12

Inferencia estatística. Estimación por intervalos

Estatística e probabilidade

Introdución

Este tema iníciase cun repaso do cálculo de probabilidades dunha distribución normal, e o cálculo dos intervalos característicos nunha distribución normal estándar, N(0,1). Estes cálculos serán empregados continuamente neste tema e o seguinte.

A continuación abórdase o estudo da teoría elemental das mostras estatísticas e dalgúns tipos de mostraxe: aleatoria simple, aleatoria sistemática e estratificada.

Posteriormente expóñense a estimación da media e da proporción por intervalos de confianza. Abórdase o erro máximo admisible nunha estimación e o cálculo do tamaño dunha mostra para un erro dado.

A inferencia estatística emprégase en distintas situacións. Unha situación moi frecuente son as sondaxes de opinión. Tamén se utiliza na investigación de mercados e no control da agricultura, a gandaría e a pesca.

Organiza as túas ideas

Estimación estatística

consiste en inferir un parámetro da

poboación

a partir dunha

mostra

que se selecciona por un

tipo de mostraxe:
- aleatoria simple
- aleatoria sistemática
- estratificada

a partir da que se constrúen

intervalos de confianza:
- para a media
- para a proporción
- para sumas e diferenzas

cun

nivel de confianza

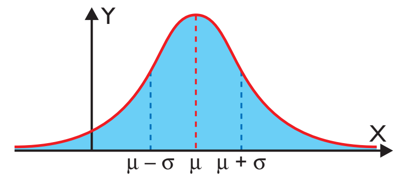
e un

erro máximo admisible

1. A distribución normal N(μ, σ)

Pensa e calcula

No debuxo da gráfica, a área comprendida entre o eixe X e a curva é 1. Calcula mentalmente canto vale a área que queda á esquerda da recta x = μ.



k	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066

A táboa completa da **N(0, 1)** atópase na última páxina do libro.

1.1. Probabilidade dunha distribución N(0, 1)

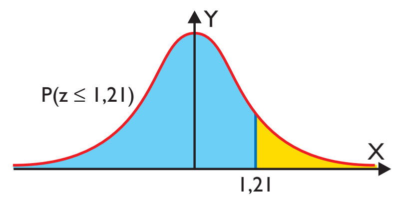
a) **Caso xeral: k > 0, P(z ≤ k) = P(z < k)**

As unidades e as décimas búscanse na columna da esquerda, e as centésimas, na fila superior.

Exemplo:

Calcula:

P(z ≤ 1,21) = 0,8869



De igual forma pódese calcular **k** coñecendo a probabilidade.

Exemplo:

Se P(z ≤ k) = 0,6985, atopa **k**.

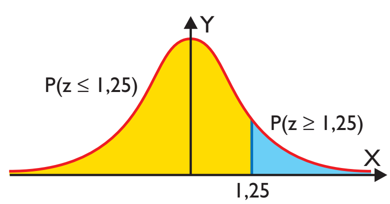
Buscando na táboa, chégase a k = 0,52.

b) **Caso: k > 0, P(z ≥ k)**. Tense que P(z ≥ k) = 1 – P(z ≤ k).

Exemplo:

Calcula: P(z ≥ 1,25) = 1 – P(z ≤ 1,25) = 1 – 0,8944 = 0,1056

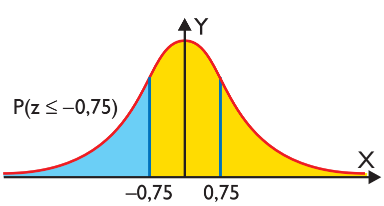
Para restar mentalmente 1 menos o decimal, comézase pola esquerda e réstase cada cifra de 9 e a última de 10.



c) **Caso: k < 0, P(z ≤ k)**. Tense que P(z ≤ k) = P(z ≥ –k) = 1 – P(z ≤ –k).

Exemplo:

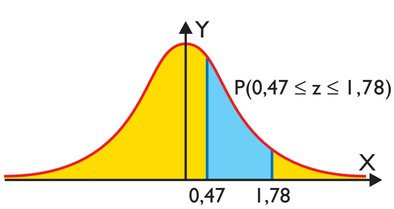
Calcula: P(z ≤ – 0,75) = P(z ≥ 0,75) = 1 – P(z ≤ 0,75) = 1 – 0,7734 = 0,2266



d) **Caso: P(k_1 ≤ z ≤ k_2)**. Tense que P(k_1 ≤ z ≤ k_2) = P(z ≤ k_2) – P(z ≤ k_1).

Exemplo:

P(0,47 ≤ z ≤ 1,78) = P(z ≤ 1,78) – P(z ≤ 0,47) = 0,9625 – 0,6808 = 0,2817

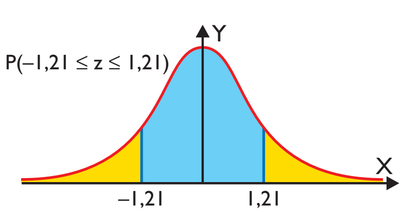


Un caso particular é cando k_1 = k_2, é dicir, o intervalo é simétrico.

P(–k ≤ z ≤ k) = P(z ≤ k) – P(z ≤ –k) = P(z < k) – [1 – P(z < k)] = 2P(z < k) – 1

Exemplo:

Calcula: P(–1,21 ≤ z ≤ 1,21) = 2P(z ≤ 1,21) – 1 = 2 · 0,8869 – 1 = 0,7738

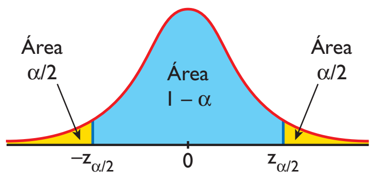


1.2. Intervalo característico nunha N(0, 1)

Sexa **z ≡ N(0, 1)** e quérese calcular un intervalo (–k, k) tal que:

$$P(-k \leq z \leq k) = p$$

Chámaselle **valor crítico** ao valor de **k**. Nos problemas de estimación, represéntase por $z_{\alpha/2}$. A probabilidade **p** represéntase por $1 - \alpha$.



1 Exercicio resolto

Calcula o intervalo característico nunha N(0, 1) correspondente a unha probabilidade de 0,95.

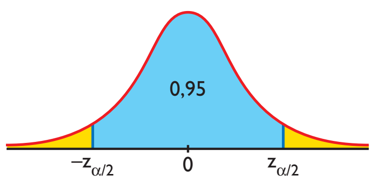
$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95$

$2P(z < z_{\alpha/2}) - 1 = 0{,}95$

$P(z \leq z_{\alpha/2}) = \dfrac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$

Buscando na táboa da N(0,1), obtense: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

O intervalo é: (–1,96; 1,96)



Valores críticos máis frecuentes

Os valores críticos máis frecuentes para unha **N(0, 1)** son:

Probabilidade: $1 - \alpha$	0,9	0,95	0,99
Valor crítico: $z_{\alpha/2}$	1,65	1,96	2,58

1.3. Tipificación da variable

Tipificar unha variable consiste en transformar unha distribución **N(μ, σ)** nunha normal **N(0, 1)**; para isto, aplícase o cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Estratexia de resolución de problemas

a) Escríbese a variable aleatoria:

x ≡ …

b) Escríbese o tipo de distribución de **x**:

N(μ, σ)

c) Escríbense as preguntas do problema en forma de probabilidade.

2 Exercicio resolto

Sábese que, nunha cidade, o peso das persoas maiores de 18 anos distribúese normalmente cunha media de 72 kg e unha desviación típica de 6 kg. Calcula a probabilidade de que, tomada unha persoa aleatoriamente pese máis de 80 kg.

a) x ≡ Peso das persoas

b) N(72, 6)

c) $P(x > 80) = P(x \geq 80)$

Hai que tipificar: $P(x \geq 80) = P\left(z \geq \dfrac{80 - 72}{6}\right) = P(z \geq 1{,}33) =$

$= 1 - P(z \leq 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

Aplica a teoría

1. Calcula nunha N(0, 1) as seguintes probabilidades:

a) $P(z \leq 1{,}38)$ b) $P(z \geq 2{,}1)$

c) $P(z \leq -1{,}46)$ d) $P(1{,}2 \leq z \leq 2)$

e) $P(-2{,}1 \leq z \leq 3{,}2)$ f) $P(-2{,}4 \leq z \leq 2{,}4)$

2. Calcula o valor de **k** nos seguintes casos:

a) $P(z \leq k) = 0{,}9871$ b) $P(z \geq k) = 0{,}1685$

3. Calcula nunha N(10, 2) as seguintes probabilidades:

a) $P(x \leq 8)$ b) $P(x \geq 11)$

c) $P(9 \leq x \leq 10)$ d) $P(-9 \leq x \leq 9)$

4. Calcula o intervalo característico nunha N(0, 1) correspondente á probabilidade de 0,9.

2. Mostraxe

Pensa e calcula

Analiza a ficha técnica da marxe e contesta:

a) Cal é a poboación?
b) Cantos individuos hai na mostra?
c) Explica como se seleccionou a mostra.
d) Que significa a marxe de erro?

