

1

Rectas



SE ESCRIBE ASÍ

Las rectas se nombran mediante una letra minúscula: $a, b, c, r, s, t...$

Los puntos se indican mediante letras mayúsculas: $A, B, C, P, Q, R...$

Una **recta** es una línea sin principio ni final formada por infinitos puntos.

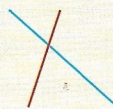
Como la recta no tiene ni principio ni final, no podemos dibujarla entera, y por eso representamos solo una parte de ella.



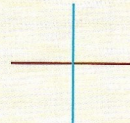
Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Dos líneas rectas en el plano pueden ser:

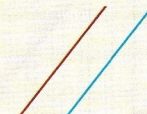
- **Secantes:** cuando se cortan en un punto.
- **Perpendiculares:** son dos rectas secantes que dividen el plano en cuatro partes iguales.
- **Paralelas:** si no tienen ningún punto en común.
- **Coincidentes:** cuando todos sus puntos son comunes.



Rectas secantes



Rectas perpendiculares

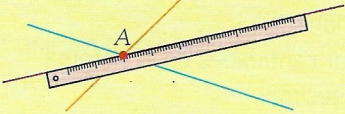


Rectas paralelas

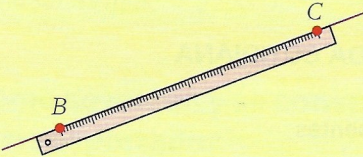


Rectas coincidentes

- Por un punto pasan infinitas rectas.

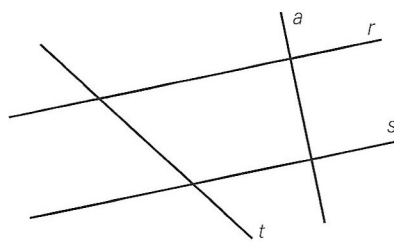


- Por dos puntos pasa una sola recta




EJEMPLO

1. Determina la posición relativa de estas rectas.



Rectas secantes:

ryt syt ayt

Rectas perpendiculares:

rya sya

Rectas paralelas: r y s

ACTIVIDADES

1 PRACTICA. Marca en tu cuaderno dos puntos y traza una recta r que pase por ellos. Luego, traza una recta t perpendicular a r que pase por B y una recta s paralela a t que pase por A . ¿Cómo son entre sí las rectas r y s ?

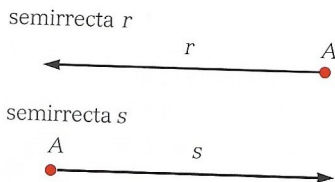
2 APLICA. Dibuja dos rectas, r y s , que sean perpendiculares. ¿Puedes dibujar una recta secante a r que no sea secante con s ?

3 REFLEXIONA. ¿Cuántas rectas perpendiculares a una recta dada puedes trazar? ¿Y paralelas?

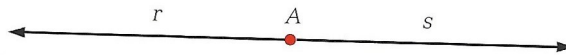
2

Semirrectas y segmentos

Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no final.



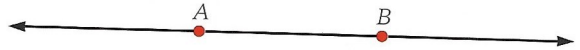
Cada punto de una recta es origen de dos semirrectas.



Un **segmento** es la parte de una recta delimitada por dos puntos. El segmento tiene principio y final.

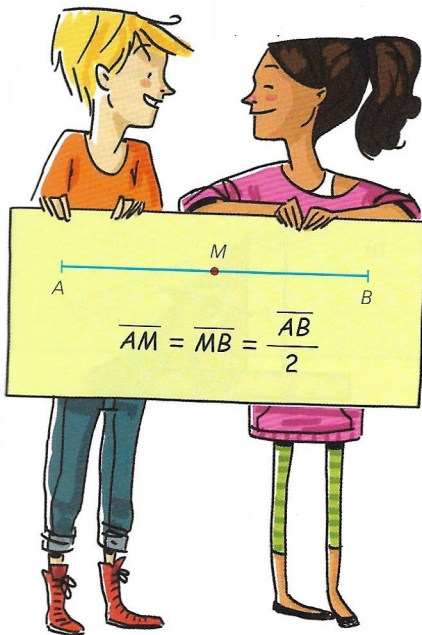
A y B se llaman **extremos del segmento**.

