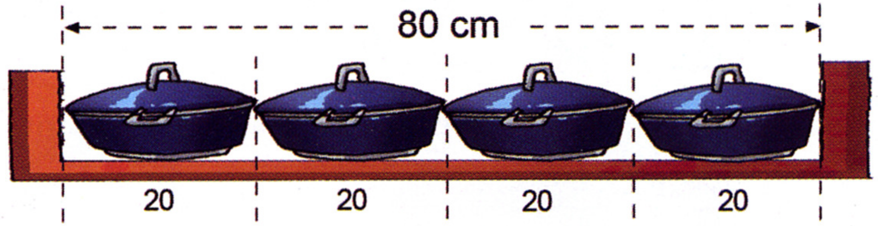
DIVISIBILIDAD

1º E.S.O.

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando uno cabe en el otro una cantidad exacta de veces, es decir, cuando su cociente es exacto.

En una estantería de 80 cm caben, exactamente cuatro cazuelas de 20 cm.

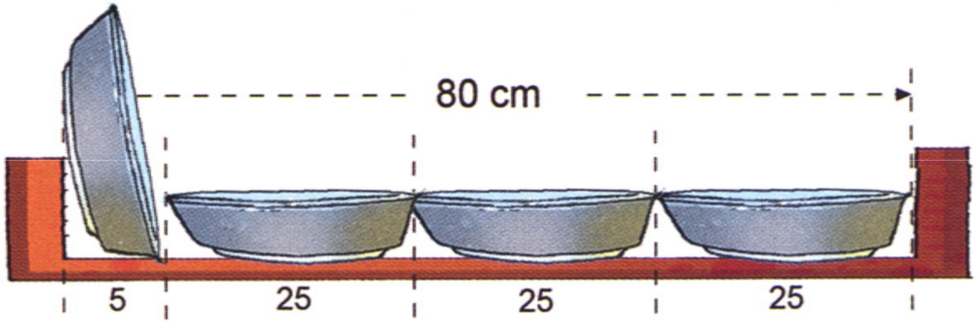


80 |20
0   4

80 es divisible entre 20.

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

En una estantería de 80 cm no encaja una cantidad exacta de fuentes de 25 cm.



80 |25
5   3

80 no es divisible entre 25.

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

Cuando dos números están emparentados por la relación de divisibilidad, decimos que:

El mayor es **múltiplo** del menor.
El menor es **divisor** del mayor.

▶ **Ejemplo**

40 |8
0   5
división exacta

→ $40 = 8 \cdot 5$ → $\begin{cases} \text{40 es múltiplo de 8.} \\ \text{8 es divisor de 40.} \end{cases}$

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD

- **a es múltiplo de b**

  o lo que es igual → **si la división $a : b$ es exacta.**

- **b es divisor de a**

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array}$$

división exacta

↓

a es divisible entre *b*

↓

a es múltiplo de *b*

↓

b es divisor de *a*

Ten en cuenta

Cada divisor de un número lleva otro emparejado.

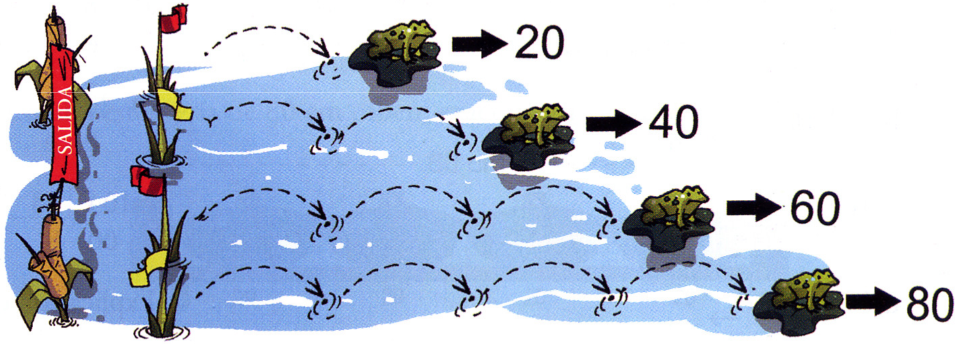
$$\begin{array}{l|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l|l} 40 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$$

8 es divisor de 40.

5 es divisor de 40.