Ficha técnica

Ámbito: nacional.

Universo: individuos maiores de 18 anos.

Mostra: 2 001 individuos.

Mostraxe: estratificada por comunidades autónomas e tamaño de hábitat.

Selección de informantes: aleatoria do fogar e conforme a cotas de sexo e idade para a determinación dos individuos.

Entrevista: telefónica sobre cuestionario estruturado.

Traballo de campo: do 22 de maio ao 5 de xuño de 2009.

Marxe de erro: ±2,2%

Nivel de confianza: 95,5%

2.1. Poboación e mostra

Poboación ou **universo** é o conxunto de todos os individuos que son obxecto dun estudo estatístico. Realízase un **censo** cando se toma toda a poboación para o estudo estatístico.

Unha mostra é un conxunto de individuos dunha poboación que se selecciona para facer un estudo estatístico.

As mostras só serven se as conclusións que se obteñen son fiables. Polo tanto, o importante é saber como elixir a mostra, cantos individuos a compoñen e que grao de fiabilidade existe nas conclusións que se obteñen.

O **tamaño dunha mostra** é o número de individuos que forman a mostra.

O **tipo de mostraxe** é o procedemento polo que se elixe a mostra. Pode ser: mostraxe aleatoria simple, mostraxe aleatoria sistemática e mostraxe aleatoria estratificada.

O **límite de erro** é a estimación que se fai do erro máximo cometido.

2.2. Mostraxe aleatoria simple

Unha **mostraxe** é **aleatoria** se se elixen **n** individuos da poboación tendo todos eles a mesma probabilidade de ser elixidos.

Exemplo:

Deséxase obter unha mostra aleatoria de 100 socios dun club deportivo, para coñecer a opinión dos 2 000 socios. Unha forma de elixir a mostra é sortear 100 números entre os 2 000, de maneira que os socios a quen correspondan estes números sexan os individuos da mostra.

Observa

A parte enteira do número aleatorio da calculadora multiplicado por N está comprendida entre 0 e N – 1. Se se lle suma a unidade, a parte enteira está entre 1 e N.

Se se desexa que na calculadora só apareza a parte enteira, elíxese:

MODE FIX 0

Obtención de números aleatorios coa calculadora

A calculadora xera un número aleatorio coa tecla Ran# comprendido entre 0 e 0,999. Se nunha poboación de N individuos se quere facer unha selección aleatoria de **n** individuos, prémese:

N × Ran# + 1 = = = …

Exemplo:

Obtén seis números aleatorios comprendidos entre 1 e 50.

MODE FIX 0

50 × Ran# + 1 = 49 = 3 = 92 = 15 = 33 = 74

MODE NORM

Observa

O que se obtén son números aleatorios, é dicir, estes dependen do azar e serán distintos cada vez que se faga o cálculo.

2.3. Mostraxe aleatoria sistemática

Unha **mostraxe aleatoria sistemática** consiste en ordenar a poboación e seleccionar aleatoriamente un individuo. A partir del, hai que seleccionar de **k** en **k**, ata completar a mostra.

Exemplo:

Para coñecer a opinión do funcionamento dun supermercado, á saída do supermercado selecciónase un individuo calquera; e, de dez en dez persoas, elíxese outro individuo ata completar o tamaño desexado.

2.4. Mostraxe aleatoria estratificada

Unha **mostraxe aleatoria estratificada** consiste en seleccionar un número de individuos de cada estrato ou grupo no que se ten dividida a poboación. A mostraxe aleatoria estratificada débese facer con repartición proporcional. Neste caso, a mostra é proporcional á poboación de cada estrato.

3 Exercicio resolto

Nun centro de ensino secundario, o número de estudantes de 1º, 2º, 3º e 4º de ESO é de 150, 120, 120 e 110, respectivamente. Calcula o número de estudantes de cada curso para obter unha mostra de 50 estudantes mediante mostraxe estratificada proporcional.

Se a repartición é proporcional, tense que 500 : 50 = 10. Divídese o número de estudantes de cada curso entre 10.

$$\begin{array}{r} 150 \\ 120 \\ 120 \\ +\ 110 \\ \hline 500 \end{array}$$

Estrato ou curso	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO	Total
Nº de estudantes no centro	150	120	120	110	500
Nº de estudantes na mostra	15	12	12	11	50

Aplica a teoría

5. Nunha fábrica que envasa 2 000 latas de xarda diarias desexase obter unha mostra de 100 latas. Explica como seleccionar a mostra:

a) Con mostraxe aleatoria simple.

b) Con mostraxe aleatoria sistemática.

6. Quérese obter unha mostra de 5 estudantes de 2º de bacharelato por mostraxe aleatoria simple. Se hai 30 estudantes e estes se numeraron do 1 ao 30, obtén coa calculadora seis números aleatorios que formen a mostra.

7. Nun almacén disponse de 60 000 paquetes de deterxente de catro tipos distintos segundo a táboa que aparece a continuación:

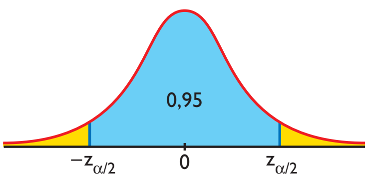
Deterxente	A	B	C	D
Nº de paquetes	18 000	20 000	10 000	12 000

Desexase extraer unha mostra de 120 paquetes. Calcula o número de paquetes que hai que tomar de cada clase para realizar unha mostraxe aleatoria estratificada proporcional.

3. Estimación da media por intervalos de confianza

Pensa e calcula

Sexa $z \equiv N(0, 1)$. Utiliza a táboa do anexo final e calcula o valor de $z_{\alpha/2}$ tal que: $P(-z_{\alpha/2} < z < z_{\alpha/2}) = 0{,}95$



Observa

Sexa μ a media e σ a desviación típica da poboación. Para estudar a media da poboación, elíxense **k** mostras distintas de tamaño **n** e obtéñense valores para as medias da mostra $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \bar{x}_k$ e desviacións típicas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_k$ para cada mostra. A distribución da variable aleatoria das medias da mostra que se representa por $\bar{X}$ xeneralízase polo teorema central do límite.

Estratexia de resolución de problemas

- Escríbese a variable aleatoria:

  $\bar{X} \equiv \dots$

- Escríbese o tamaño da mostra e se se pode aproximar a unha normal. Exprésase a fórmula da normal.
- Atópase a media, a desviación típica e a normal correspondente.
-

3.1. Distribución das medias da mostra

Teorema central do límite

Dada unha poboación que ten de media μ e de desviación típica σ, a **distribución das medias da mostra** de tamaño **n**, $\bar{X}$, ten as seguintes características:

- A media é: μ
- A desviación típica é: $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Se o tamaño da mostra **n** é grande ($n \geq 30$), a distribución da variable $\bar{X}$ aproxímase a unha distribución normal: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

  Se $n < 30$ pero a poboación segue unha distribución normal, as medias da mostra tamén se axustarán a unha normal.

4 Exercicio resolto

A estatura dos socios e socias dun club ten de media $\mu = 175$ cm e desviación típica $\sigma = 10$ cm. Se se elixe unha mostra de 64 asociados, cal é a probabilidade de que a media da mostra sexa menor ou igual ca 173 cm?

- Variable: $\bar{X} \equiv$ medias da mostra
- $n = 64 \geq 30 \Rightarrow$ aproxímase a unha normal: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- $\mu = 175, \ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{64}} = 1{,}25 \Rightarrow \bar{X} \equiv N(175; 1{,}25)$
- $P(\bar{X} \leq 173) = P\left(z \leq \dfrac{173 - 175}{1{,}25}\right) = P(z \leq -1{,}6) = 1 - P(z \leq 1{,}6) =$

  $= 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$

3.2. Intervalo de confianza para a media

O **intervalo de confianza** para a media da poboación μ cun nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$ é:

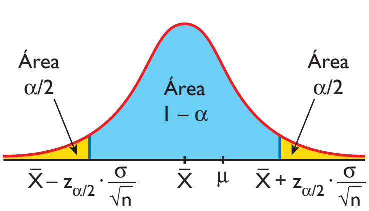
$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é un valor que nunha **N(0, 1)** cumpre que:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

O **nivel de confianza** $\mathbf{1 - \alpha}$ é a probabilidade que se ten de que a media da poboación pertenza ao intervalo dado.