Al segmento de extremos A y B, se le llama segmento AB.



Mediatriz de un segmento

La **mediatriz** de un segmento, AB, es la recta perpendicular al segmento que pasa por su **punto medio**, el punto que divide al segmento en dos partes iguales.

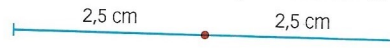


EJEMPLOS

2. Observa estos dos puntos sobre la misma recta; señala los segmentos y semirrectas que distingas. Cada uno de los puntos define dos semirrectas con origen en ese punto, en total 4 semirrectas. Se puede formar un único segmento, AB.



3. Dibuja un segmento de 5 centímetros y marca en él su punto medio.



El punto medio está a $\frac{5}{2} = 2,5$ cm de cualquiera de los extremos.

ACTIVIDADES

- 7 **PRACTICA.** Dibuja una recta y señala sobre ella tres puntos. Indica las semirrectas y segmentos que se forman.
- 8 **PRACTICA.** Dibuja un segmento AB de 6 cm de longitud y determina su punto medio. ¿A qué distancia se encuentra este punto de A?

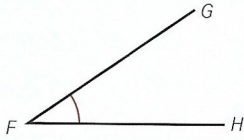
- 9 **APLICA.** Marca dos puntos, A y B, en tu cuaderno. Dibuja dos rectas que se corten en un punto C, de tal manera que una pase por A y la otra por B. Indica los segmentos y semirrectas que se forman.
- 10 **REFLEXIONA.** ¿Cuántos segmentos y semirrectas se forman con tres puntos no alineados?

3

Ángulos

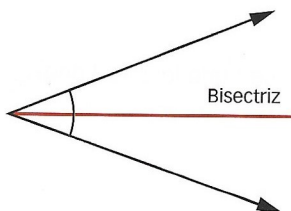


SE ESCRIBE ASÍ



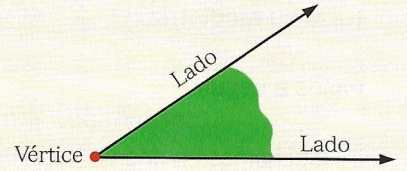
Este ángulo lo podemos representar de dos formas:

- Con el símbolo $\hat{\sim}$ sobre la letra F (vértice del ángulo): \hat{F} .
- Con el símbolo $\hat{\sim}$ sobre las tres letras que determinan el ángulo: \widehat{HFG} , de manera que quede en el centro la letra que determina el vértice, en este caso F .



Llamamos **ángulo** a la abertura formada por dos semirrectas que parten de un mismo punto.

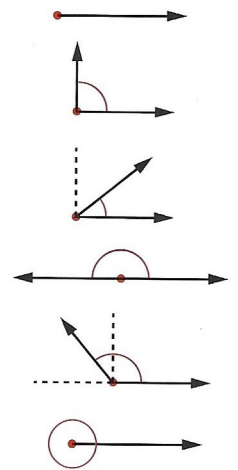
A cada semirrecta se la denomina **lado** y el punto se llama **vértice**.



3.1. Clasificación de ángulos

Dependiendo del tamaño de la abertura, los ángulos pueden ser:

- **Ángulo nulo.** Sus lados son coincidentes y no tienen abertura.
- **Ángulo recto.** Sus lados son perpendiculares y su abertura es la cuarta parte del total.
- **Ángulo agudo.** Su abertura es inferior a la de un ángulo recto.
- **Ángulo llano.** Sus lados forman una recta y su abertura es la mitad del total.
- **Ángulo obtuso.** Su abertura es superior a un ángulo recto e inferior a uno llano.
- **Ángulo total.** Sus lados son coincidentes y su abertura ocupa todo el plano.



3.2. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta cuyo origen es el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

EJEMPLO

4. Al trazar la mediatriz de un ángulo llano, ¿cómo son los ángulos en los que queda dividido?

La mediatriz de un ángulo llano divide al ángulo en dos ángulos rectos.



ACTIVIDADES

18 PRACTICA. Junta tus manos, palma con palma y sepáralas poco a poco manteniendo juntas las muñecas. ¿Cómo son los ángulos que se forman?

