases.

3. Si es un **cono**:
   - Dibujamos el círculo de la base.
   - Dibujamos la superficie lateral unida a la base: un sector circular de longitud $2\pi r$.

b)



El **desarrollo plano de un cono** está formado por:

- Un sector circular de longitud $2\pi r$ (siendo r el radio de la base) y radio igual a la generatriz del cono.
- Un círculo que es la base del cono.

4. Si es una **esfera**, no tiene desarrollo plano.

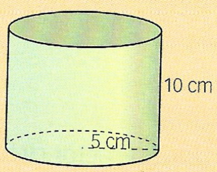
c) No existe el desarrollo plano de una esfera.

ACTIVIDADES

34 Dibuja el desarrollo plano de un cono de 2 cm de radio y 5 cm de generatriz.

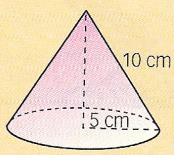
35 Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de altura 3 cm y de radio 1 cm.

36 ¿Qué figuras forman el desarrollo de este cilindro?



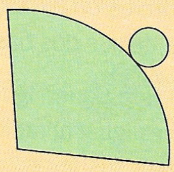
37 Considera el desarrollo del cono. ¿Qué relación encuentras entre la longitud del arco del sector circular y la longitud de la circunferencia de la base del cono?

38 ¿Qué figuras forman el desarrollo de este cono?

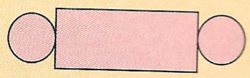


39 Encuentra el error que hay en estos desarrollos y dibújalos bien en tu cuaderno.

a)

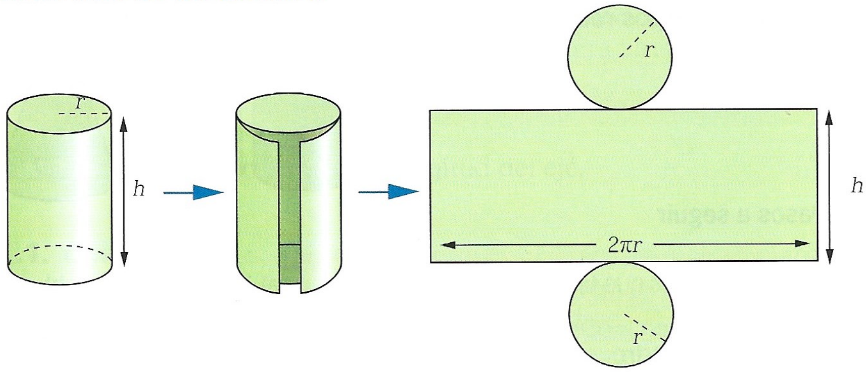


b)



8 Área de cuerpos de revolución

8.1. Área de un cilindro



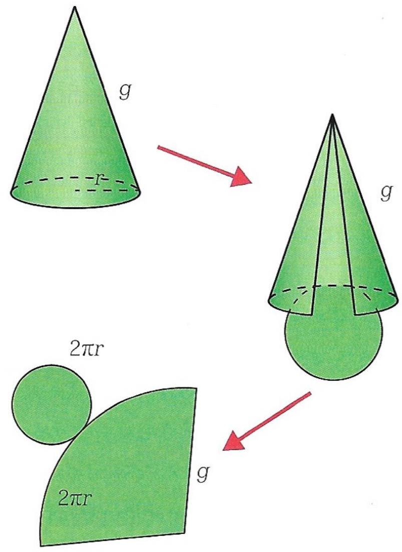
- **Área lateral**, A_L, es el área de un rectángulo de base la longitud de la circunferencia de la base y altura, la altura del cilindro: $A_L = 2\pi r \cdot h$.
- **Área de cada base**, A_B, es el área de cada uno de los dos círculos iguales que forman sus bases: $A_B = \pi r^2$.

El **área total de un cilindro** es: $A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2$

8.2. Área de un cono

- **Área lateral**, A_L, es el área de un sector circular de longitud $2\pi r$ y radio igual a la generatriz del cono, g: $A_L = \pi r \cdot g$.
- **Área de la base**, A_B, es el área del círculo de la base: $A_B = \pi r^2$.

