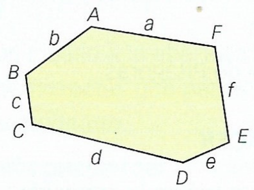
1 Polígonos

Un **polígono** es una figura plana y cerrada limitada por segmentos.

SE ESCRIBE ASÍ

Para nombrar un polígono:



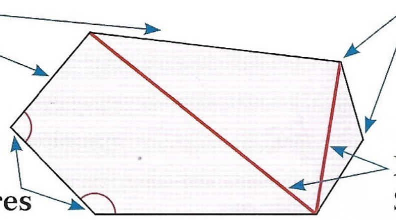
- Designamos sus vértices con letras mayúsculas: A, B, C...
- Los lados se nombran con las mismas letras en minúscula: a, b, c...
- Sus ángulos interiores toman el nombre de la letra que designa el vértice correspondiente al que se le añade el símbolo ^: $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$...

Para nombrar el polígono se utiliza la secuencia de letras que designan los vértices: *ABCDEF*.

1.1. Elementos de un polígono

Lados
Segmentos que delimitan el polígono.

Vértices
Puntos donde se unen dos lados.

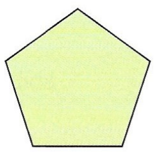


Ángulos interiores
Ángulos formados por los lados del polígono.

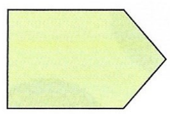
Diagonales
Segmentos que unen dos vértices no consecutivos.

Un **polígono** es **regular** si todos sus lados y ángulos son iguales. Si tiene algún lado o ángulo distinto, el **polígono** es **irregular**.

Polígono regular



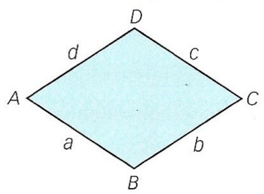
Polígono irregular



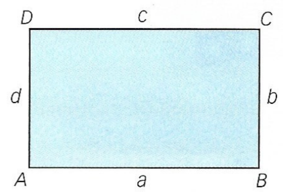
EJEMPLO

1. Observa los polígonos y di si son regulares.

a)



b)



a) No es un polígono regular; todos sus lados son iguales pero los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son distintos de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{D}$.

b) No es un polígono regular; todos sus ángulos son iguales pero los lados a y c son distintos de los lados b y d.

ACTIVIDADES

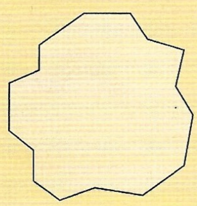
1 PRACTICA. Dibuja un polígono irregular de 5 lados y señala todos sus elementos.

2 APLICA. Razona si es verdadero o falso.

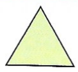
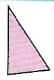
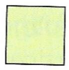
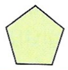
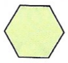
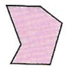
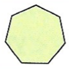
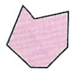
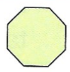
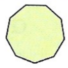
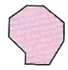
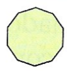
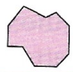
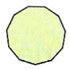
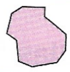
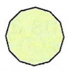
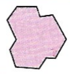
a) El número de lados es igual al de vértices más uno.

b) En un polígono irregular ningún lado es igual a otro.

3 REFLEXIONA. Dibuja varios polígonos, con 5, 6, 7... lados. Traza sus diagonales y cuéntalas. ¿Puedes deducir cuántas diagonales tendrá un polígono de 16 lados?



1.2. Clasificación de polígonos según su número de lados

N.° de lados	Nombre	Regular	Irregular
3	Triángulo		
4	Cuadrilátero		
5	Pentágono		
6	Hexágono		
7	Heptágono		
8	Octógono		
9	Eneágono		
10	Decágono		
11	Endecágono		
12	Dodecágono		

RESUELVE EL RETO

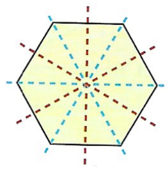
Si junto dos triángulos iguales por uno de sus lados. ¿Cuántos lados puede tener la figura resultante?

1.3. Ejes de simetría

Un **eje de simetría de un polígono** es la recta que divide al polígono en dos partes iguales.

EJEMPLO

2. Determina los ejes de simetría de un hexágono regular.



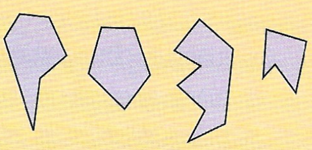
Las diagonales que unen vértices opuestos son ejes de simetría.