19 APLICA. Describe más ángulos que encuentres tomando partes de tu cuerpo.

20 REFLEXIONA. Responde razonadamente.

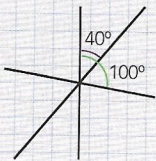
- ¿Qué relación hay entre los lados de un ángulo llano y su bisectriz?
- En un ángulo \widehat{AOB} , la bisectriz forma dos ángulos agudos. ¿Cómo es el ángulo \widehat{AOB} ?

4

Posiciones relativas de ángulos

RESUELVE EL RETO

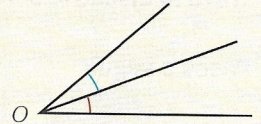
¿Cuántos ángulos de medidas diferentes se pueden ver esta figura?



Los ángulos adyacentes son suplementarios.
Los ángulos suplementarios son adyacentes si tienen un lado común.

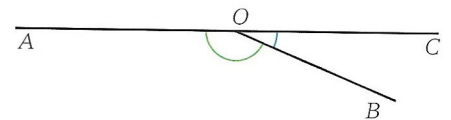


Ángulos consecutivos son ángulos que tienen en común el vértice y un lado.

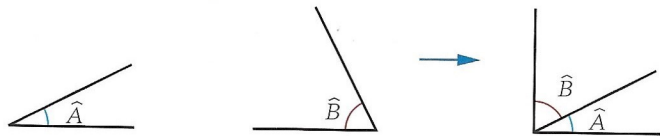


Una vez que sabemos qué son ángulos consecutivos, podemos definir:

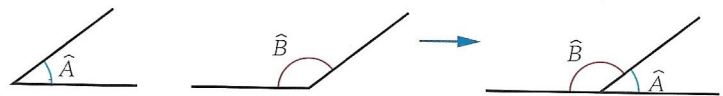
• **Ángulos adyacentes.** Son ángulos consecutivos que forman entre los dos un ángulo llano.



• **Ángulos complementarios.** Son dos ángulos que, al hacerlos consecutivos, forman un ángulo recto.



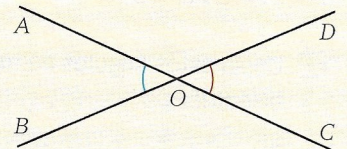
• **Ángulos suplementarios.** Son dos ángulos que, al hacerlos consecutivos, forman un ángulo llano.



4.1. Ángulos opuestos por el vértice

Ángulos opuestos por el vértice.

Son ángulos que tienen en común el vértice, y sus lados están sobre las mismas rectas.



En los ángulos opuestos por el vértice se cumple siempre:

- Los ángulos enfrentados son iguales: $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ y $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$
- Los ángulos consecutivos son adyacentes.

\widehat{AOB} y \widehat{BOC} son adyacentes

\widehat{COD} y \widehat{DOA} son adyacentes

\widehat{BOC} y \widehat{COD} son adyacentes

\widehat{DOA} y \widehat{AOB} son adyacentes

ACTIVIDADES

26 PRACTICA. Copia en tu cuaderno estos ángulos y construye sus ángulos adyacentes.

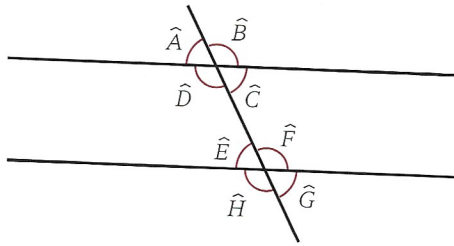


27 APLICA. Dibuja dos ángulos consecutivos tales que el ángulo que forman entre los dos tenga un ángulo recto como suplementario.

28 REFLEXIONA. ¿Cuántos ángulos adyacentes tiene un ángulo? ¿Y complementarios? ¿Cuántos tiene suplementarios?

4.2. Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

Al cortar dos rectas paralelas con otra secante a ambas rectas, se forman ocho ángulos.