El **área total de un cono** es:
$A_T = A_L + A_B = \pi rg + \pi r^2$



8.3. Área de una esfera

El **área total de una esfera** es: $A_T = 4\pi r^2$

ACTIVIDADES

40 **PRACTICA.** La base de un cilindro es un círculo de radio 10 cm. ¿Cuál será el área de sus dos bases?

41 **PRACTICA.** Un cilindro y una esfera tienen igual radio, r. Si la altura del cilindro es igual al radio de la base, ¿qué relación guardan sus áreas?

42 **APLICA.** El sector circular correspondiente al desarrollo de un cono tiene un arco de longitud 314 cm. ¿Cuál es el radio de su base?

43 **REFLEXIONA.** Si se duplica el radio de una esfera, ¿qué ocurre con su área?

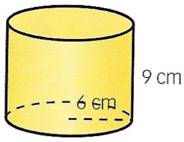
SABER HACER

Al aplicar el teorema de Pitágoras, recuerda que el lado mayor es siempre la hipotenusa.

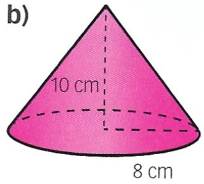
Calcular el área de un cuerpo de revolución

Halla el área de estos cuerpos de revolución.

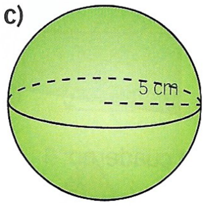
a)



b)



c)



Pasos a seguir

1. Identificamos qué tipo de cuerpo de revolución es y qué datos necesitamos para calcular su área.

a) Es un cilindro.
Necesitamos conocer el radio de la base y la altura.

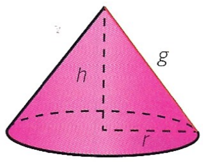
b) Es un cono.
Necesitamos conocer el radio de la base y la generatriz.

c) Es una esfera.
Necesitamos conocer el radio.

2. Hallamos los datos que no conozcamos a partir de los datos que tenemos.

a) Sabemos todos los datos: $r = 6$ cm, $h = 9$ cm.

b) Sabemos el radio de la base y la altura: $r = 8$ cm, $h = 10$ cm. Hallamos la generatriz, g, utilizando el teorema de Pitágoras.



$$g^2 = 10^2 + 8^2 \rightarrow g^2 = 164$$
$$\rightarrow g = \sqrt{164} = 12{,}8 \text{ cm}$$

c) Sabemos todos los datos: $r = 5$ cm.

3. Aplicamos la fórmula correspondiente a cada cuerpo.

a) $A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 6 \cdot 9 + 2\pi \cdot 6^2 = 565{,}2 \text{ cm}^2$

b) $A_T = \pi rg + \pi r^2 = \pi \cdot 8 \cdot 12{,}8 + \pi \cdot 8^2 = 522{,}5 \text{ cm}^2$

c) $A_T = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 314 \text{ cm}^2$

ACTIVIDADES

44 Halla el área de un cilindro:

a) De 10 cm de radio y 5 cm de altura.

b) De radio 9 cm y altura doble del radio.

c) De altura 10 cm y cuyas bases tienen cada una un área de 628 cm².

45 Halla el área de un cono:

a) De 8 cm de radio y 10 cm de generatriz.

b) De radio 9 cm y altura 12 cm.

c) De altura 10 cm y generatriz 12 cm.

d) De altura 10 cm y cuya base tiene un área de 314 cm².

46 Halla el área de:

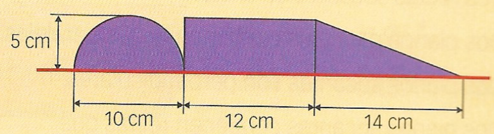
a) Una esfera de radio 20 cm.

b) Un cilindro de radio y altura iguales a 20 cm.

c) Un cono de radio y altura iguales a 20 cm.

d) ¿Qué observas en los tres resultados anteriores?

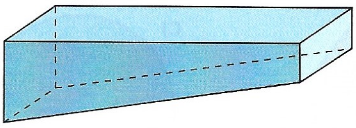
47 Halla el área del cuerpo que se genera al girar la figura alrededor del eje rojo.