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Los múltiplos de un número son otros números, de igual o mayor tamaño, que lo contienen una cantidad exacta de veces. Por ejemplo, observa la longitud recorrida por la rana en sucesivos saltos de 20 centímetros:



MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Los números 20, 40, 60, 80, … contienen a 20 una cantidad exacta de veces, es decir, todos ellos son múltiplos de 20.

Observa, también, que se obtienen multiplicando 20 por un número natural, y que la serie puede continuar indefinidamente.

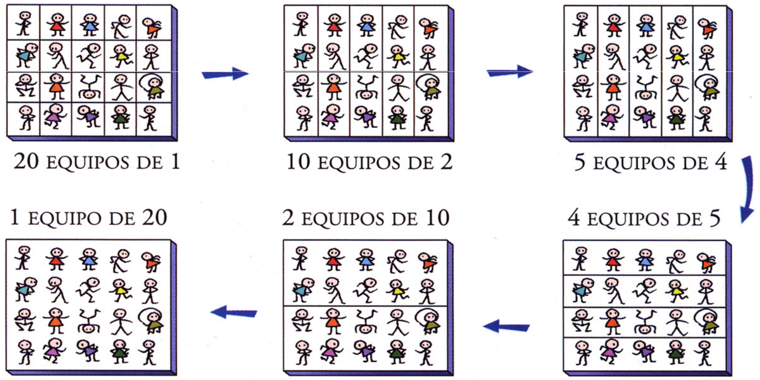
$$\begin{array}{cccc} 20 \cdot 5 & 20 \cdot 6 & 20 \cdot 7 & 20 \cdot 8\ \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 120 & 140 & 160\ \dots \end{array}$$

- Los múltiplos de un número natural, a, se obtienen al multiplicar a por cualquier otro número natural k: $a \cdot k \rightarrow$ **múltiplo de a**
- Todo número natural, a, es múltiplo de sí mismo y de la unidad. $\Big\}\ a \cdot 1 = a$
- Un número distinto de cero tiene infinitos múltiplos.

DIVISORES DE UN NÚMERO

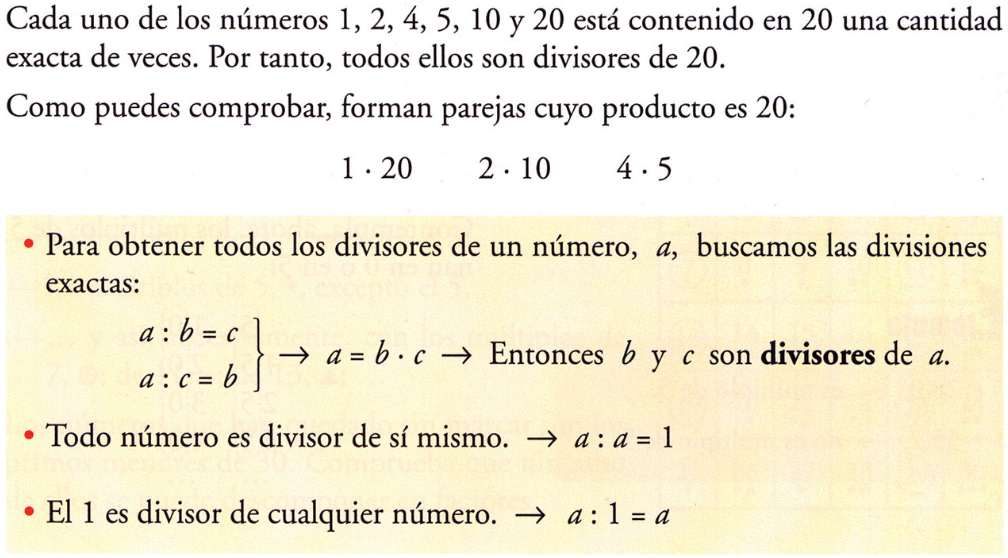
Los divisores de un número son otros números, de igual o menor tamaño, que están contenidos en él una cantidad exacta de veces.

Observa, por ejemplo, las distintas formas de dividir un grupo de 20 chicos y chicas en equipos iguales:



20 EQUIPOS DE 1 → 10 EQUIPOS DE 2 → 5 EQUIPOS DE 4 → 4 EQUIPOS DE 5 → 2 EQUIPOS DE 10 → 1 EQUIPO DE 20

DIVISORES DE UN NÚMERO



Cada uno de los números 1, 2, 4, 5, 10 y 20 está contenido en 20 una cantidad exacta de veces. Por tanto, todos ellos son divisores de 20.