En esta situación siempre se cumplen las siguientes relaciones:

- Los siguientes ángulos son:

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{E} = \hat{G}$$

$$\hat{B} = \hat{D} \quad \hat{F} = \hat{H}$$

Por ser opuestos por el vértice.

$$\hat{A} = \hat{E} \quad \hat{B} = \hat{F}$$

$$\hat{C} = \hat{G} \quad \hat{D} = \hat{H}$$

Por ser ángulos de lados paralelos.

A estos ángulos se les llama **ángulos correspondientes**.

$$\hat{C} = \hat{E}$$

$$\hat{D} = \hat{F}$$

Por ser ángulos de lados paralelos.

A estos ángulos se les llama **ángulos alternos internos**.

$$\hat{A} = \hat{G}$$

$$\hat{B} = \hat{H}$$

Por ser ángulos de lados paralelos.

A estos ángulos se les llama **ángulos alternos externos**.

- Los siguientes ángulos son suplementarios.

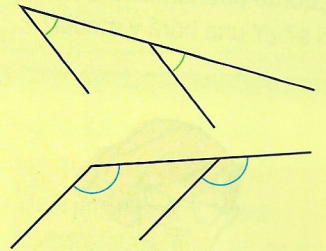
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ y } \hat{B} \quad \hat{C} \text{ y } \hat{D} \\ \hat{E} \text{ y } \hat{F} \quad \hat{G} \text{ y } \hat{H} \\ \hat{A} \text{ y } \hat{D} \quad \hat{E} \text{ y } \hat{H} \\ \hat{B} \text{ y } \hat{C} \quad \hat{F} \text{ y } \hat{G} \end{array} \right\}$$

Por ser opuestos adyacentes.

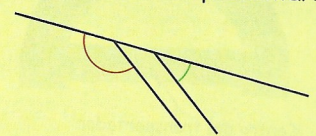
$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} \text{ y } \hat{F} \quad \hat{A} \text{ y } \hat{H} \\ \hat{B} \text{ y } \hat{E} \quad \hat{B} \text{ y } \hat{G} \\ \hat{C} \text{ y } \hat{F} \quad \hat{C} \text{ y } \hat{H} \\ \hat{D} \text{ y } \hat{E} \quad \hat{D} \text{ y } \hat{G} \end{array} \right\}$$

Por tener lados paralelos y ser uno agudo y el otro obtuso.

Si dos ángulos agudos tienen uno de sus lados sobre la misma recta y los otros lados son paralelos, son iguales. Ocurre lo mismo si ambos son obtusos.

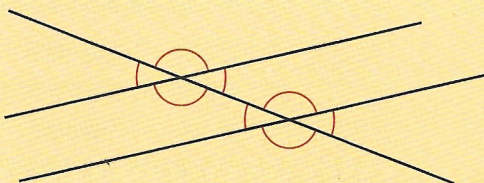


Si un ángulo agudo y otro obtuso tienen uno de sus lados sobre la misma recta y los otros lados son paralelos, son suplementarios.



ACTIVIDADES

29 PRACTICA. Copia en tu cuaderno, nombra los ángulos e identifica los que sean iguales.



30 APLICA. Determina en la figura anterior los ángulos que sean suplementarios.

31 REFLEXIONA. Si dadas dos paralelas y una secante sabemos que uno de los ángulos que se forman mide 30° , ¿puedes dar el valor del resto de ángulos? Haz un dibujo e indica el valor de cada ángulo.

5

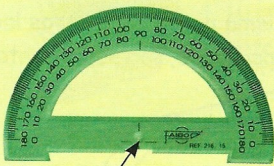
Sistema sexagesimal

RESUELVE EL RETO

Tenemos dos relojes de arena, uno dura 15 s y el otro, 25 s. ¿Cómo podríamos contar 5 s? ¿Y una hora y media?



Para medir ángulos en grados se utiliza el transportador. Recuerda que el centro del transportador debe estar siempre situado en el vértice del ángulo.



Centro del transportador

El **sistema sexagesimal** es un sistema de medida en el que cada unidad es 60 veces mayor que la unidad del orden inmediato inferior.

El sistema sexagesimal lo utilizamos para medir amplitudes de ángulos y medidas de tiempo menores que el día.