ACTIVIDADES FINALES

Rectas y planos en el espacio

48 Indica las posiciones de los planos y de las rectas que veas en el siguiente cuerpo geométrico.



49 Dibuja en el cuaderno:

a) Dos planos paralelos.
b) Dos planos secantes no perpendiculares.
c) Dos rectas secantes a un plano.
d) Una recta contenida en un plano.

50 Considera las caras de un cubo como planos.

a) ¿Cuántas posiciones de planos paralelos hay?
b) ¿Cuántas posiciones de planos secantes hay?

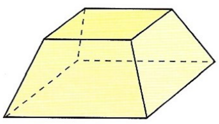
51 Considera las aristas de un cubo como rectas ilimitadas. Traza un cubo en tu cuaderno y dibuja:

a) Dos rectas paralelas.
b) Dos rectas secantes.
c) Dos rectas que se cruzan.

52 Considera las caras de un cubo como planos y las aristas como rectas.

a) ¿Cuántas posiciones de recta paralela a un plano hay?
b) ¿Y de recta secante a un plano?
c) ¿Y de recta contenida en un plano?

53 Indica las posiciones de rectas y planos que encuentres en este cuerpo geométrico.



54 Contesta a estas preguntas.

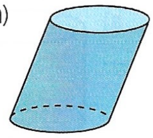
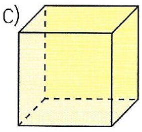
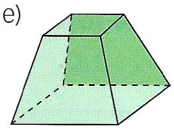
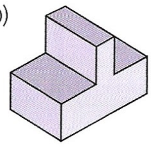
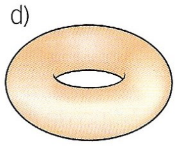
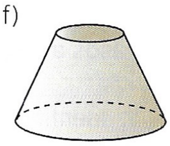
a) ¿Cuántas rectas pasan por un punto en el espacio?
b) ¿Cuántos planos contienen a una recta en el espacio?

55 Decide si es verdadero o falso.

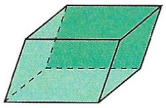
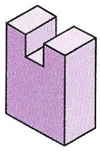
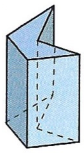
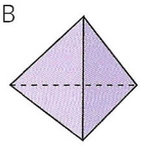
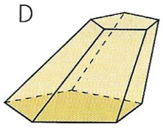
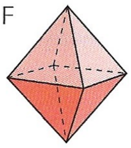
a) Tres puntos no alineados determinan un plano.
b) Dos rectas secantes se cruzan.
c) Dos planos paralelos contienen rectas paralelas.
d) Dos planos secantes son perpendiculares.
e) Dos planos secantes contienen rectas que se cruzan.

Poliedros. Poliedros regulares

56 Indica cuáles de estos cuerpos son poliedros. Razona tu respuesta.

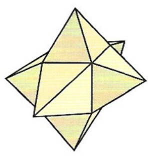
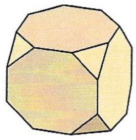
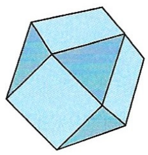
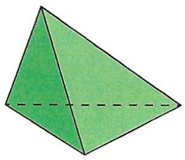
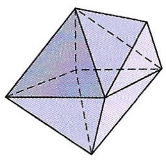
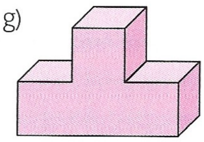
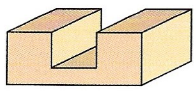
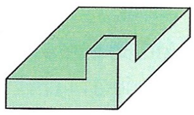
a) 
c) 
e) 
b) 
d) 
f) 

57 Observa estos poliedros.

A 
C 
E 
B 
D 
F 

a) Escribe en tu cuaderno el número de caras, vértices y aristas de cada cuerpo.
b) ¿Qué poliedros son regulares? Razona tu respuesta.
c) ¿Se cumple la fórmula de Euler en todos los poliedros? ¿Por qué? Compruébalo.

58 Clasifica los siguientes poliedros en cóncavos o convexos. Evalúa para cada uno de ellos si cumple la fórmula de Euler.

a) 
e) 
b) 
f) 
c) 
g) 
d) 
h) 

59 Copia y completa la tabla en tu cuaderno, sabiendo que los datos pertenecen a poliedros en los que se cumple la fórmula de Euler.