Las rectas que unen los puntos medios de lados opuestos son ejes de simetría.

Un hexágono regular tiene 6 ejes de simetría.

ACTIVIDADES

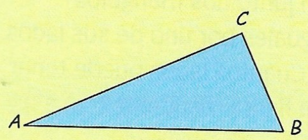
4 **PRACTICA.** Clasifica los polígonos que ves a la derecha según su número de lados.



5 **APLICA.** Dibuja un polígono que tenga tres ejes de simetría.

6 **REFLEXIONA.** ¿Cuántos ejes de simetría tiene un heptágono? ¿Y un eneágono?

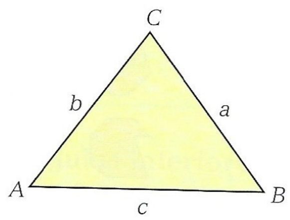
2 Triángulos



Para nombrar un triángulo utilizamos sus tres vértices, *ABC*, y el símbolo $\frown$: $\widehat{ABC}$.

Un **triángulo** es un polígono de tres lados, que tiene también tres ángulos y tres vértices.

2.1. Elementos de un triángulo

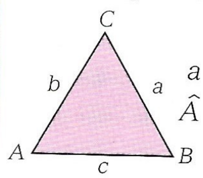


- **Vértices.** Son los puntos donde se juntan dos lados. Se suelen designar con letras mayúsculas: *A*, *B*, *C*.
- **Lados.** Son los tres segmentos que delimitan el triángulo. Se designan con las mismas letras que los vértices, en minúsculas: *a*, *b*, *c*, de manera que el lado opuesto del vértice *A* es el lado *a*...
- **Ángulos.** Son los formados por cada 2 lados. Se nombran con la misma letra que el vértice con el símbolo ^ encima: $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

2.2. Clasificación de triángulos

Según sean sus lados y sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

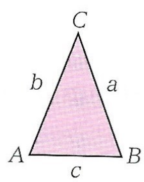
Equilátero: los tres lados y los tres ángulos son iguales.



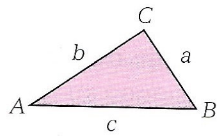
$a = b = c$
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

Isósceles: tiene dos lados y dos ángulos iguales.

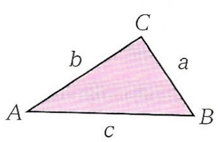
$a = b$
$\hat{A} = \hat{B}$



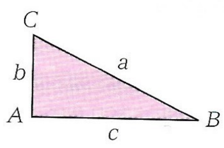
Escaleno: tiene los tres lados y los tres ángulos desiguales.



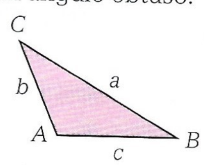
Acutángulo: tiene los tres ángulos agudos.



Rectángulo: tiene un ángulo recto.

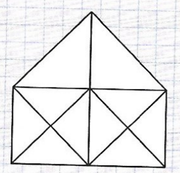


Obtusángulo: tiene un ángulo obtuso.



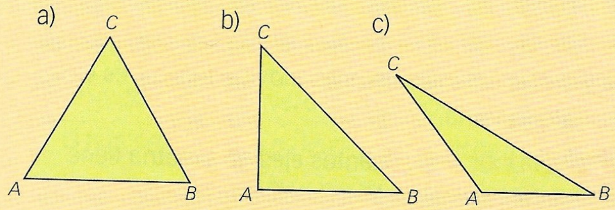
RESUELVE EL RETO

¿Cuántos triángulos hay en esta figura?



ACTIVIDADES

7 PRACTICA. Clasifica estos triángulos según sus vértices y según sus lados.



8 APLICA. Dibuja un triángulo escaleno que sea también rectángulo.

9 REFLEXIONA. Averigua si existen estos triángulos.

a) Triángulo rectángulo isósceles.
b) Triángulo obtusángulo rectángulo.
c) Triángulo escaleno acutángulo.
d) Triángulo isósceles escaleno.