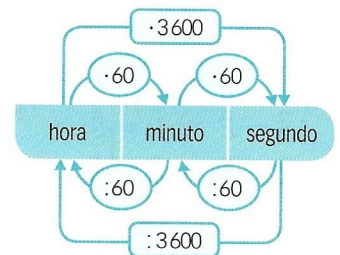
5.1. Medidas de tiempo

La unidad principal de medida de tiempo es la **hora**; se escribe h.

Para medir tiempos con más precisión se utilizan unidades menores que la hora: el **minuto** (min) y el **segundo** (s).

$$1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} (1 \text{ h} = 60 \text{ min})$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos} (1 \text{ min} = 60 \text{ s})$$



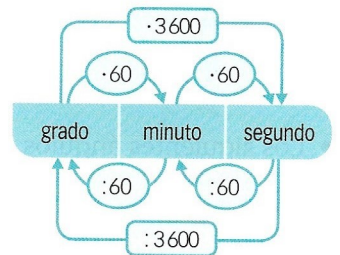
5.2. Medidas de ángulos

La unidad principal de medida de ángulos es el **grado**; se escribe °.

Para medir ángulos con más precisión se utilizan unidades menores que el grado: el **minuto** (') y el **segundo** (").

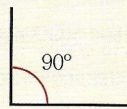
$$1 \text{ grado} = 60 \text{ minutos} (1^\circ = 60')$$

$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos} (1' = 60'')$$

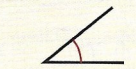


Ahora podemos clasificar los ángulos según su medida.

Un ángulo recto mide 90° .



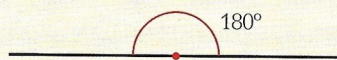
Un ángulo agudo mide menos de 90° .



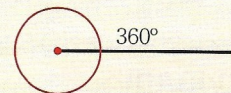
Un ángulo obtuso mide más de 90° .



Un ángulo llano mide 180° .



Un ángulo completo mide 360° .



ACTIVIDADES

32 PRACTICA. Con ayuda del transportador, dibuja un ángulo de 45° y otro de 90° .

33 APLICA. Dibuja dos ángulos adyacentes, uno de ellos de 60° .

34 REFLEXIONA. Dibuja dos ángulos consecutivos que sean complementarios. ¿Cuánto mide cada ángulo? ¿Puede haber otros dos ángulos con medidas distintas que cumplan las mismas condiciones?

➔ SABER HACER

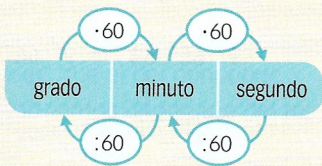
Transformar unidades de medida de ángulos

Expresa estas medidas de ángulos en las unidades que se indica.

- a) 3° en segundos b) 3 300'' en minutos c) 135' en grados d) 27,5° en minutos

Pasos a seguir

1. Contamos los *saltos* que hay desde la unidad en la que viene expresada la medida hasta la unidad en la que hay que expresarla.



2. Analizamos el sentido del *salto*, si es hacia la derecha o hacia la izquierda.

3. Multiplicamos por 60 tantas veces como saltos hay hacia la derecha, o dividimos entre 60 tantas veces como saltos hacia la izquierda hay.

- a) De grados a segundos → 2 saltos
 b) De segundos a minutos → 1 salto
 c) De minutos a grados → 1 salto
 d) De grados a minutos → 1 salto

- a) 2 saltos hacia la derecha
 b) 1 salto hacia la izquierda
 c) 1 salto hacia la izquierda
 d) 1 salto hacia la derecha

- a) $3 \cdot 60 \cdot 60 = 10800''$
 b) $3300 : 60 = 55'$
 c) $135 : 60 = 2,25^\circ$
 d) $27,5 \cdot 60 = 1650'$

El procedimiento para transformar medidas de tiempo es el mismo, ya que sus unidades también pertenecen al sistema sexagesimal.



ACTIVIDADES

35 Expresa en minutos.

- a) 10° c) 90° e) 105''
 b) 52° d) 75'' f) 164°

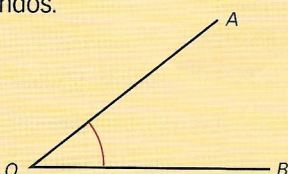
36 Expresa en segundos.