N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas
9		21
	8	12
11		27
12	20	

60 Indica el nombre de estos poliedros regulares.

a) Tiene seis caras cuadradas.

b) Tiene 4 vértices.

c) Tiene 20 caras, que son triángulos equiláteros.

d) Tiene 12 caras.

Prismas y pirámides

61 Dibuja estos cuerpos, marca sus elementos y dibuja también sus desarrollos planos.

a) Prisma triangular.

b) Pirámide cuadrangular.

c) Prisma pentagonal.

d) Pirámide hexagonal.

62 Dibuja un prisma regular y uno irregular.

63 Dibuja una pirámide recta y una oblicua que tengan la misma base.

64 Razona qué afirmaciones son verdaderas.

a) Un cubo es un ortoedro.

b) La altura de un prisma oblicuo es la arista lateral.

c) Los prismas oblicuos se clasifican en regulares e irregulares.

d) Un tetraedro es un prisma regular, recto y de base triangular.

e) Las pirámides irregulares son siempre oblicuas.

f) La apotema es la altura de las pirámides regulares.

g) En una pirámide regular, las caras laterales son triángulos equiláteros.

h) Una pirámide es un prisma triangular.

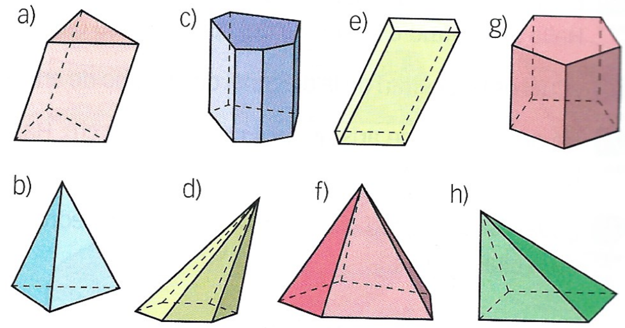
i) La altura de una pirámide es cualquiera de sus aristas laterales.

j) Una pirámide regular es un tetraedro.

k) Una pirámide tiene siempre más vértices que aristas.

65 Identifica similitudes y diferencias entre una pirámide triangular regular y un tetraedro.

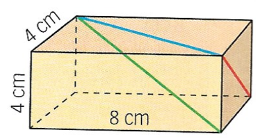
66 Clasifica estos cuerpos según el polígono que forma su base e indica si son oblicuos o rectos. ¿Cuáles son irregulares?



SABER HACER

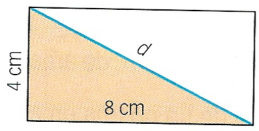
Calcular las diagonales de un ortoedro a partir de sus aristas

67 Calcula la longitud de las diagonales de este ortoedro.

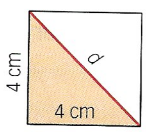


En un ortoedro hay tres tipos de diagonales: las de las caras laterales (en azul), las de las bases (en rojo) y las situadas entre vértices de caras opuestas (en verde).

PRIMERO. Se determinan las diagonales de las caras que son la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como catetos los lados de la cara. Se aplica el teorema de Pitágoras:

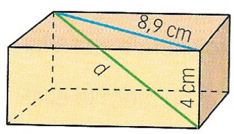


$$d^2 = 4^2 + 8^2$$
$$d = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}9 \text{ cm}$$



$$d^2 = 4^2 + 4^2$$
$$d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5{,}7 \text{ cm}$$

SEGUNDO. Se determinan las diagonales que hay situadas entre vértices de caras opuestas. Estas diagonales son la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como catetos las diagonales de las caras laterales y las aristas de la base. Se aplica el teorema de Pitágoras:



$$d^2 = 4^2 + (8{,}9)^2$$
$$d = \sqrt{4^2 + (8{,}9)^2} = 9{,}8 \text{ cm}$$

68 Halla la diagonal de un cubo de arista 10 cm. Halla también la diagonal de una de las caras.

69 En un cubo la diagonal de una de las caras mide 8 cm. Halla la longitud de la arista del cubo y de su diagonal.

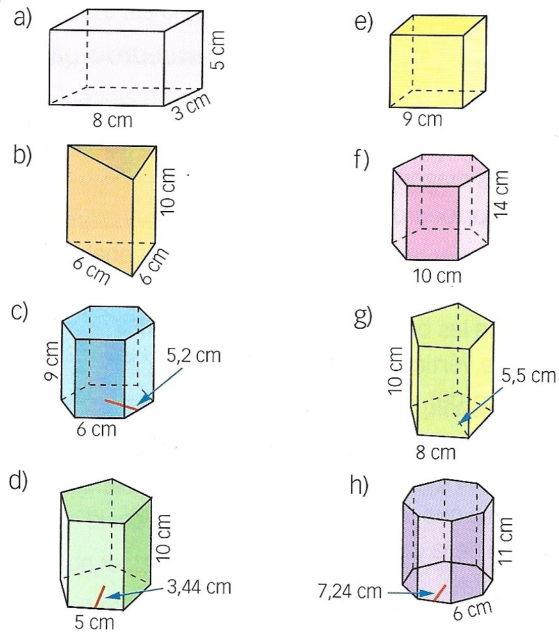
70 ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un cubo de arista a?

71 Un ortoedro tiene aristas de 4 cm, 5 cm y 9 cm. Halla la longitud de todas sus diagonales.

72 ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un ortoedro de aristas a, b y c?

Área de prismas y pirámides

73 Calcula el área de estos prismas.

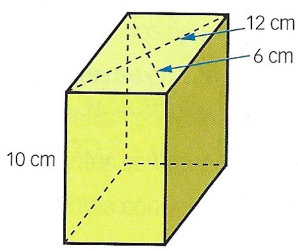


74 Halla la arista de un cubo que tiene 150 cm² de área total.

75 Halla la arista básica y la lateral de un prisma en el que la base es un triángulo equilátero, si el área lateral es 144 cm² y la arista básica es una tercera parte de la lateral. Calcula también el área total.

76 Calcula la arista básica y la arista lateral de un prisma de base cuadrada, que tiene de área total 90 cm², si la arista lateral es el doble de la arista básica.

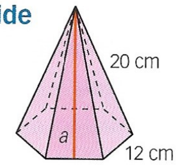
77 Determina el área lateral y total de este prisma, que tiene las bases formadas por rombos.



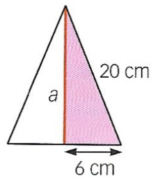
SABER HACER

Calcular el área de una pirámide conociendo sus aristas

78 Calcula el área total de esta pirámide.



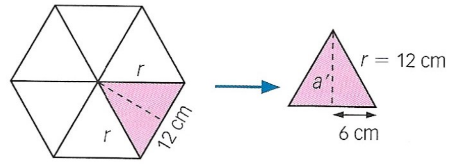
PRIMERO. Se calcula la apotema de la pirámide.



Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que forman la apotema de la pirámide, la mitad del lado de la base y la arista lateral.

$$20^2 = a^2 + 6^2 \rightarrow a = \sqrt{20^2 - 6^2} = 19{,}1\text{ cm}$$

SEGUNDO. Se calcula la apotema de la base. Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que forman la apotema de la base, la mitad del lado de la base y el radio de la base.



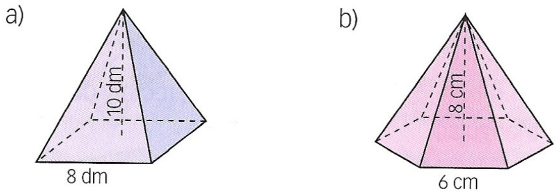
$$12^2 = (a')^2 + 6^2 \rightarrow a' = \sqrt{12^2 - 6^2} = 10{,}4\text{ cm}$$

TERCERO. Se calcula el área de la pirámide.

$$A_T = \frac{P_B \cdot a}{2} + \frac{P_B \cdot a'}{2} =$$

$$= \frac{(6 \cdot 12) \cdot 19{,}1}{2} + \frac{(6 \cdot 12) \cdot 10{,}4}{2} = 1062\text{ cm}^2$$

79 Halla el área de estas pirámides regulares.



80 Halla el área de un tetraedro y de un octaedro cuya arista mide 10 cm de longitud.

81 Halla la arista básica de un tetraedro que mide 62,28 cm² de área total.

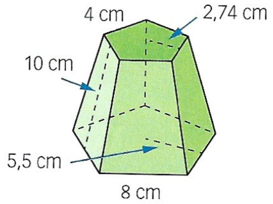
82 Calcula el valor de la arista lateral de una pirámide regular de base cuadrada inscrita en un cubo que tiene un área total de 486 cm².