3 Relaciones entre los elementos de un triángulo

3.1. Relaciones entre los lados de un triángulo

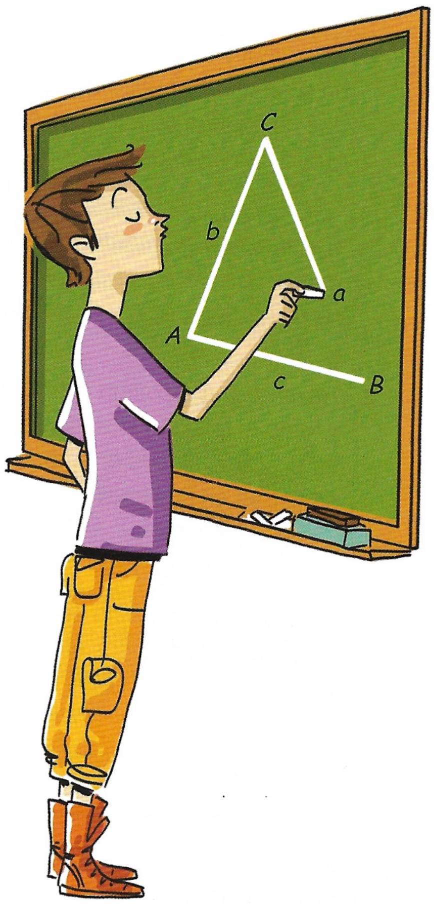
Dado un triángulo ABC, siempre se cumple que:

- Cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.

  $a < b + c$ $\quad$ $b < a + c$ $\quad$ $c < a + b$

- Cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos.

  $a > b - c$ $\quad$ $b > a - c$ $\quad$ $c > a - b$



EJEMPLO

3. Comprueba si con estos segmentos se puede dibujar un triángulo.

a) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm

$2 < 3 + 4$ $\quad$ $3 < 2 + 4$ $\quad$ $4 < 2 + 3$

Estos tres segmentos pueden formar los lados de un triángulo.

b) $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, $c = 3$ cm

$1 < 2 + 3$ $\quad$ $2 < 1 + 3$ $\quad$ 3 no es menor que $2 + 1$

Con estos tres segmentos no se puede formar un triángulo.

3.2. Relaciones entre los ángulos de un triángulo

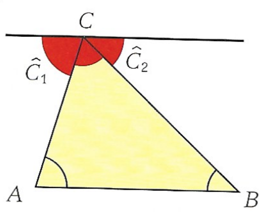
La suma de los tres ángulos de un triángulo es 180°.

Si trazamos una recta paralela al lado c que pase por su vértice opuesto, C, se forman tres ángulos $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ y $\hat{C}$ que cumplen:

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C} = 180°$$

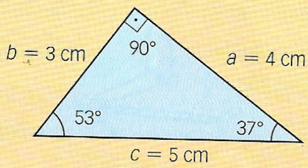
Como $\hat{A} = \hat{C}_1$ por ser alternos internos, y $\hat{B} = \hat{C}_2$ por la misma razón, tenemos que para cualquier triángulo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$



ACTIVIDADES

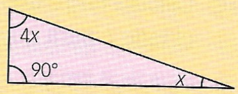
10 **PRACTICA.** Comprueba las relaciones entre los lados y los ángulos de este triángulo.



11 **APLICA.** ¿Existen triángulos con estas medidas?

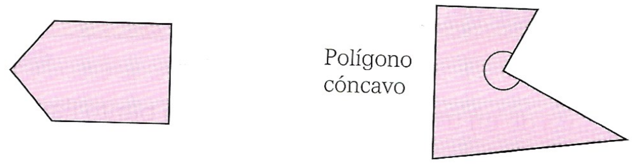
a) 3, 3 y 4 cm $\quad$ b) 3, 5 y 9 cm $\quad$ c) 2, 4 y 6 cm

12 **REFLEXIONA.** En un triángulo rectángulo uno de los ángulos es el cuádruple de otro. Calcula los ángulos de este triángulo.



4 Ángulos en los polígonos

Un polígono que tiene todos sus ángulos menores de 180° se denomina **polígono convexo**. Si alguno de sus ángulos es mayor de 180°, se llama **polígono cóncavo**.

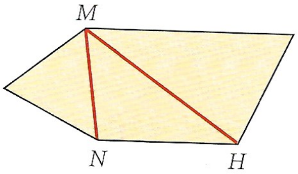


Cuando hablamos de ángulos en los polígonos, nos referimos a los ángulos interiores que forman sus lados consecutivos.

Suma de los ángulos de un polígono

La **triangulación** de un polígono consiste en dividirlo en triángulos utilizando para ello sus diagonales.

Para triangular un polígono trazamos todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.