- a) 24° c) 56' e) 65'
 b) 34' d) 82° f) 186°

37 Expresa en grados.

- a) 1440' d) 3240'' e) 5040'
 b) 14400'' c) 4500' f) 82800''

38 Mide este ángulo y expresa su medida en minutos y en segundos.



39 Expresa en minutos cada una de estas medidas de tiempo.

- a) 4 h c) 48 s e) 5,5 h
 b) 23 h d) 78,25 h f) 120 s

40 Expresa en segundos cada una de estas medidas de tiempo.

- a) 45 min c) 12 h e) 4,5 min
 b) 6 h d) 40 min f) 3,25 h

41 Andrés ha cronometrado el tiempo que ha estado paseando a su perro. En total ha estado 1 h y 22 minutos. ¿Cuántos minutos en total ha durado el paseo?

42 El récord en el tiempo mínimo para superar unas pruebas de un videojuego está en 2 minutos y 36 segundos. ¿Cuántos segundos hay que hacer para superar el récord?

Sumar en el sistema sexagesimal

Realiza estas sumas en el sistema sexagesimal.

a) $9^\circ 45' 23'' + 20' 41''$

b) $25^\circ 22' 14'' + 3^\circ 53' 28''$

Pasos a seguir

1. Colocamos los sumandos agrupados por unidades y realizamos la suma.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 9^\circ 45' 23'' \\ + 20' 41'' \\ \hline 9^\circ 65' 64'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 25^\circ 22' 14'' \\ + 3^\circ 53' 28'' \\ \hline 28^\circ 75' 42'' \end{array}$$

2. Si en el resultado de la suma los segundos sobrepasan 60, los transformamos en minutos.

Al pasar a minutos, solo hacemos la división entera; el cociente serán los minutos y el resto serán segundos.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 64 \overline{) 60} \\ 4 \quad 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{1' 4''} \end{array}$$

$$9^\circ 65' 64'' = 9^\circ 66' 4''$$

$\boxed{64'' = 1' 4''}$

b) $28^\circ 75' 42''$ No hacemos nada, los segundos no son más de 60.

3. Si en el resultado los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados.

Al pasar a grados, solo hacemos la división entera; el cociente serán los grados y el resto serán minutos.

Tras estos cambios, obtenemos el resultado definitivo de la suma.

$$\text{a) } 9^\circ 66' 4'' = 10^\circ 6' 4''$$

$$\boxed{66' = 1^\circ 6'}$$

$$\text{b) } 28^\circ 75' 42'' = 29^\circ 15' 42''$$

$$\boxed{75' = 1^\circ 15'}$$

Como el tiempo también pertenece al sistema sexagesimal, sumar dos medidas de tiempo sigue el mismo procedimiento.

$$4 \text{ h } 3 \text{ min } 52 \text{ s} + 1 \text{ h } 12 \text{ min } 40 \text{ s} = 5 \text{ h } 15 \text{ min } 92 \text{ s} = 5 \text{ h } 16 \text{ min } 32 \text{ s}$$

ACTIVIDADES

43 Realiza estas sumas en tu cuaderno.

a) $24^\circ 16' 31'' + 17^\circ 29' 42''$

d) $125^\circ 26' 18'' + 15^\circ 47' 53''$

b) $38^\circ 54' 3'' + 12^\circ 26' 14''$

e) $72^\circ 35' 32'' + 58^\circ 24' 58''$

c) $43^\circ 5' 52'' + 8^\circ 4' 48''$

f) $67^\circ 25' 19'' + 78^\circ 40' 38''$

44 Efectúa estas sumas de ángulos.

a) $35^\circ 44'' + 28' 39''$

b) $74^\circ 12' + 14^\circ 32''$

c) $57' 36'' + 9^\circ 15'$

d) $18^\circ 4'' + 46^\circ 52' 37''$

45 Dados los ángulos $\hat{A} = 28^\circ 3'$ y $\hat{B} = 19^\circ 26''$, calcula $\hat{A} + \hat{B}$.

46 Dados los ángulos $\hat{A} = 11^\circ 22''$, $\hat{B} = 6^\circ 52''$ y $\hat{C} = 37^\circ 32'$, calcula $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$.