83 Halla la arista lateral de una pirámide regular hexagonal de 4 cm de lado de la base si el área lateral es 72 cm². Calcula el área total de la pirámide.

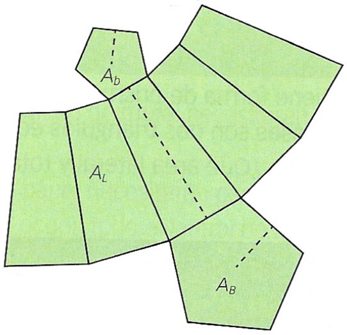
SABER HACER

Calcular el área de un tronco de pirámide

84 Calcula el área de este tronco de pirámide pentagonal regular.



PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco.



Las bases son pentágonos regulares, las caras laterales son trapecios isósceles y su altura es la apotema.

SEGUNDO. Se calcula el área lateral, suma de las áreas de los cinco trapecios.

$$A_L = 5 \cdot A_{\text{TRAPECIO}} = 5 \cdot \frac{8+4}{2} \cdot 10 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ cm}^2$$

TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \frac{5 \cdot 8 \cdot 5{,}5}{2} = 110 \text{ cm}^2$$

$$A_{B'} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2{,}74}{2} = 27{,}4 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_{B'} = 300 + 110 + 27{,}4 = 437{,}4 \text{ cm}^2$$

85 Calcula el área lateral y el área total de un tronco de pirámide pentagonal regular, cuyas medidas son:

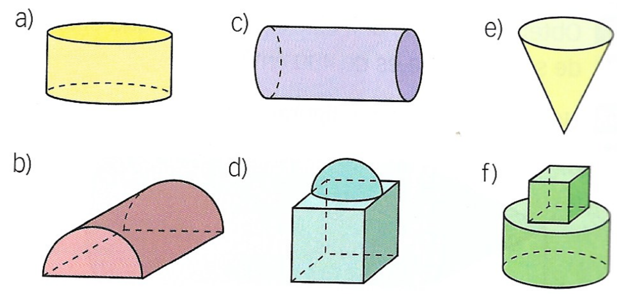
- Arista de la base mayor: 10 cm.
- Apotema de la base mayor: 6,84 cm.
- Arista de la base menor: 6 cm.
- Apotema de la base menor: 4,1 cm.
- Apotema del tronco: 7,5 cm.

86 Calcula el área total de un tronco de pirámide hexagonal regular, cuyas medidas son:

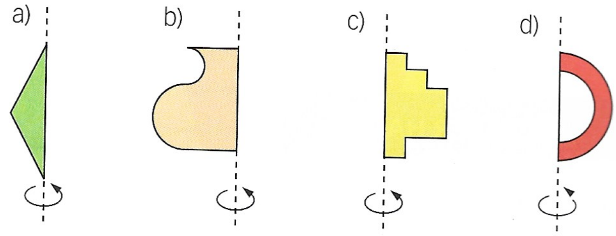
- Arista de la base mayor: 12 cm.
- Apotema de la base mayor: 10,39 cm.
- Arista de la base menor: 8 cm.
- Apotema del tronco: 4,6 cm.