Todo polígono convexo de n lados se puede dividir en $n - 2$ triángulos.

La suma de los ángulos de un polígono será igual a la suma de los ángulos de todos los triángulos en los que se puede triangular.

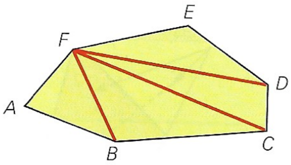
La suma de los ángulos de un polígono de n lados es $180° \cdot (n - 2)$.

EJEMPLO

4. Triangula y halla la suma de los ángulos de este polígono.

Triangulando el polígono obtenemos $6 - 2 = 4$ triángulos.

La suma de los ángulos del polígono será igual a la suma de los ángulos de los triángulos que se han formado.



$180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot 4 = 720°$

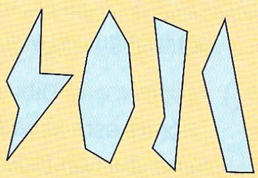
La suma de los ángulos de este polígono es 720°.

RESUELVE EL RETO

Camino durante 1 minuto en línea recta y luego cambio de dirección. Si hago esto durante 6 minutos y vuelvo al punto de partida sin pasar dos veces por el mismo sitio, ¿cuánto suman todos los giros que he dado?

ACTIVIDADES

18 **PRACTICA.** Copia en tu cuaderno y colorea de rojo los ángulos de estos polígonos y redondea los convexos.



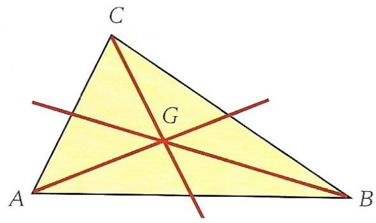
19 **APLICA.** Traza las diagonales de un octógono y halla la suma de sus ángulos.

20 **REFLEXIONA.** ¿Cuánto suman los ángulos de un polígono que tiene 8 diagonales?

5 Rectas y puntos notables en el triángulo

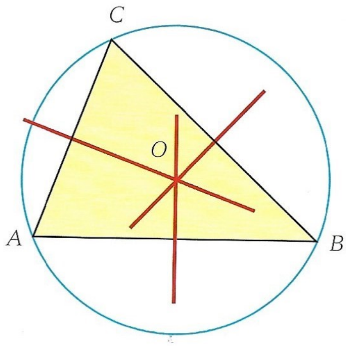
5.1. Medianas

Las **medianas** de un triángulo son las rectas que se obtienen al unir cada uno de los vértices con el punto medio del lado opuesto.



Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado **baricentro**.

5.2. Mediatrices



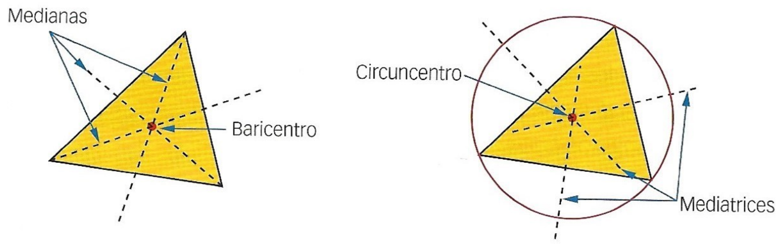
Las **mediatrices** de un triángulo son las rectas perpendiculares a sus lados que pasan por su punto medio.

Las mediatrices se cortan en un punto situado a la misma distancia de los tres vértices del triángulo que se llama **circuncentro**.

Con centro en el circuncentro y radio la distancia a cualquiera de los vértices, podemos trazar una circunferencia que pasa por los tres vértices; se llama **circunferencia circunscrita**.

EJEMPLO

5. Determina el baricentro y el circuncentro de un mismo triángulo.



ACTIVIDADES

21 **PRACTICA.** Dibuja un triángulo cuyos lados midan 6, 8 y 11 cm, respectivamente. Traza en él las medianas y las mediatrices.

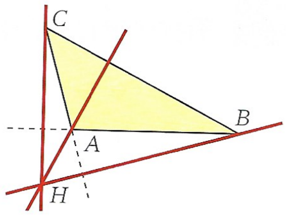
22 **APLICA.** Dibuja un triángulo obtusángulo y determina su baricentro y su circuncentro.

23 **APLICA.** Dibuja la circunferencia circunscrita del triángulo cuyos lados miden 5, 7 y 9,5 cm.