O **nivel de significación** $\boldsymbol{\alpha}$ é a probabilidade de que a media da poboación non estea nese intervalo.



Observa que nunha poboación de media μ descoñecida e desviación típica σ coñecida, se se toman mostras de tamaño $n \geq 30$ ou a poboación é normal, a variable das medias da mostra $\overline{X}$ é:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

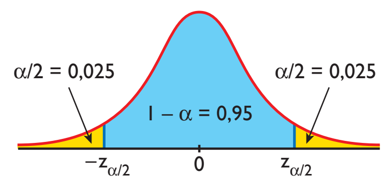
5 Exercicio resolto

Nunha mostra de 100 mozas e mozos obtívose que o peso medio é de 69 kg. Sabendo que a desviación típica da poboación é 8 kg, atopa o intervalo de confianza cun nivel de significación de 0,05, para a media da poboación.

- Como $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$
- O intervalo é:

$$\left(69 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}, 69 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{100}}\right) = (67{,}43; 70{,}57)$$

- Tense que $\mu \in (67{,}43; 70{,}57)$ cunha probabilidade do 95%.



3.3. Erro e tamaño da mostra

Erro máximo admisible	Tamaño da mostra
$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$

6 Exercicio resolto

Queremos estimar as vendas diarias que se fan nunha tenda cun nivel de confianza do 90% e cuxo erro máximo da estimación sexa de 200 €. Calcula o número mínimo de días que se deben contabilizar as vendas, sabendo que a desviación típica é de 500 €.

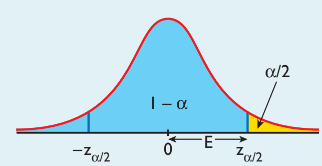
a) $1 - \alpha = 0{,}9 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}65$

b) $n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow n = \left(1{,}65 \cdot \frac{500}{200}\right)^2 \Rightarrow n = 17{,}02$

Débense contabilizar as vendas durante 17 días.

Observa

- Canto maior é o tamaño da mostra, menor é E. É dicir, para aumentar a precisión, é necesario que aumente o tamaño da mostra.
- Canto maior é o nivel de confianza $1 - \alpha$, maior é E.



Aplica a teoría

8. Unha empresa de transporte sabe que o peso medio dos paquetes que transporta é de 20 kg, cunha desviación típica de 5 kg. Se nun dos seus transportes leva 50 paquetes, cal é a probabilidade de que o seu peso medio sexa maior de 22 kg?

9. O tempo que permanece cada paciente na consulta de certo médico é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal cunha desviación típica de 4 minutos. Tomouse unha mostra de 256 pacientes deste médico e atopouse que o seu tempo medio de consulta foi de 10 minutos. Calcula o intervalo de confianza, a un nivel do 95%, para o tempo medio de consulta que se deduce da mostra.

10. As vendas mensuais nunha tenda de electrodomésticos distribúense segundo unha lei normal con desviación típica de 540 €. Realizouse un estudo nos últimos nove meses e atopouse o intervalo de confianza (2 802, 3 508).

a) Calcula cal foi a media das vendas neses nove meses.

b) Cal é o nivel de confianza para este intervalo?

11. Un fabricante de lámpadas sabe que a desviación típica da duración das lámpadas é de 100. Calcula o tamaño da mostra que se deberá someter a proba para ter unha confianza do 95% de que o erro da duración media que se calcule sexa menor de 10 h.

4. Estimación da proporción por intervalos de confianza

Pensa e calcula

Realizouse unha estimación da proporción de xente nova que le o xornal diariamente cun nivel de confianza do 95% e obtívose que esta proporción está no intervalo (71, 75). Calcula cal é o erro máximo que se pode cometer co nivel de confianza do 95% nesta estimación.

Observa

Quérese estudar a proporción ou probabilidade **p** dunha poboación que ten certa característica; por exemplo, ter ou non ter coche, ser válido ou defectuoso, etcétera. Para estudar a proporción da poboación elíxense **k** mostras distintas de tamaño **n** e obténense valores para as proporcións da mostra: $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_k$

4.1. Distribución das proporcións da mostra

A distribución das proporcións da mostra de tamaño **n**, que se representa por $\hat{p}$, ten as seguintes características:

a) A media é: **p**

b) A desviación típica é: $\sqrt{\dfrac{pq}{n}}$, $q = 1 - p$

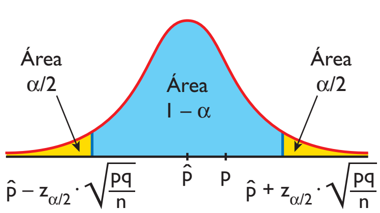
c) Se o tamaño da mostra **n** é grande ($n \geq 30$), a distribución da variable $\hat{p}$ aproxímase a unha distribución normal: $\mathbf{N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)}$

7 Exercicio resolto

O 3% das pezas fabricadas por unha máquina é defectuoso. Cal é a probabilidade de que en 50 pezas o 2% ou menos sexa defectuoso?

- Variable: $\hat{p}$ = proporcións da mostra
- $n = 50 \geq 30 \Rightarrow$ pódese aproximar a unha normal: $N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$
- $p = 0{,}03 \Rightarrow q = 0{,}97 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\dfrac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{50}} = 0{,}024$
- $P(\hat{p} \leq 0{,}02) = P\left(z \leq \dfrac{0{,}02 - 0{,}03}{0{,}024}\right) = P(z \leq -0{,}42) = 1 - P(z \leq 0{,}42) =$

  $= 1 - 0{,}6628 = 0{,}3372$



Observa

Observa que para estimar a proporción **p**, se se toma unha mostra de tamaño $n \geq 30$ ou a poboación é normal, a variable das proporcións da mostra é:

$$N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

4.2. Intervalo de confianza para a proporción

O **intervalo de confianza** para a proporción **p**, cun nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$, é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

onde:

- $q = 1 - p$
- $z_{\alpha/2}$ é un valor que nunha **N(0, 1)** cumpre que:

  $$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

- O **nivel de confianza** $\mathbf{1 - \alpha}$ é a probabilidade que se ten de que a proporción da poboación pertenza ao intervalo dado.
- O **nivel de significación** $\boldsymbol{\alpha}$ é a probabilidade de que a proporción da poboación non estea nese intervalo.

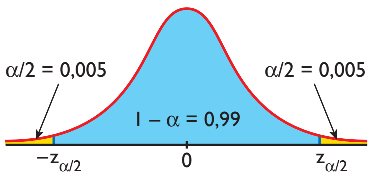
Proporción **p** descoñecida

Como a proporción **p** que se quere estimar non se coñece, empréganse para realizar os cálculos $\hat{p}$ e $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, é dicir:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

8 Exercicio resolto

Tomouse unha mostra de 40 oliveiras, e contabilizáronse 18 delas con repilo (enfermidade producida por un fungo). Atopa o intervalo de confianza para a proporción de oliveiras con repilo na poboación, cun nivel de confianza do 99%.



- Como $1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$
- Tense: $\hat{p} = \frac{18}{40} = 0{,}45$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}55$

$$\left(0{,}45 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{40}}; 0{,}45 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{40}}\right) = (0{,}25; 0{,}65)$$

- A proporción estará entre o 25% e o 65%, cunha probabilidade do 99%.

4.3. Erro e tamaño da mostra

Erro máximo para a proporción	Tamaño da mostra
$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}$, $q = 1 - p$	$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2}$

9 Exercicio resolto

Sábese por unha enquisa piloto que a proporción de usuarias e usuarios que valora o uso dun modelo de ordenador é 0,45. Calcula o tamaño da mostra que deberá tomarse para estimar cun nivel de confianza do 95% e cun erro máximo da estimación do 0,5%, a proporción de usuarios e usuarias que valoran positivamente o modelo de ordenador.

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

b) $n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2} \Rightarrow n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{0{,}005^2} \Rightarrow n = 38\,031{,}84$

Débese entrevistar a 38 032 persoas.

Aplica a teoría

12. Nunhas eleccións, un dos candidatos obtivo o 46% dos votos. Calcula a probabilidade de que nunha mostra elixida ao chou de 200 votantes saíse unha porcentaxe ao seu favor igual ou superior ao 50%.

13. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas que viron un programa de televisión, 100 persoas recoñeceron que lles gustara. Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de persoas na poboación ás que lles gusta o programa.

14. Nunha mostra de 100 pacientes sometidos a un certo tratamento, obtense melloría en 80 pacientes. Se se traballa cun nivel de confianza do 95%:

a) Cal é o erro máximo admisible?

b) Cal é o mínimo número de pacientes que se debe tomar se co nivel de confianza dado se desexa que o erro sexa menor de 0,05?