Como puedes comprobar, forman parejas cuyo producto es 20:

$$1 \cdot 20 \qquad 2 \cdot 10 \qquad 4 \cdot 5$$

- Para obtener todos los divisores de un número, a, buscamos las divisiones exactas:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c \\ a : c = b \end{array}\right\} \rightarrow a = b \cdot c \rightarrow \text{Entonces } b \text{ y } c \text{ son } \textbf{divisores} \text{ de } a.$$

- Todo número es divisor de sí mismo. → $a : a = 1$
- El 1 es divisor de cualquier número. → $a : 1 = a$

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones:

a) 8 es un múltiplo de 16	NO
b) 8 es un múltiplo de 4	SI
c) 16 es un múltiplo de 8	SI
d) 16 es un divisor de 8	NO
e) 8 es un divisor de 16	SI
f) 16 es un múltiplo de 4	SI
g) 8 es un múltiplo de 16	NO

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones:

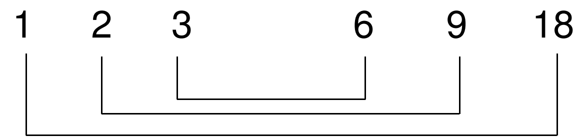
a) 3 es un múltiplo de 12	NO
b) 8 es un múltiplo de 24	NO
c) 16 es un múltiplo de 32	NO
d) 12 es un divisor de 24	SI
e) 8 es un divisor de 32	SI
f) 16 es un múltiplo de 64	NO
g) 8 es un múltiplo de 24	NO

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

1) Hallar cinco múltiplos del número 9:

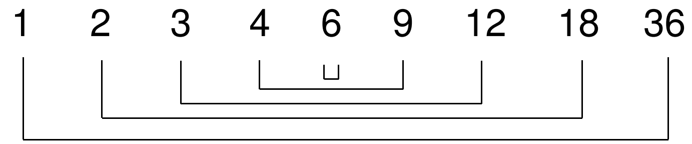
9 18 27 36 45

2) Hallar todos los divisores del número 18



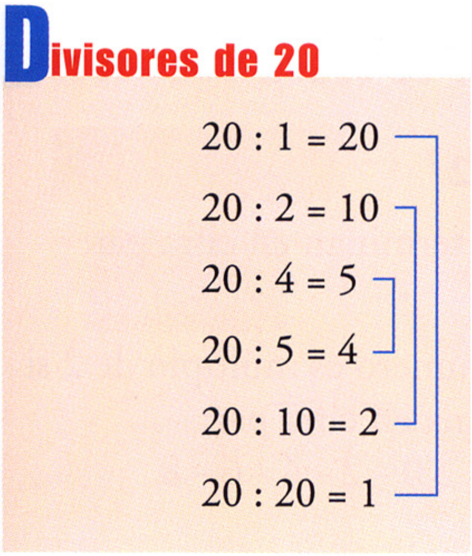
1 2 3 6 9 18

3) Hallar todos los divisores del número 36



1 2 3 4 6 9 12 18 36

DIVISORES DE UN NÚMERO



Divisores de 20

20 : 1 = 20

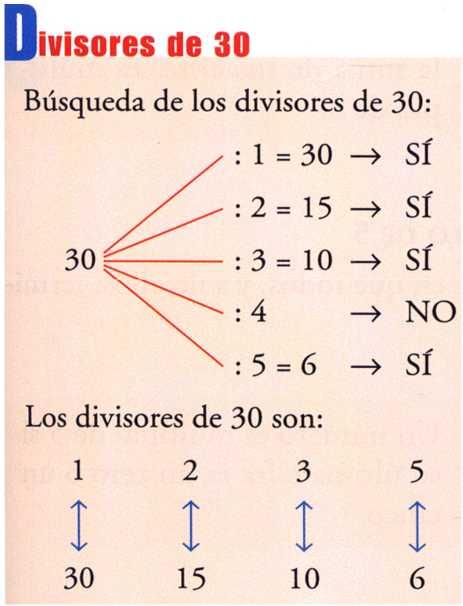
20 : 2 = 10

20 : 4 = 5

20 : 5 = 4

20 : 10 = 2

20 : 20 = 1



Divisores de 30

Búsqueda de los divisores de 30:

30
: 1 = 30 → SÍ
: 2 = 15 → SÍ
: 3 = 10 → SÍ
: 4 → NO
: 5 = 6 → SÍ

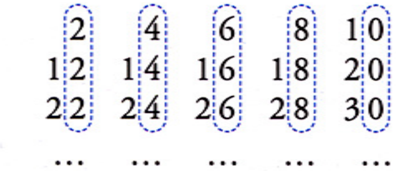
Los divisores de 30 son:

1	2	3	5
↕	↕	↕	↕
30	15	10	6

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 2

Un número es **divisible por 2** si termina en cifra par.



Un número es múltiplo de 2 si termina en cifra par:
0 - 2 - 4 - 6 - 8

- 37⑧ → cifra par
  378 es múltiplo de 2.
- 45① → cifra impar
  451 no es múltiplo de 2.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 3

Un número es **divisible por 3** si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo 10 Juan tiene que adivinar un número que le ha propuesto su hermana Gloria. Para ello cuenta con las siguientes pistas:

– Es un número comprendido entre 20 y 25.

– Es divisible por 3, pero no por 2.

Juan piensa que para que sea divisible por 3 tiene que ser 21 ó 24, ya que la suma de sus cifras es múltiplo de 3; pero como no puede ser divisible por 2, el número es 21.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 5 y por 10

Un número es **divisible por 5** si termina en 0 o en 5.

Un número es **divisible por 10** si termina en 0.

Ejemplo 11 1385 es divisible por 5.

1440 es divisible por 3, por 5 y por 10.

Divisibilidad por 9

Un número es **divisible por 9** si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Ejemplo 13 162 es divisible por 9, ya que $1+6+2=9$, que es múltiplo de 9.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 4, por 25 y por 100

Un número es **divisible por 4** si lo es el número formado por sus dos últimas cifras o si termina en 00.

Un número es **divisible por 25** si lo es el número formado por sus dos últimas cifras o si termina en 00.

Un número es **divisible por 100** si termina en 00.

Ejemplo 12 a) 4028 es divisible por 4, ya que 28 es divisible por 4.

b) 1275 es divisible por 25, ya que 75 es divisible por 25.

c) 3400 es divisible por 4, 25 y 100, ya que termina en 00.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 11

Para saber si un número es **divisible por 11**:

1.º Sumamos por separado las cifras que ocupan los lugares pares y las que ocupan los lugares impares.

2.º Calculamos la diferencia entre las dos sumas anteriores.

3.º Si esa diferencia es 0 o múltiplo de 11, el número inicial es divisible por 11.

Ejemplo 14 Comprobamos que el número 80 729 es divisible por 11.

- Suma de las cifras de lugar par: $0+2=2$.
- Suma de las cifras de lugar impar: $8+7+9=24$.
- Diferencia de las sumas: $24-2=22$, que es múltiplo de 11.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Aplica los criterios de divisibilidad y averigua si el número 53 475 es divisible por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 10, por 25 o por 100.

Solución:

- No es divisible por 2, ya que no acaba en cifra par.
- Es divisible por 3, ya que $5+3+4+7+5=24$, que es múltiplo de 3.
- No es divisible por 4, ya que 75 no es múltiplo de 4.
- Es divisible por 5, ya que termina en 5.
- No es divisible por 6, ya que no lo es por 2.
- No es divisible por 10, ya que no termina en 0.
- Es divisible por 25, ya que termina en 75, que es múltiplo de 25.
- No es divisible por 100, ya que no termina en 00.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Los divisores de un número permiten expresarlo en forma de producto.

Ejemplo

$$18 \rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{DIVISORES}\\ 1 - 2 - 3 - 6 - 9 - 18\end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 18 = 2 \cdot 9 \\ 18 = 3 \cdot 6 \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \end{cases}$$

Sin embargo, hay números que solo tienen dos divisores (el mismo número y la unidad), lo cual impide su descomposición.

Ejemplo

$$13 \rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{DIVISORES}\\ 1 - 13\end{array}\right) \rightarrow 13 = 13 \cdot 1$$

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Un **número** es **primo** cuando tiene solo dos divisores: el propio número y el 1.