24 **REFLEXIONA.** Dibuja un triángulo rectángulo. ¿Dónde está situado su circuncentro? ¿Ocurre lo mismo con todos los triángulos rectángulos?

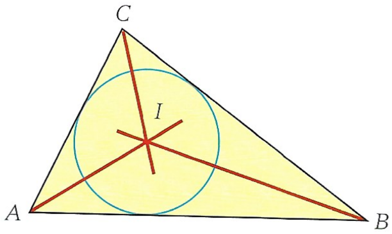
5.3. Alturas

Las **alturas** de un triángulo son las rectas perpendiculares a sus lados, o su prolongación, trazadas desde el vértice opuesto.



Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **ortocentro**.

5.4. Bisectrices



Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que dividen cada uno de sus ángulos en dos partes iguales.

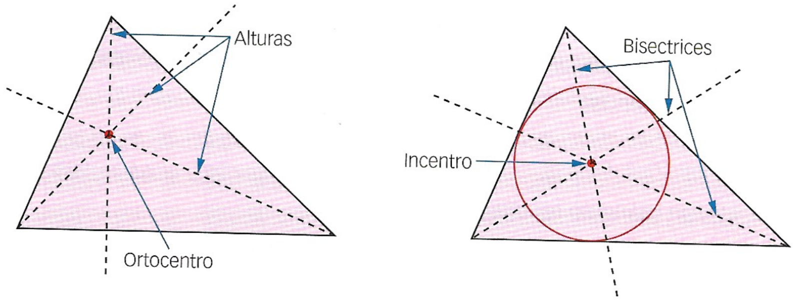
Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **incentro**.

Con centro en este punto y radio la distancia a cualquiera de los lados, podemos trazar una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, que se llama **circunferencia inscrita**.

El incentro siempre es un punto interior del triángulo.
El ortocentro puede ser un punto exterior.

EJEMPLO

6. Determina el ortocentro y el incentro de un mismo triángulo.



RESUELVE EL RETO

Al dibujar uno de los puntos notables de un triángulo ha coincidido con uno de sus vértices. ¿Qué punto he dibujado y cómo es el triángulo?

ACTIVIDADES

25 **PRACTICA.** Dibuja un triángulo acutángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.

26 **PRACTICA.** Dibuja un triángulo obtusángulo y traza sus alturas y sus bisectrices.

27 **APLICA.** Para los siguientes triángulos, encuentra el ortocentro y el incentro.

a) $a = 5{,}6$ cm; $b = 6{,}4$ cm; $c = 9$ cm

b) $a = b = c = 8$ cm

28 **REFLEXIONA.** Comprueba que en un triángulo equilátero coinciden sus medianas, su mediatrices, sus alturas y sus bisectrices.

29 **REFLEXIONA.** Razona qué características tiene un triángulo cuyo ortocentro está:

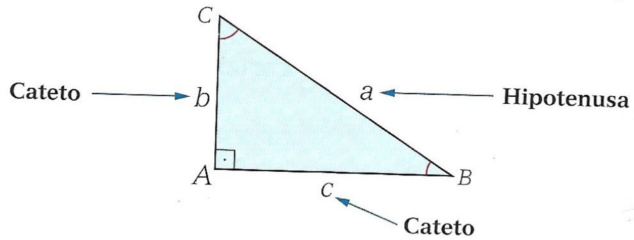
a) En el exterior del triángulo.

b) En el interior del triángulo.

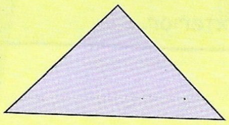
c) En uno de los lados del triángulo.

6 Teorema de Pitágoras

Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**, y el lado mayor, **hipotenusa**.



El teorema de Pitágoras solo se cumple en los triángulos rectángulos.



De la misma manera, si los lados de un triángulo cumplen el teorema de Pitágoras, entonces es un triángulo rectángulo.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EJEMPLO

7. Comprueba si los triángulos cuyos lados tienen las siguientes medidas son rectángulos.

a) 17 cm, 15 cm y 8 cm

b) 16 cm, 14 cm y 6 cm

c) 19 cm, 16 cm y 11 cm

Para determinar si son triángulos rectángulos comprobamos si se cumple el teorema de Pitágoras. Para ello siempre tomamos el lado mayor como hipotenusa.

a) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=17,\, b=15,\, c=8} \begin{cases} a^2 = 289 \\ b^2 + c^2 = 225 + 64 = 289 \end{cases}$

Es un triángulo rectángulo.

b) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=16,\, b=14,\, c=6} \begin{cases} a^2 = 256 \\ b^2 + c^2 = 196 + 36 = 232 \end{cases}$

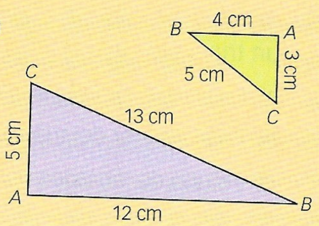
No es un triángulo rectángulo.

c) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=19,\, b=16,\, c=11} \begin{cases} a^2 = 361 \\ b^2 + c^2 = 256 + 121 = 377 \end{cases}$

No es un triángulo rectángulo.