Exercicios e problemas resoltos

Mostraxe

10. Dunha poboación de 200 mulleres e 300 homes deséxase seleccionar, mediante mostraxe aleatoria estratificada con afixación proporcional, unha mostra de tamaño 30 distribuída en dous estratos. Cal será a composición da mostra?

Solución:

Homes: $\frac{500}{30} = \frac{300}{x} \Rightarrow x = 18$; Mulleres: $\frac{500}{30} = \frac{200}{x} \Rightarrow x = 12$

Estrato ou curso	Mulleres	Homes	Total
Nº de individuos na poboación	200	300	500
Nº de individuos na mostra	12	18	30

Teorema central do límite

11. Sexa a poboación {1, 2, 3, 4}.

a) Escribe todas as mostras posibles de tamaño 2, mediante mostraxe aleatoria simple.

b) Calcula a varianza das medias da mostra.

a) As mostras de tamaño 2 son:

{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}

b) Polo teorema central do límite, a variable de medias da mostra de tamaño **n** segue unha distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ onde μ é a media da poboación e σ a desviación típica da poboación. Tense:

Poboación:

Media: $\mu = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$

Varianza: $V = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow V = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{4} - 2,5^2 = 1,25$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,25} = 1,118 = 1,12$

Medias da mostra:

Tamaño da mostra: $n = 2$

Desviación típica: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,12}{\sqrt{2}} = 0,7919^2$; Varianza: $0,7906^2 =$ **0,627**

12. A idade á que contraen matrimonio os homes da illa Barataria é unha variable aleatoria que se pode aproximar a unha distribución normal de media 35 anos e desviación típica de 5 anos. Elíxese aleatoriamente unha mostra de 100 homes desta illa. Sexa $\overline{X}$ a media da mostra da idade de casamento.

a) Cales son a media e a varianza de $\overline{X}$?

b) Cal é a probabilidade de que a idade media de casamento da mostra estea comprendida entre 36 e 37 anos?

a) Variable: $\overline{X}$ = medias da mostra

$n = 100 \geq 30 \Rightarrow$ aproxímase a unha normal: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\boldsymbol{\mu = 35}$

$\sigma = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0,5 \Rightarrow \boldsymbol{V = 0,5^2 = 0,25}$

b) $\overline{X} \equiv N(35; 0,5)$

$P(36 \leq \overline{X} \leq 37) = P\left(\frac{36 - 35}{0,5} \leq z \leq \frac{37 - 35}{0,5}\right) = P(2 \leq z \leq 4) =$

$= P(z \leq 4) - P(z \leq 2) = 1 - 0,9772 =$ **0,0228**

Exercicios e problemas PAU

Estimación da media por intervalos de confianza

13. O tempo en minutos dedicado cada día a escoitar música polos estudantes de secundaria dunha certa cidade suponse que é unha variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Tómase unha mostra aleatoria simple de 10 estudantes e obtéñense os seguintes tempos (en minutos):

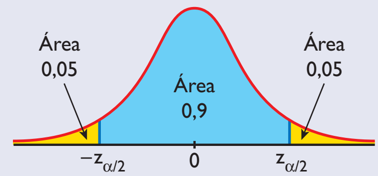
91; 68; 39; 82; 55; 70; 72; 62; 54; 67

Determina un intervalo de confianza ao 90% para o tempo medio diario dedicado a escoitar música por un estudante.

$$\bar{x} = \frac{91 + 68 + 39 + 82 + 55 + 70 + 72 + 62 + 54 + 67}{10} = 66$$

O **intervalo de confianza** para a media da poboación μ cun nivel de confianza $\mathbf{1 - \alpha}$ é:

$$\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

a) Como $\alpha = 0,1 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9$, entón: $P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = 0,9$

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = P(z \le z_{\alpha/2}) - (1 - P(z \le z_{\alpha/2})) = 0,9$

$P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645 = 1,65$

b) O intervalo é:

$$\left(66 - 1,65 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}, 66 + 1,65 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}\right) = \mathbf{(58,20; 73,80)}$$

Tense que $\mu \in (58,20; 73,80)$ cunha probabilidade do 90%.

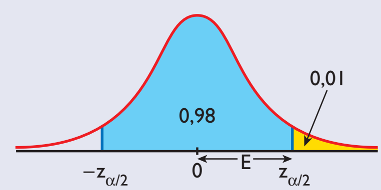
14. O rendemento por hectárea das plantacións de trigo nunha certa rexión suponse que é unha variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Tomouse unha mostra aleatoria simple de 64 parcelas cunha superficie igual a 1 hectárea cada unha, e obtense un rendemento medio de 6 toneladas.

a) Pode asegurarse que o erro de estimación do rendemento medio por hectárea é menor ca 0,5 toneladas, cun nivel de confianza do 98%? Razóese.

b) Que tamaño da mostra mínimo deberá tomarse para que o erro na estimación sexa menor ca 0,5 toneladas cun nivel de confianza do 95%?

a) O erro máximo admisible é:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Ao nivel de confianza $1 - \alpha = 0,98$.

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = P(z \le z_{\alpha/2}) - (1 - P(z \le z_{\alpha/2})) = 0,98$

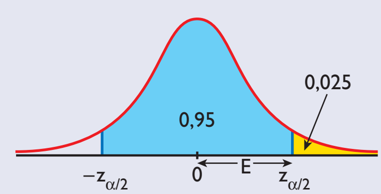
$P(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{0,98 + 1}{2} = 0,99 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,325 = 2,33$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 2,33 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = \mathbf{0,29 < 0,5}$

O erro de estimación do rendemento medio por hectárea é menor ca 0,5.

b) O tamaño da mostra é:

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$$



Ao nivel de confianza $1 - \alpha = 0,95$.

$P(-z_{\alpha/2} \le z \le z_{\alpha/2}) = P(z \le z_{\alpha/2}) - (1 - P(z \le z_{\alpha/2})) = 0,95$

$P(z \le z_{\alpha/2}) = \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$n = \left(1,96 \cdot \frac{1}{0,5}\right)^2 \Rightarrow n = 15,37$

Débese tomar unha mostra de 16 parcelas.

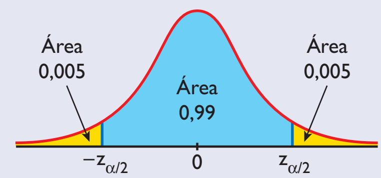
Exercicios e problemas resoltos

Estimación da proporción por intervalos de confianza

15. Aplicouse un medicamento a unha mostra de 200 enfermos e observouse unha resposta positiva en 140 deles. Estímese, mediante un intervalo de confianza do 99%, a proporción de enfermos que responderían positivamente se este medicamento se aplicase á poboación da que se extraeu a mostra.

O intervalo de confianza para a proporción **p**, cun nivel de confianza **$1 - \alpha$**, é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$



$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

a) Como $1 - \alpha = 0{,}99$, entón: $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}99$

$$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = P(z \leq z_{\alpha/2}) - (1 - P(z \leq z_{\alpha/2})) = 0{,}99$$

$$P\,(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{0{,}99 + 1}{2} = 0{,}995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}58$$

b) Tense: $\hat{p} = \dfrac{140}{200} = 0{,}7$; $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 0{,}3$

O intervalo é:

$$\left(0{,}7 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{200}}; 0{,}7 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{200}}\right) = (0{,}62; 0{,}78)$$

A proporción estará entre o 62% e o 78% cunha probabilidade do 99%.

---

16. Cun nivel de confianza igual a 0,95, a partir do estudo da mostra, o intervalo de confianza da proporción de habitantes dunha comunidade que teñen ordenador portátil é:

(0,1804; 0,2196)

a) Cal é a proporción da mostra de habitantes desa comunidade que teñen ordenador portátil? Cal é o tamaño da mostra?

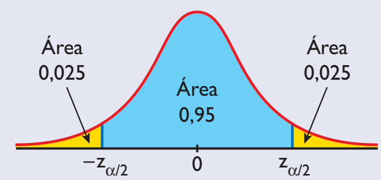
b) Cal debería ser o tamaño da mostra para estimar a citada proporción, cunha confianza do 95%, cun erro máximo de 0,01?