47 El autobús de línea que va desde Villarta hasta San Juan hace paradas en San Pedro y San Jacinto. En el trayecto de esta mañana ha tardado:



- Desde Villarta hasta San Pedro: 46 min.
 - Desde San Pedro a San Jacinto: 73 min.
 - Desde San Jacinto hasta San Juan: 1 h y 26 min.
- ¿Cuánto ha durado el trayecto en total?

48 El avión que salía a las 18:05 h ha despegado con 22 minutos de retraso. ¿A qué hora ha salido?

 SABER HACER

 Restar en el sistema sexagesimal

Realiza estas restas en el sistema sexagesimal.

a) $9^\circ 45' 23'' - 20' 41''$

b) $25^\circ 22' 14'' - 3^\circ 53' 28''$

Pasos a seguir

1. Colocamos los términos de la resta agrupados por unidades.

$$\begin{array}{r} a) \quad 9^\circ 45' 23'' \\ - \quad 20' 41'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 25^\circ 22' 14'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline \end{array}$$

2. Si el número de segundos del sustraendo es mayor que el del minuendo, transformamos un minuto del minuendo en segundos.

$$\begin{array}{r} a) \quad 9^\circ 45' 23'' \\ - \quad 20' 41'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 41'' > 23'' \\ 45' = 44' 60'' \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 9^\circ 44' 83'' \\ - \quad 20' 41'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 25^\circ 22' 14'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 28'' > 14'' \\ 22' = 21' 60'' \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 25^\circ 21' 74'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline \end{array}$$

3. Si el número de minutos del sustraendo es mayor que el del minuendo, transformamos un grado del minuendo en minutos.

$$\begin{array}{r} a) \quad 9^\circ 44' 83'' \\ - \quad 20' 41'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 25^\circ 21' 74'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 53' > 21' \\ 25^\circ = 24^\circ 60' \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{r} 24^\circ 81' 74'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline \end{array}$$

4. Restamos unidad a unidad.

$$\begin{array}{r} a) \quad 9^\circ 44' 83'' \\ - \quad 20' 41'' \\ \hline 9^\circ 24' 42'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 24^\circ 81' 74'' \\ - \quad 3^\circ 53' 28'' \\ \hline 21^\circ 28' 46'' \end{array}$$

El procedimiento para restar medidas de tiempo es igual, ya que ambos utilizan como medida un sistema sexagesimal.

ACTIVIDADES

49 Realiza en tu cuaderno las siguientes restas de mediciones de ángulos.

$$\begin{array}{r} a) \quad 24^\circ 16' 31'' \\ - 17^\circ 29' 42'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} e) \quad 38^\circ 54' 3'' \\ - 12^\circ 26' 14'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 43^\circ 5' 52'' \\ - 8^\circ 4' 48'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} f) \quad 125^\circ 26' 18'' \\ - 15^\circ 47' 53'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} c) \quad 72^\circ 35' 32'' \\ - 58^\circ 24' 58'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} g) \quad 67^\circ 25' 19'' \\ - 26^\circ 40' 38'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} d) \quad 7^\circ 25' 29'' \\ - 50' 38'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} h) \quad 25^\circ 45' 21'' \\ + 3^\circ 24' 56'' \\ \hline \end{array}$$

50 Resuelve estas restas.

a) $35^\circ 44'' - 28' 39''$

b) $74^\circ 12' - 14^\circ 32''$

c) $20^\circ 57' 36'' - 9^\circ 15'$

d) $118^\circ 4'' - 6^\circ 52' 37''$

51 Dados los ángulos $\hat{A} = 28^\circ 3'$, $\hat{B} = 19' 26''$ y $\hat{C} = 40^\circ 3' 12''$, calcula:

a) $\hat{C} - (\hat{A} + \hat{B})$

b) $\hat{C} - (\hat{A} - \hat{B})$

52 Sergio ha cronometrado el tiempo que ha tardado en desplazarse hasta la casa de sus abuelos: 1 hora, 35 minutos y 50 segundos. Pensaba tardar 2 horas. ¿Cuánto tiempo le ha sobrado?