Cuerpos de revolución

87 Determina cuáles de estos cuerpos son cuerpos de revolución. Razona tu respuesta.



88 Dibuja en tu cuaderno los cuerpos de revolución obtenidos al girar estas figuras alrededor del eje indicado.

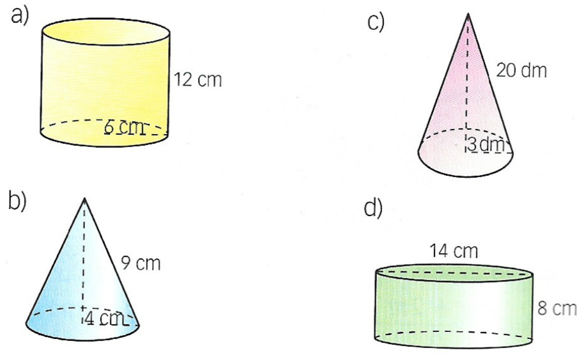


89 Dibuja el desarrollo de un cono en el que la altura mide 4 cm y el radio de la base 3 cm.

90 La altura de un cilindro es 7 cm y el radio de la base 3 cm. Dibuja el desarrollo plano.

Área de cuerpos de revolución

91 Calcula el área de estos cuerpos.



92 Determina el radio de la base de un cilindro que tiene 175,84 cm^2 de área lateral y una altura de 7 cm.

93 El área total de un cilindro es 87,92 cm^2. Sabiendo que la altura es el triple de grande que el radio de la base, halla sus dimensiones.

94 Halla el radio de la base de un cono, sabiendo que la generatriz es el doble del radio y el área total es 233,5 cm^2.

ACTIVIDADES FINALES

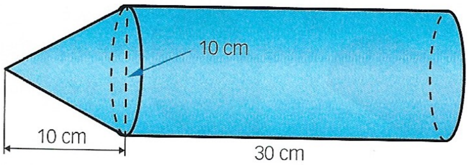
95 Halla la altura de un cono cuya generatriz mide 20 cm y el radio de la base 6 cm.

96 Obtén el área de una esfera cuyo diámetro es 30 cm.

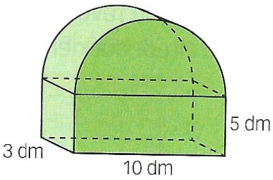
97 Obtén el radio de una esfera, sabiendo que el área de su superficie es de 400 cm².

98 Halla el área de estas figuras.

a)



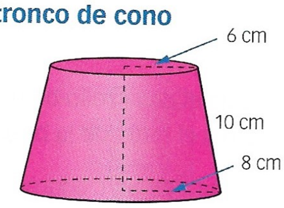
b)



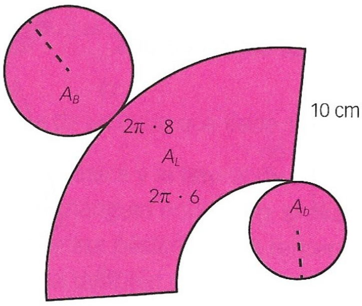
SABER HACER

Calcular el área de un tronco de cono

99 Calcula el área de este tronco de cono.



PRIMERO. Se dibuja el desarrollo plano del tronco. Su superficie lateral está formada por un trapecio curvilíneo y las dos bases son círculos.



SEGUNDO. Se calcula el área lateral.

$$A_L = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = (r + r') \cdot \pi g =$$
$$= (8 + 6) \cdot \pi \cdot 10 = 439{,}6 \text{ cm}^2$$

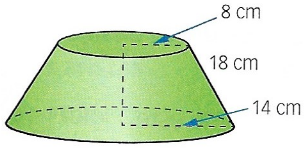
TERCERO. Se calcula el área de las bases.

$$A_B = \pi \cdot 8^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$$
$$A_{B'} = \pi \cdot 6^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$$

CUARTO. Se calcula el área total.

$$A_T = A_L + A_B + A_{B'} = 439{,}6 + 200{,}96 + 113{,}04 =$$
$$= 753{,}6 \text{ cm}^2$$

100 Calcula el área lateral y el área total de este tronco de cono.



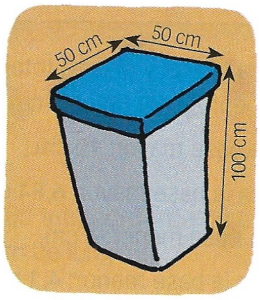
101 Halla el área total de un tronco de cono que tiene como radio de la base mayor 20 cm, radio de la base menor 3 cm y generatriz 15 cm.

Problemas

102 Un edificio tiene forma de prisma recto de 50 m de altura y sus bases son dos triángulos equiláteros de 20 m de lado. ¿Qué área lateral y total tiene el edificio?