A proporción da mostra é:

$$\hat{p} = \frac{0{,}1804 + 0{,}2196}{2} = 0{,}2$$

O intervalo de confianza para a proporción **p**, cun nivel de confianza **$1 - \alpha$**, é:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$



$P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

a) Como $1 - \alpha = 0{,}95$, entón: $P(-z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{\alpha/2}) = 0{,}95$

$$P\,(z \leq z_{\alpha/2}) = \frac{0{,}95 + 1}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

Tómase o extremo superior do intervalo:

$$\hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, = 0{,}2196 \Rightarrow 0{,}2 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{n}} = 0{,}2196$$

$$n = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{\left(\dfrac{0{,}2196 - 0{,}2}{1{,}96}\right)^2} = 1599{,}9 = \mathbf{1\,600}$$

b) $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{pq}{E^2} \Rightarrow n = 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}01^2} \Rightarrow n = 6146{,}56$$

Débense tomar na mostra a 6 147 persoas.

Exercicios e problemas

Preguntas tipo test

Contesta no teu caderno:

1 Suponse que a cualificación en Matemáticas obtida polo alumnado dunha certa clase é unha variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 puntos. Elíxese unha mostra aleatoria simple de tamaño 10 e obtense unha suma das súas cualificacións igual a 59,5 puntos. Determina un intervalo de confianza ao 95% para a cualificación media da clase.

- ❑ (58,57; 60,43)
- ❑ (5,02; 6,88)
- ❑ (5,92; 5,98)
- ❑ (5, 6)

2 No enunciado do problema anterior, di que tamaño deberá ter a mostra para que o erro máximo da estimación sexa de 0,5 puntos, cun nivel de confianza do 95%.

- ❑ 35
- ❑ 34
- ❑ 6
- ❑ 31

3 A duración da vida dunha determinada especie de tartaruga suponse que é unha variable aleatoria, con distribución normal de desviación típica igual a 10 anos. Tómase unha mostra aleatoria simple de 10 tartarugas e obtéñense as seguintes duracións, en anos:

46; 38; 59; 29; 34; 32; 38; 21; 44; 34

Determina un intervalo de confianza ao 95% para a vida media desta especie de tartarugas.

- ❑ (37,30; 37,70)
- ❑ (30, 40)
- ❑ (27,5; 47,5)
- ❑ (31,30; 43,70)

4 No enunciado do problema anterior, cal debe ser o tamaño da mostra observada para que o erro da estimación da vida media non sexa superior a 5 anos, cun nivel de confianza do 90%?

- ❑ 15
- ❑ 16
- ❑ 11
- ❑ 10

5 A lonxitude dos cables dos auriculares que fabrica unha empresa é unha variable aleatoria que segue unha lei normal con desviación típica 4,5 cm. Para poder estimar a lonxitude media medíronse os cables dunha mostra aleatoria de 9 auriculares e obtivéronse as seguintes lonxitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202

Atopa un intervalo de confianza, ao 97%, para a lonxitude media dos cables.

- ❑ (100; 300)
- ❑ (195,5; 204,5)
- ❑ (196,74; 203,26)
- ❑ (199,94; 200,06)

6 No enunciado anterior, determina o tamaño mínimo que debe ter unha mostra destes auriculares para que o erro de estimación da lonxitude media sexa inferior a 1 cm, co mesmo nivel de confianza do apartado anterior.

- ❑ 90
- ❑ 10
- ❑ 96
- ❑ 95

7 Sábese que as puntuacións dun test seguen unha lei normal de media 36 e desviación típica 4,8. Se se toma unha mostra aleatoria de 16 individuos, cal é a probabilidade de que a media desta mostra sexa superior a 35 puntos?

- ❑ 0,7977
- ❑ 0,2023
- ❑ 0,5825
- ❑ 0,9661

8 No enunciado anterior, que porcentaxe de mostras de tamaño 25 ten unha media dunha mostra comprendida entre 34 e 36?

- ❑ 0,50
- ❑ 0,7023
- ❑ 0,2977
- ❑ 0,4814

9 Para efectuar un control de calidade sobre a duración en horas dun modelo de xoguetes electrónicos elíxese unha mostra aleatoria de 36 xoguetes dese modelo, e obtense unha duración media de 97 horas. Sabendo que a duración dos xoguetes electrónicos dese modelo se distribúe normalmente cunha desviación típica de 10 horas, atopa o intervalo de confianza ao 99,2% para a duración media dos xoguetes electrónicos dese modelo.

- ❑ (94,08; 99,92)
- ❑ (92,58; 101,42)
- ❑ (92,71; 101,29)
- ❑ (87; 107)

10 A vida media dun determinado modelo de lámpada segue unha distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elixida unha mostra e cun nivel de confianza do 98%, obtense o intervalo (388,68; 407,32) para a vida media. Calcula a media e o tamaño da mostra elixida.

- ❑ $\bar{x}$ = 398 días e n = 225 lámpadas.
- ❑ $\bar{x}$ = 398 días e n = 15 lámpadas.
- ❑ $\bar{x}$ = 398 días e n = 275 lámpadas.
- ❑ Non se pode determinar.

Resumo

Distribucións da mostra

Parámetro da poboación	Variable da mostra	Distribución da mostra
Media μ	$\overline{X}$	$\overline{X} \equiv N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Proporción p	$\hat{p}$	$\hat{p} \equiv N\left(p, \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$

Intervalos de confianza

Poboación	Intervalo
Intervalo de confianza para a **media μ**.	$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
Intervalo de confianza para a **proporción p**.	$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pq}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pq}{n}}\right)$

Erro e tamaño da mostra

Para a media	
Erro máximo	**Tamaño da mostra**
$E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{E}\right)^2$

Para a proporción	
Erro máximo	**Tamaño da mostra**
$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pq}{n}}, \ q = 1 - p$	$n = (z_{\alpha/2})^2 \cdot \dfrac{pq}{E^2}$

Exercicios e problemas propostos

1. A distribución normal N(μ, σ)

15. Calcula o intervalo característico nunha N(0, 1) correspondente á probabilidade de 0,99.

16. Un estudo dun fabricante de televisores indica que a duración media dun televisor é de 10 anos, cunha desviación típica de 0,7 anos. Supoñendo que a duración media dos televisores siga unha distribución normal:

a) Calcula a probabilidade de que un televisor dure máis de 9 anos.

b) Calcula a probabilidade de que dure entre 9 e 11 anos.

17. A duración de certo tipo de motor é unha variable normal cunha media de 10 anos e unha desviación típica de 2 anos. O fabricante garante o bo funcionamento dos motores por un período de 13 anos. Que porcentaxe de motores se espera que non cumpran a garantía?

2. Mostraxe

18. Deséxase elixir por mostraxe aleatoria simple unha mostra de 8 veciños dunha comunidade de 60 persoas. Se se numeraron as 60 persoas do 1 ao 60, emprega a calculadora para xerar a mostra.

19. En certa localidade hai 500 empresas dedicadas á alimentación, distribuídas segundo o número de empregados da seguinte forma:

Nº de empregados	Nº de empresas
Menor de 20	300
Entre 20 e 50	150
Maior de 50	50

Deséxase extraer unha mostra de 20 empresas. Calcula o número delas que hai que tomar de cada clase para realizar unha mostraxe aleatoria estratificada proporcional.

20. Nun barrio quérese facer un estudo para coñecer o tipo de actividades de lecer que máis lles gustan aos seus habitantes. Para isto, van ser entrevistados 100 individuos elixidos ao azar.

a) Explica que procedemento de selección sería máis axeitado: mostraxe con reposición ou sen reposición.

b) Como os gustos cambian coa idade, e sábese que no barrio viven 2 500 nenos, 7 000 adultos e 500 anciáns, posteriormente decídese elixir a mostra anterior empregando mostraxe estratificada proporcional.

b1) Define os estratos.

b2) Determina o tamaño da mostra correspondente a cada estrato.

3. Estimación da media por intervalos de confianza

21. Unha variable aleatoria segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ. Extráense mostras aleatorias simples de tamaño **n**.

a) Que distribución ten a variable aleatoria media da mostra?

b) Se se toman mostras de tamaño 4 dunha variable aleatoria **x** con distribución N(165, 12), calcula $P(\overline{X} > 173{,}7)$.

22. Sábese que o peso dos bebés acabados de nacer nunha determinada poboación segue unha distribución normal de 3 600 g de media e 280 g de desviación típica. Tómase unha mostra ao azar de 196 deles, e calcúlase a media. Cal é a probabilidade de que esta media estea entre 3 580 e 3 620 g?

23. Foron probados 10 automóbiles, escollidos aleatoriamente dunha mesma marca e modelo, por condutores coa mesma forma de conducir e en estradas similares. Obtívose que o consumo medio de gasolina en litros, por cada 100 km, foi de 5. Estudos previos indican que o consumo de gasolina ten unha distribución normal de 2 litros de desviación típica. Determina un intervalo de confianza ao 95% para a media do consumo de gasolina destes automóbiles.