Un **número** es **compuesto** cuando tiene más de dos divisores.

Ejemplo 15 a) El número 17 sólo puede expresarse de una manera como producto de dos factores:

17=1·17⇒Tiene solo dos divisores y, por tanto, 17 es primo.

b) El número 18 se puede expresar de varias maneras como producto de dos números:

$$18=1\cdot 18 \qquad 18=2\cdot 9 \qquad 18=3\cdot 6$$

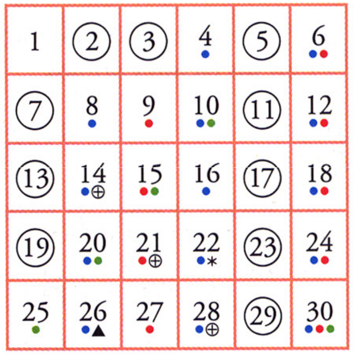
Los divisores de 18 son 1, 2, 3, 6, 9 y 18. Por tanto, 18 es un número compuesto.

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

En la tabla se han marcado:

- — los múltiplos de 2, 🔵, excepto el 2.
- — los múltiplos de 3, 🔴, excepto el 3.
- — los múltiplos de 5, 🟢, excepto el 5.
- — … y así, sucesivamente, con los múltiplos de 7, ⊕; de 11, ∗; de 13, ▲; …

Los números que han quedado sin marcar son los primos menores de 30. Comprueba que ninguno de ellos se puede descomponer en factores.



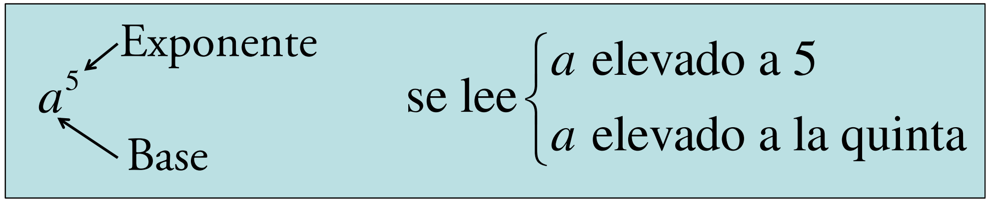
1	②	③	4 🔵	⑤	6 🔵🔴
⑦	8 🔵	9 🔴	10 🔵🟢	⑪	12 🔵🔴
⑬	14 🔵⊕	15 🔴🟢	16 🔵	⑰	18 🔵🔴
⑲	20 🔵🟢	21 🔴⊕	22 🔵∗	㉓	24 🔵🔴
25 🟢	26 🔵▲	27 🔴	28 🔵⊕	㉙	30 🔵🔴🟢

Potencias

Una potencia es una forma abreviada de escribir un producto de factores iguales:

$$\boxed{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5}$$

En las potencias, el factor repetido se llama base, y el número de veces que se repite, exponente.



a^5 Exponente Base

se lee $\begin{cases} a \text{ elevado a } 5 \\ a \text{ elevado a la quinta} \end{cases}$

Potencias

Expresar en forma de potencia:

$$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^4$$

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^5$$

Calcular:

$$5^3=5\cdot 5\cdot 5=125$$

$$10^4=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10000$$

FACTORIZAR

Factorizar el número 64 en factores primos:

Factores primos.

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$$\boxed{64 = 2^6}$$

FACTORIZAR

Factorizar el número 56 en factores primos:

Factores primos.

56	2
28	2
14	2
7	7
1	

$$\boxed{56 = 2^3 \cdot 7}$$

FACTORIZAR

Factorizar el número 792 en factores primos:

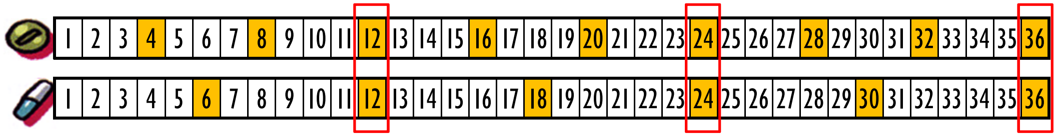
Factores primos.