103 Las paredes y el techo de una habitación tienen un área de 100 m². Si el suelo es un rectángulo de 8 m de largo y 5 m de ancho, ¿qué altura tiene dicha habitación?

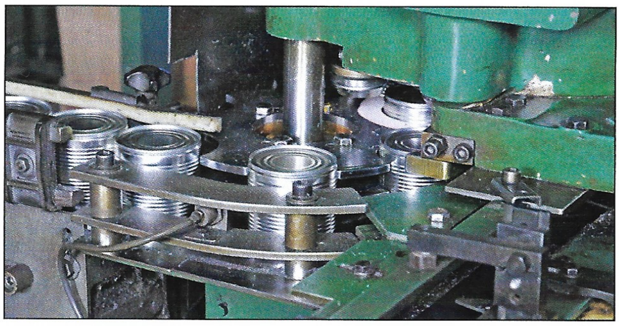
104 ¿Qué cantidad de plástico se necesita para construir 5 000 cubos iguales que este?



105 Calcula el área lateral y total de una obra artística en forma de pirámide hexagonal, cuyo lado del hexágono mide 5 m y el lado mayor de los triángulos laterales mide 4 m.

106 Se quiere pintar una estructura cónica de radio 10 m y de altura 15 m. ¿Qué cantidad de pintura se gastará? ¿Cuánto costará, si la pintura tiene un precio de 5 €/m²?

107 En una fábrica de latas de conserva quieren producir un pedido de 20 000 latas. Cada lata de tomate tiene forma de cilindro, con 12 cm de altura y 8 cm de diámetro de la base.

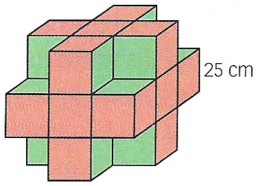


a) ¿Qué cantidad de metal necesitarán para hacer todas las latas?

b) ¿Cuánto papel necesitarán para etiquetarlas si la etiqueta ocupa todo el lateral de la lata?

108 La cúpula de un edificio es semiesférica y tiene un diámetro aproximado de 18 m. Si se ha recubierto por fuera con baldosas rectangulares de medidas 20 × 20 cm, ¿cuántas baldosas necesitaron?

109 Para un juego se van a preparar quinientas piezas como la de la figura.

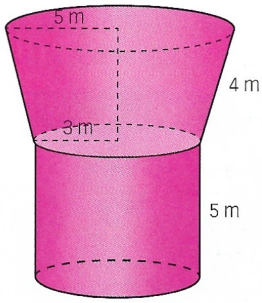


a) ¿Cuál es mayor: el área de color rojo o el área de color verde?

b) ¿Cuál es el área total de cada pieza?

c) Si cada metro cuadrado de pintura roja cuesta 2 € y el de pintura verde cuesta 2,50 €, ¿cuánto costará pintar todas las piezas?

110 Para recoger el agua de lluvia se va a construir un depósito de metal con estas dimensiones:



a) Si se deja destapado por arriba, ¿qué área de metal se necesitará?

b) Si se aumentasen un 10 % todas las dimensiones, ¿cómo sería la nueva área respecto a la inicial?

DEBES SABER HACER

Rectas y planos en el espacio

1 Indica las afirmaciones que son falsas y corrígelas.

a) Tres puntos no alineados determinan un plano.

b) Dos rectas secantes se cruzan.

c) Dos planos paralelos contienen rectas paralelas.

d) Dos planos secantes son perpendiculares.

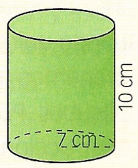
Poliedros y cuerpos de revolución

2 Dibuja un poliedro convexo y comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

3 Dibuja el desarrollo plano de un ortoedro y de un octaedro.

4 Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular de arista básica 4 cm y de altura 4 cm.

5 Dibuja el desarrollo plano de este cilindro, marca los elementos y calcula el área total.



6 Calcula el área total de un cono de 2 cm de radio y 4 cm de generatriz.

Problemas con cuerpos geométricos

7 Determina el área de una pelota cuyo diámetro mide 35 cm.

8 Las paredes y el techo de una habitación tienen un área de 94 m². Si el suelo es un rectángulo de 7 m de largo y 4 m de ancho, ¿qué altura tiene la habitación?