24. A duración das chamadas de teléfono nunha oficina comercial segue unha distribución normal con desviación típica de 10 segundos. Faise unha enquisa entre 50 chamadas, e a media de duración obtida nesa mostra é de 35 segundos. Calcula un intervalo de confianza ao 99% para a duración media das chamadas.

25. Estímase que o tempo de reacción dun condutor ante un obstáculo imprevisto ten unha distribución normal con desviación típica de 0,05 segundos. Se se quere conseguir que o erro de estimación da media non supere os 0,01 segundos, cun nivel de confianza do 99%, que tamaño mínimo deberá ter a mostra de tempo de reacción?

26. Unha variable aleatoria **x** ten distribución normal, e a súa desviación típica é igual a 3.

a) Se se consideran mostras de tamaño 16, que distribución segue a variable aleatoria media da mostra?

b) Se se desexa que a media da mostra non difira en máis dunha unidade da media da poboación, con probabilidade de 0,99, cantos elementos se deberían tomar como mínimo na mostra?

Exercicios e problemas propostos

4. Estimación da proporción por intervalos de confianza

27. Nun centro escolar, o 40% do alumnado ten dous ou máis irmáns. Se se selecciona unha mostra de 36 estudantes, calcula cal é a probabilidade de que, dos estudantes da mostra, o 50% ou menos teñan dous ou máis irmáns.

28. Realizouse unha enquisa a 325 cidadáns e contabilizouse que 120 ían ao teatro regularmente.

a) Atopa, cun nivel de confianza do 94%, un intervalo para estimar a proporción de cidadáns que van ao teatro regularmente.

b) Calcula o número mínimo de cidadáns que deben entrevistarse para que o erro sexa do 0,01.

29. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas dunha poboación, hai 80 que teñen teléfono móbil. Calcula o intervalo de confianza aproximado para a proporción da poboación, cun nivel de confianza do 95%.

30. Cando se lles preguntou a 100 persoas de certa cidade, elixidas ao chou, se len o xornal polo menos unha vez á semana, só 40 contestaron que si. Atopa un intervalo de confianza, con nivel de confianza do 99%, para a proporción de persoas desa cidade que len o xornal polo menos unha vez á semana.

31. O 70% das persoas que teñen teléfono móbil usan algún servizo de telefonía a través de Internet. Se se toma unha mostra de 150 persoas, cal é a probabilidade de que haxa máis de 90 persoas que usen algún servizo de telefonía móbil a través de Internet?

32. Dunha mostra de 60 clientes de supermercados, 24 foron capaces de dicir o prezo do produto que mercaran.

a) Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de clientes da poboación.

b) Calcula o número mínimo de clientes para que o erro sexa menor dun 5%.

Para ampliar

33. Unha cidade de 2 000 habitantes está poboada por persoas de pelo negro, loiro e castaño. Seleccionouse, mediante mostraxe aleatoria estratificada con afixación proporcional, unha mostra constituída por 28 persoas de pelo negro, 32 de pelo loiro e 20 de pelo castaño. Determina cal é a composición, segundo a cor de pelo, dos habitantes desta cidade.

34. O peso das peras dunha colleita distribúese segundo unha normal de 115 g de media e 25 g de desviación típica.

a) Cal é a probabilidade de que unha pera elixida ao azar pese máis de 120 g?

b) Cal é a probabilidade de que o peso medio dunha mostra de 64 peras estea entre 112 e 119 g?

35. Sábese que o cociente intelectual do alumnado dunha universidade distribúese segundo unha lei normal de media 100 e varianza 27.

a) Calcula a probabilidade de que unha mostra de 81 alumnos e alumnas teña un cociente intelectual medio inferior a 109.

b) Calcula a probabilidade de que unha mostra de 36 alumnas e alumnos teña un cociente intelectual medio superior a 109.

36. Suponse que os ingresos diarios dunha empresa seguen unha distribución normal de 400 € de media e 250 € de desviación típica.

a) Como se distribúe a media da mostra para mostras aleatorias de tamaño **n**?

b) Disponse dunha mostra aleatoria de 25 observacións. Calcula a probabilidade de que o promedio de ingresos estea entre 350 € e 400 €.

37. A cantidade media de hemoglobina en sangue do ser humano segue unha distribución normal con desviación típica de 2 g/dl. Calcula o nivel de confianza dunha mostra de 12 extraccións de sangue que indique que a media da poboación de hemoglobina en sangue está entre 13 e 15 g/dl.

38. O peso medio dunha mostra de 64 mozos de 18 anos foi de 70 kg. Sabendo que os pesos dos mozos de 18 anos se distribúen cunha desviación típica de 12 kg, atopa o intervalo de confianza para a media dos pesos da poboación de mozos de 18 anos, cun nivel de confianza do 95%.

39. Unha mostra aleatoria de 100 estudantes que se presentan a unhas probas de selectividade revela que a media de idade é de 18,1 anos. Atopa un intervalo de confianza do 90% para a idade media de todos os estudantes que se presentan ás probas, sabendo que a desviación típica da poboación é de 0,4.

40. Un fabricante de pilas alcalinas sabe que a desviación típica da duración das pilas que fabrica é de 80 h. Calcula o tamaño da mostra que debe someterse a proba para ter unha confianza do 95% de que, ao tomar a duración media da mostra como valor da duración media da poboación total de pilas, o erro que se cometa sexa menor ca 16 h.

41. Nunha enquisa realizada a 800 persoas elixidas ao azar do censo electoral, 240 declararon a súa intención de votar ao partido A.

a) Estima cun nivel de confianza do 95,45% entre que valores se atopa a intención de voto a este partido en todo o censo.

b) Discute razoadamente o efecto que tería sobre o intervalo de confianza o aumento ou a diminución do nivel de confianza.

42. En certa poboación próxima a unha estación de esquí quérese estimar cun nivel de confianza do 95% a poboación de habitantes que practican esquí. Tómase unha mostra de 400 habitantes da poboación, dos que 240 afirman que practican este deporte. Determina o correspondente intervalo de confianza.

43. Sábese que o peso en quilogramos do alumnado de bacharelato é unha variable aleatoria **x** que segue unha distribución normal de desviación típica igual a 5 kg.

a) No caso de considerar mostras de 25 estudantes, que distribución ten a variable aleatoria das medias da mostra $\bar{x}$?

b) Se se desexa que a media da mostra non difira en máis dun quilo da media da poboación, con probabilidade 0,95, cantos estudantes se deberían tomar na mostra?

44. Nunha universidade cóllese ao azar unha mostra de 100 alumnos e alumnas, e atópase que 62 aprobaron todas as materias.

a) Cun nivel de confianza do 95%, atopa un intervalo para estimar a porcentaxe de alumnas e alumnos que aproban todas as materias.

b) Á vista do resultado anterior, preténdese repetir a experiencia para conseguir unha cota de erro de 0,03, co mesmo nivel de confianza do 95%. Cantos individuos deberá ter a mostra?

45. Un laboratorio farmacéutico afirma que o número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar unha determinada enfermidade segue unha distribución normal con desviación típica igual a 8. Tómase unha mostra de 100 enfermos aos que se lles subministra o medicamento, e obsérvase que a media de horas que tardan en curar é igual a 32.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, para a media do número de horas que tarda en curar o medicamento.

b) Se o nivel de significación é 0,05, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar para estimar o valor da media cun erro menor de 3 h?

Problemas

46. Un estudo realizado sobre 100 usuarios e usuarias revela que un coche percorre anualmente un promedio de 15 200 km, cunha desviación típica de 2 250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, ao 99%, para a cantidade promedio de quilómetros percorridos.

b) Cal debe ser o tamaño mínimo da mostra para que o erro cometido non sexa superior a 500 km, con igual confianza?

47. Sábese que o consumo semanal de refrescos (en litros) entre a xuventude dunha cidade é unha variable normal con desviación típica igual a 0,6 litros. Pregúntase a 100 mozas e mozos desa cidade sobre o seu consumo semanal de refrescos e obtense unha media da mostra de 1,5 litros.

a) Atopa o intervalo de confianza de nivel 0,95 para a media de consumo semanal de refrescos da poboación de mozos e mozas.

b) Se se acepta un erro de 0,1 litros e se toma un nivel de confianza do 99%, cal é o tamaño da mostra de mozas e mozos que habería que considerar?

Exercicios e problemas propostos

48. Unha mostra aleatoria extraída dunha poboación normal de varianza igual a 100 presenta unha media da mostra de 160. Sabendo que o tamaño da mostra é 144:

a) Calcula un intervalo de confianza do 95% para a media da poboación.

b) Calcula un intervalo de confianza do 90% para a media da poboación.

c) Se se quere ter unha confianza do 95% de que o erro máximo é 1,2, cantas observacións adicionais deben tomarse?