792	2
396	2
198	2
99	3
33	3
11	11
1	

$$\boxed{792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11}$$

Mínimo común múltiplo de dos números

Doña Rosita toma una píldora cada 4 días y una cápsula cada 6 días. ¿Cada cuánto tiempo coinciden las dos tomas?

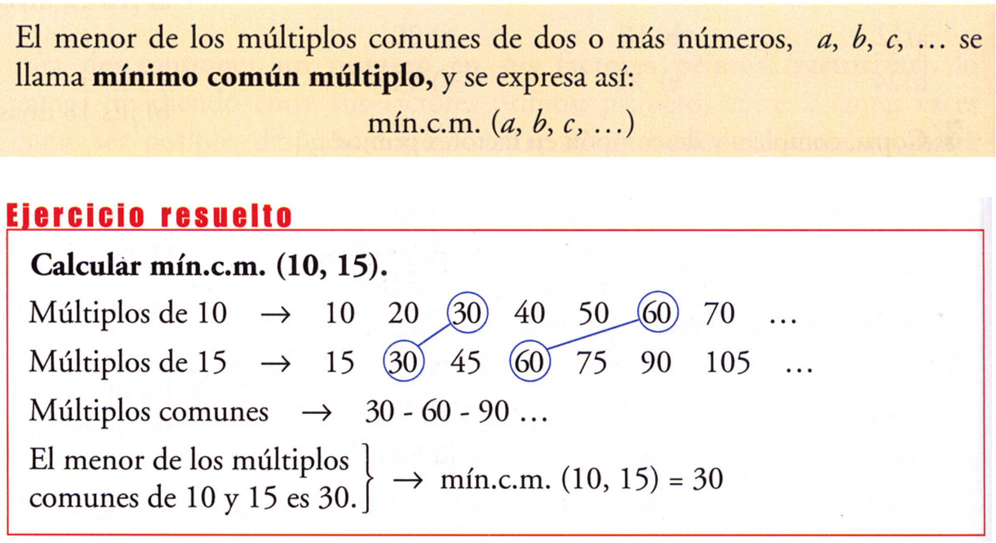


1	2	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	**12**	13	14	15	**16**	17	18	19	**20**	21	22	23	**24**	25	26	27	**28**	29	30	31	**32**	33	34	35	**36**
1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10	11	**12**	13	14	15	16	17	**18**	19	20	21	22	23	**24**	25	26	27	28	29	**30**	31	32	33	34	35	**36**

Ambas coinciden en los días que son múltiplos de 4 y 6, y se repiten cada 12 días. El menor de esos múltiplos comunes es 12 y recibe el nombre de:

mínimo común múltiplo de 4 y 6.

Mínimo común múltiplo de dos números



El menor de los múltiplos comunes de dos o más números, *a*, *b*, *c*, … se llama **mínimo común múltiplo,** y se expresa así:

mín.c.m. (*a*, *b*, *c*, …)

Ejercicio resuelto

Calcular mín.c.m. (10, 15).

Múltiplos de 10 → 10 20 30 40 50 60 70 …

Múltiplos de 15 → 15 30 45 60 75 90 105 …

Múltiplos comunes → 30 - 60 - 90 …

El menor de los múltiplos comunes de 10 y 15 es 30. } → mín.c.m. (10, 15) = 30

Mínimo común múltiplo de dos números

Hallar el m.c.m.(4 , 6) por el **método óptimo.**

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{4 = 2^2} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{6 = 2 \cdot 3}$$

Paso 2: Elegir los factores comunes y no comunes.

Comunes: **2** No comunes: **3**

Paso 3: Elevarlos al mayor exponente que aparezca.

Comunes: $\mathbf{2^2}$ No comunes: **3**

Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.m.}(4\ ,\ 6) = 2^2 \cdot 3 = 12}$$

Mínimo común múltiplo de dos números

Hallar el m.c.m.(20 , 30) por el **método óptimo.**

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{20 = 2^2 \cdot 5} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Paso 2: Elegir los factores comunes y no comunes.

Comunes: **2** y **5** No comunes: **3**

Paso 3: Elevarlos al mayor exponente que aparezca.

Comunes: $\mathbf{2^2}$ y **5** No comunes: **3**

Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.m.}(20\ ,\ 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60}$$

Mínimo común múltiplo de dos números

Hallar el m.c.m.(75 , 90) por el **método óptimo.**

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{75 = 3 \cdot 5^2} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

Paso 2: Elegir los factores comunes y no comunes.