ACTIVIDADES

30 **PRACTICA.** Comprueba que se cumple el teorema de Pitágoras en estos triángulos rectángulos.



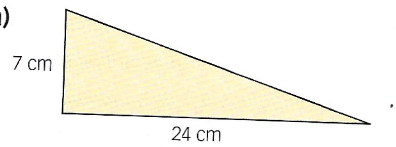
31 **APLICA.** Comprueba si un triángulo de lados que miden 25 m, 8 m y 7 m es rectángulo.

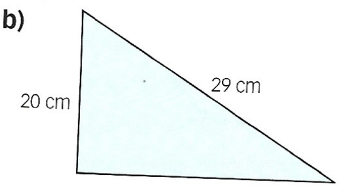
32 **REFLEXIONA.** ¿Existe un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 5 cm y su hipotenusa 8 cm?

SABER HACER

Determinar un lado desconocido en un triángulo rectángulo

Determina el lado que falta en estos triángulos rectángulos.





La operación inversa de elevar al cuadrado es hallar la raíz cuadrada.

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$

Y de la misma manera:

$3^2 = 9$ porque $\sqrt{9} = 3$

Pasos a seguir

1. Identificamos los datos conocidos y el lado que hay que calcular.

a) $b = 7$ cm y $c = 24$ cm

El lado que falta es la hipotenusa.

b) $a = 29$ cm y $b = 20$ cm

El lado que falta es uno de los catetos.

2. Sustituimos, en el teorema de Pitágoras, cada letra por su valor. La letra a representa la hipotenusa y b y c son los catetos.

a) $a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 7^2 + 24^2$

b) $a^2 = b^2 + c^2$

$29^2 = 20^2 + c^2$

3. Despejamos la letra desconocida para hallar su valor.

$a^2 = 7^2 + 24^2 \rightarrow a^2 = 625$

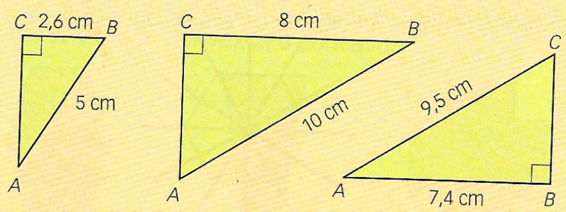
$a = \sqrt{625} = 25$ cm

$29^2 = 20^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 29^2 - 20^2 = 441$

$c = \sqrt{441} = 21$ cm

ACTIVIDADES

33 Halla el lado desconocido de estos triángulos rectángulos.



34 Halla la longitud del lado que falta en cada triángulo (a es la hipotenusa).

a) $a = 34$ cm; $b = 30$ cm

b) $b = 28$ cm; $c = 21$ cm

35 Calcula el lado que falta en estos triángulos rectángulos $\widehat{ABC}$ que tienen su ángulo recto en $\hat{A}$.

a) $b = 6$ cm; $c = 9$ cm

b) $b = 3{,}6$ cm; $c = 4{,}9$ cm

c) $b = 3$ cm; $c = 6{,}2$ cm

d) $b = 5{,}3$ cm; $c = 7$ cm

36 Calcula la medida de la hipotenusa, a, en los siguientes triángulos rectángulos isósceles.

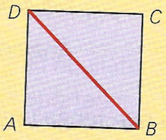
a) $b = c = 4$ cm

b) $b = c = 5{,}1$ cm

c) $b = c = 7{,}5$ cm

d) $b = c = 12{,}6$ cm

37 Halla la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 2,82 cm.



38 Calcula la medida de la diagonal de un rectángulo de dimensiones $5 \times 7{,}4$ cm.

39 Calcula la medida de la altura de un triángulo isósceles sabiendo que los lados iguales miden 6 cm, y el lado desigual mide 7,7 cm.