49. O peso dos cans adultos dunha certa raza é unha variable aleatoria que se distribúe normalmente con desviación típica de 0,6 kg. Unha mostra aleatoria de 30 animais deu un peso medio de 7,4 kg.

a) Calcula un intervalo de confianza, ao 99%, para o peso medio dos cans adultos desta raza.

b) Que tamaño mínimo ten que ter a mostra para ter unha confianza do 95% de que a media da mostra non se diferencia en máis de 0,3 kg da media da poboación?

50. Tomouse unha mostra aleatoria de 100 individuos aos que se lles mediu o nivel de glicosa en sangue, e obtívose unha media da mostra de 110 mg/cc. Sábese que a desviación típica da poboación é de 20 mg/cc.

a) Obtén un intervalo de confianza, ao 90%, para o nivel de glicosa en sangue da poboación.

b) Que erro máximo se comete na estimación anterior?

51. Nun centro escolar hai 2 000 estudantes, distribuídos en 5 cursos da seguinte maneira: 400 en 1°, 380 en 2°, 520 en 3°, 360 en 4° e 340 en 5°. Quérese seleccionar unha mostra de 100 estudantes empregando a técnica de mostraxe aleatoria estratificada con afixación proporcional e considerando cada curso como un estrato. Como se seleccionaría a mostra?

52. Sabendo que a varianza dunha lei normal é $\sigma^2 = 16$, determina o nivel de confianza co que pode dicirse que a súa media está comprendida entre 6,2 e 8,8 se se toma unha mostra aleatoria de tamaño 36 desta distribución.

53. Unha fábrica de conservas desexa coñecer o tempo que tarda en estragarse un produto almacenado. Elíxese unha mostra de 400 unidades e resulta que o tempo medio de descomposición destes produtos é de 172 h. Por experiencias anteriores coñécese que a desviación típica da variable normal tempo de descomposición é de 5 h.

Cun nivel de confianza do 95%, entre que valores se atopa o tempo medio de descomposición para a totalidade do produto almacenado?

54. Para estimar a proporción dos habitantes dunha determinada cidade que posúen ordenador persoal, quérese utilizar unha mostra aleatoria de tamaño **n**. Calcula o valor mínimo de **n** para garantir que, cun nivel de confianza do 95%, o erro da estimación non sexa superior ao 2%. (Como se descoñece a proporción, deberase tomar o caso máis desfavorable, que será 0,5).

55. Co fin de estimar a idade media dos habitantes dunha gran cidade, tomouse unha mostra aleatoria de 300 habitantes, que deu como resultado unha idade media de 35 anos e unha desviación típica de 7 anos.

a) Atopa o intervalo do 95% de confianza no que se atopa a idade media da poboación.

b) Que nivel de confianza se debería usar para que o intervalo fose 35 ± 0,44?

56. Estamos realizando unha mostra sobre o nivel de coñecementos xerais dos estudantes de bacharelato. Para isto, elíxese unha mostra aleatoria de 9 destes estudantes, aos que se lles realizou un exame. As cualificacións obtidas foron as seguintes:

7,8   6,5   5,4   7,1   5,0   8,3   5,6   6,6   6,2

Suponse que a variable aleatoria obxecto de estudo segue unha distribución normal de desviación típica coñecida e igual a 1.

Pídese:

a) Un intervalo de confianza ao 98% para a media das cualificacións nos exames.

b) O tamaño mínimo que debería ter a mostra no caso de admitir un erro máximo de 0,5 puntos, cun nivel de confianza do 95%.

57. Sábese que os estudantes dunha provincia dormen un número de horas diarias que se distribúen segundo unha lei normal de media μ horas e desviación típica $\sigma = 2$ h.

a) A partir dunha mostra de 64 estudantes, obtívose o seguinte intervalo de confianza para a media da poboación (7,26; 8,14). Determina o nivel de confianza co que se construíu este intervalo.

b) Determina o tamaño da mostra mínimo necesario para que o erro que se cometa ao estimar a media da poboación por un intervalo de confianza sexa, como máximo, de 0,75 h, cun nivel de confianza do 98%.

58. Nunha mostra de 600 persoas dunha cidade obsérvase que 30 son inmigrantes.

a) Determina un intervalo de confianza de nivel 0,95 para a porcentaxe de inmigrantes desta cidade.

b) Se se quere estimar a porcentaxe de inmigrantes cun erro máximo de 0,02, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar se se usa un nivel de significación do 1%?

59. Tomouse ao azar unha mostra de 60 estudantes dunha universidade, e atopouse que un terzo deles falaba inglés.

a) Atopa, cun nivel de confianza do 90%, un intervalo de confianza para estimar a proporción de estudantes que falan inglés entre o alumnado desa universidade.

b) Á vista do resultado anterior, preténdese repetir a experiencia para conseguir unha cota de erro do 0,01, co mesmo nivel de confianza do 90%. Cantos individuos deberá ter a mostra?

Para profundar

60. Sábese que a estatura dos individuos dunha poboación é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal de 6 cm de desviación típica. Tómase unha mostra aleatoria de 225 individuos que dá unha media de 176 cm.

a) Obtén un intervalo de confianza, cun 99% de confianza, para a media da estatura da poboación.

b) Calcula o mínimo tamaño da mostra que se deberá tomar para estimar a estatura media dos individuos da poboación cun erro inferior a 1 cm e un nivel de confianza do 95%.

61. Nunha poboación normal con varianza coñecida, tomouse unha mostra de tamaño 49, calculouse a súa media e obtívose 4,2. Determina a varianza da poboación sabendo que o intervalo de confianza, ao 95%, é (3,64; 4,76) para a media da poboación.

62. Nunha poboación, unha variable aleatoria segue unha distribución normal de media descoñecida e desviación típica 20.

a) Se dunha mostra de tamaño 25 se observou que a media é 2 743, determina o intervalo de confianza, ao 90%, para a media da poboación.

b) Elixida unha mostra, a súa media foi 2 740. Construíuse un intervalo de confianza, ao 95%, que resultou ser (2 736,08; 2 743,92). Calcula cal era o tamaño da mostra.

63. Unha mostra aleatoria de 60 persoas ten unha media de 235 mg/dl (miligramos por decilitro) en medidas de colesterol. Supoñendo que a desviación típica da variable que mide as unidades de colesterol é υ = 28 mg/dl, pídese:

a) Que se calcule o intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 0,95, para a media da poboación.

b) Que se determine o tamaño da mostra necesario para reducir o intervalo de confianza anterior á metade.

64. Dúas variables aleatorias independentes x_1 e x_2 seguen unha distribución normal con media μ e desviación típica σ.

a) Que distribución ten a variable aleatoria $x_1 + x_2$?

b) Se $\mu = 15$ e $\sigma = \sqrt{8}$, calcula: $P(x_1 + x_2 > 28)$

65. Sexa un conxunto de catro bólas marcadas cos números 1, 3, 5 e 7.

a) Escribe todas as mostras de tamaño 2 que poderían formarse con esas bólas se a mostraxe se fai sen reposición. Calcula as medias dos números de cada mostra e atopa a media de todas as medias.

b) Fai o mesmo, pero supoñendo que a mostraxe se fai con reemprazamento.

c) Calcula a media dos valores das catro bólas. Con que coincide?

Paso a paso

Modificar o ancho dunha columna

Colócase o rato na cabeceira das columnas, entre a columna cuxo ancho se desexa modificar e a seguinte, e cando o cursor se transforma en ✛ *arrástrase*.

Para autoaxustar o ancho dunha columna ao seu contido, colócase o rato entre esta columna e a seguinte, e cando se transforma en ✛ faise dobre *clic*.

Opcións da barra de ferramentas formato que se empregarán

Negra
Combinar e centrar
Aumentar decimais
Diminuír decimais
Bordos
Cor de recheo
Cor de fonte

Sempre que haxa **decimais**, débense redondear a 2 ou 4 empregando **Diminuír decimais**.

66. As estaturas das socias e socios dun club teñen de media μ = 175 cm e desviación típica σ = 10 cm. Se se elixe unha mostra de 64 deles, cal é a probabilidade de que a media da mostra sexa menor ou igual ca 173 cm?

Solución:

a) Abre **Microsoft Excel** e na **Folla1** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado. Tes que combinar os rangos **A1:F1**, **A2:D2**, **A3:D3**, **A4:D4** e **A5:D5**, e poñerlle cores ao texto e ao fondo, bordos, etc.