Comunes: **3** y **5** No comunes: **2**

Paso 3: Elevarlos al mayor exponente que aparezca.

Comunes: $\mathbf{3^2}$ y $\mathbf{5^2}$ No comunes: **2**

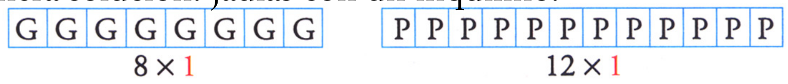
Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.m.}(75\ ,\ 90) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 450}$$

Máximo común divisor de dos números

Se han de transportar 8 gatos y 12 perros en jaulas iguales, lo más grandes que sea posible, y que en todas quepa el mismo número de animales. ¿Cuántos animales irán en cada jaula?

Primera solución: jaulas con un inquilino.



Segunda solución: jaulas con dos inquilinos.

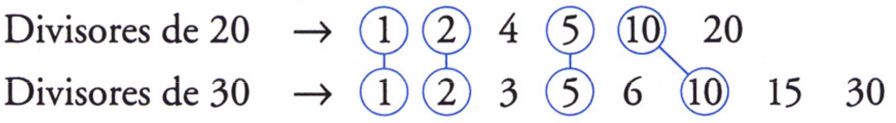
Tercera solución: jaulas con cuatro inquilinos.

Las soluciones coinciden con los divisores comunes de 8 y 12.
1 – 2 – 4. El mayor es 4 y es **Máximo común divisor de 8 y 12.**

Máximo común divisor de dos números

Método artesanal

Calcular máx.c.d. (20, 30).



Divisores de 20 → 1 2 4 5 10 20

Divisores de 30 → 1 2 3 5 6 10 15 30

Divisores comunes → 1 - 2 - 5 - 10

El mayor de los divisores comunes de 20 y 30 es 10. } → máx.c.d. (20, 30) = 10

Máximo común divisor de dos números

Hallar el m.c.d.(4 , 6) por el **método óptimo**.

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{4 = 2^2} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{6 = 2 \cdot 3}$$

Paso 2: Elegir los factores comunes. Comunes: **2**

Paso 3: Elevarlos al menor exponente que aparezca.

Comunes: **2**

Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.d.}(4\ ,\ 6) = 2}$$

Máximo común divisor de dos números

Hallar el m.c.d.(40 , 60) por el ~~método óptimo~~.

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{40 = 2^3 \cdot 5} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \mathbf{60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5}$$

Paso 2: Elegir los factores comunes.

Comunes: **2** y **5**

Paso 3: Elevarlos al menor exponente que aparezca.

Comunes: $\mathbf{2^2}$ y **5**

Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.d.}(40\ ,\ 60) = 2^2 \cdot 5 = 20}$$

Máximo común divisor de dos números

Hallar el m.c.d.(150 , 225) por el **método óptimo**.

Paso 1: Descomponer en factores primos los dos números.

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

Paso 2: Elegir los factores comunes.

Comunes: **3** y **5**

Paso 3: Elevarlos al menor exponente que aparezca.

Comunes: **3** y **5^2**

Paso 4: Multiplicar los factores:

$$\boxed{\text{m.c.d.}(150 , 225) = 3 \cdot 5^2 = 75}$$

Problemas

Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?

$6 = 2 \cdot 3$

$8 = 2^3$

$\text{m.c.m.}(6 , 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$

Solución: Pasarán 24 días

Problemas

Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?

m.c.m.

40cm 80cm 120cm 160cm 200cm 240cm

30cm 60cm 90cm 120cm 150cm 180cm 210cm 240cm

Solución: La altura es de 240 cm.

Problemas

El dueño de un restaurante compra un bidón de 80 litros de aceite de oliva y otro de 60 litros de aceite de girasol, y desea envasarlos en garrafas iguales, lo más grandes que sea posible, y sin mezclar. ¿Cuál será la capacidad de las garrafas?

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$80 = 2^4 \cdot 5$

$\text{m.c.d. } (60, 80) = 2^2 \cdot 5 = 20$

Solución: Las garrafas serán de 20 litros.

Problemas

Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.d. $(180, 240) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Solución: Los listones se deben cortar en trozos de 60 cm.