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	175
3	Desviación típica da poboación				σ	10
4	Tamaño da mostra				n	64
5	Desviación típica da media da mostra				σ/√n	
6	k	μ	σ	Acumulado	P(z ≤ k)	P(z ≥ k)
7	173			1		
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \le z \le k_2)$
10					1	

b) Fai *clic* na cela **F5**, e escribe a fórmula:

=F3/RAIZ(F4)

e fai *clic* en **Introducir**; obtense: **1,25**

c) Na cela **B7** escribe: **=F2**

Na cela **C7** escribe: **=F5**

e copiaranse os valores da media e a desviación típica da mostra.

d) Repite o mesmo en **C10** e **D10**, respectivamente.

e) Na cela **E7** escribe:

=DISTR.NORM(A7;B7;C7;D7)

Obtense: **0,0548**

f) Na cela **F7** escribe: **=1 – E7**

Obtense: **0,9452**

g) En **F10**, escribe:

=DISTR.NORM(B10;C10;D10;E10) – DISTR.NORM(A10;C10;D10;E10)

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	175
3	Desviación típica da poboación				σ	10
4	Tamaño da mostra				n	64
5	Desviación típica da media da mostra				σ/√n	1,25
6	k	μ	σ	Acumulado	P(z ≤ k)	P(z ≥ k)
7	173	175	1,25	1	0,0548	0,9452
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	$P(k_1 \le z \le k_2)$
10			175	1,25	1	0

$$P(\overline{X} \le 173) = 0{,}0548$$

Garda o libro na túa carpeta co nome **2C12**.

67. Nunha mostra de 100 persoas obtívose que o peso medio é de 69 kg. Sabendo que a desviación típica da poboación é 8 kg, atopa o intervalo de confianza cun nivel de significación de 0,05 para a media da poboación.

Solución:

a) Na **Folla2** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado. Tes que combinar o rango **A1:G1**, poñerlle cores ao texto e ao fondo, bordos, etc.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	69	0,05	8	100			

b) Na cela **E3** escribe:

=INTERVALO.CONFIANZA(B3;C3;D3)

Obtense: **1,57**

c) Na cela F3 escribe: **=A3 – E3**

Obtense: **67,43**

d) Na cela **G3** escribe: **= A3 + E3**

Obtense: **70,57**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	69	0,05	8	100	1,57	67,43	70,57

A media da poboación está no intervalo (67,43; 70,57) cun 95% de probabilidade.

68. Queremos estimar as vendas diarias que se fan nunha tenda cun nivel de confianza do 90% e que o erro máximo da estimación sexa de 200 €. Calcula o número mínimo de días que debemos contabilizar as vendas, sabendo que a desviación típica é de 500 €.

Solución:

a) Na **Folla3** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k	
4	0,9			
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_\alpha/2$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8		500	200,00	

b) Fai *clic* na cela **B4** e escribe:

= (1 + A4)/2

Obtense: **0,95**

c) Na cela **C4** escribe:

=DISTR.NORM.ESTAND.INV(B4)

Obtense: **1,64**

d) Na cela **A8** escribe: **= C4**

Obtense: **1,64**

e) Na cela **D8** escribe: **= (A8*B8/C8)^2**

Obtense: **16,91**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k	
4	0,9	0,95	1,64	
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_\alpha/2$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8	1,64	500	200,00	16,91

Débese tomar unha mostra de 17 días para cometer un erro menor de 200 € cun nivel de confianza do 90%.

69. O 3% das pezas fabricadas por unha máquina son defectuosas. Cal é a probabilidade de que en 50 pezas o 2% ou menos sexan defectuosas?

Solución:

a) Copia a **Folla1**, na parte inferior esquerda no menú *Contextual* da ficha Folla1 **Folla do libro** elíxese **Mover ou copiar folla**… Na ventá **Mover ou Copiar** elíxese **(mover ao final)** e actívase a casa de verificación **Crear unha copia**. Cambia o título de **Folla1 (2)** polo de **Folla4**.

b) Modifica esta folla para que estea adaptada aos novos datos.

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das proporcións da mostra					
2	Proporción				p	0,03
3	Proporción				q	
4	Tamaño da mostra				n	50
5	Desviación típica da proporción da mostra				σ	
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(p \le k)$	$P(p \ge k)$
7	0,02			1		
8						
9	p_1	p_2	μ	σ	Acumulado	$P(p_1 \le z \le p_2)$
10					1	

c) Na cela **F3** escribe: **=1 – F2**

d) Na cela **F5** escribe: **=RAIZ(F2*F3/F4)**

A solución obtense en **E7** e é: **0,3392**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das proporcións da mostra					
2	Proporción				p	0,03
3	Proporción				q	0,97
4	Tamaño da mostra				n	50
5	Desviación típica da proporción da mostra				σ	0,024
6	k	μ	σ	Acumulado	$P(p \le k)$	$P(p \ge k)$
7	0,02	0,03	0,024	1	0,3392	0,6608
8						
9	p_1	p_2	μ	σ	Acumulado	$P(p_1 \le z \le p_2)$
10			0,03	0,024	1	0

70. Tomouse unha mostra de 40 oliveiras e contabilizáronse 18 delas con repilo (enfermidade producida por un fungo). Atopa o intervalo de confianza para a proporción de oliveiras con repilo na poboación cun nivel de confianza do 99%.

Solución:

a) Fai unha copia da **Folla3**, ponlle de nome **Folla5** e escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k						
4	0,99								
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_\alpha/2$	$z_\alpha/2 \cdot \alpha$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	40	18							

b) Na cela **C8** escribe: **=B8/A8**

Obtense: **0,45**

c) Na cela **D8** escribe: **=1 – C8**

Obtense: **0,55**

d) Na cela **E8** escribe: **=RAIZ(C8*D8/A8)**

e) Na cela **F8** escribe: **=C4**

Obtense: **2,58**

Na cela **G8** escribe: **=F8*E8**

Obtense: **0,20**

f) Na cela **H8** escribe: **=C8 – G8**

Obtense: **0,25**

g) Na cela **I8** escribe: **=C8 + G8**

Obtense: **0,65**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k						
4	0,99	0,995	2,58						
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_{\alpha}/2$	$z_{\alpha}/2 \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	40	18	0,45	0,55	0,08	2,58	0,20	0,25	0,65

A proporción da poboación está entre o 25 e o 65% cun 95% de probabilidade.

71. Sábese por unha enquisa piloto que a proporción de usuarias e usuarios que valora o uso dun modelo de ordenador é 0,45. Calcula o tamaño da mostra que debe tomarse para estimar cun nivel de confianza do 95% e erro máximo da estimación de 0,5%, a proporción de usuarios e usuarios que valoran o modelo de ordenador.

Solución:

a) Fai unha copia da **Folla3**, ponlle de nome **Folla6** e escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

1	Valor crítico para a proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico		
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k		
4	0,95				
5					
6	Tamaño da mostra para a proporción				
7	$k = z_{\alpha/2}$	p	q	Erro	Tamaño da mostra
8		0,45		0,005	

b) Na cela **C8** escribe: **=1–B8**

Obtense: **0,55**

c) Na cela **E8** escribe: **=A8^2*B8*C8/D8^2**

Obtense: **38 030,44**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E
1	Valor crítico para a proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico		
3	$1-\alpha$	$P(k \le z \le k) = 1-\alpha$	k		
4	0,95	0,975	1,96		
5					
6	Tamaño da mostra para a proporción				
7	$k = z_{\alpha/2}$	p	q	Erro	Tamaño da mostra
8	1,96	0,45	0,55	0,005	38030,44

Débese entrevistar a 38 031 persoas.

72. **Internet**. Abre: www.xerais.es e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Así funciona

Inserir follas

Para inserir unha folla nova elíxese na barra de menús **Inserir/Folla de cálculo**.

Seleccionar unha fila ou columna

Faise *clic* na letra ou número da cabeceira.

Seleccionar varias filas ou columnas

Faise *clic* na primeira letra ou número e *arrástrase* ata a última ou último.

Inserir filas ou columnas

Selecciónase a fila ou columna e no menú *Contextual* elíxese **Inserir**; a fila ou columna introdúcese diante da que se seleccionou. Cando se insire unha fila de datos, debe colocarse antes da última.

Mover follas

Para mover unha folla selecciónase na parte inferior, na barra de follas do libro, e *arrástrase* ao lugar correspondente.

Eliminar filas ou columnas

Selecciónanse e no menú *Contextual* elíxese **Eliminar**.

Introdución de fórmulas

Unha fórmula comeza sempre polo signo igual =.

=DISTR.NORM(k; μ; σ; 1) dá a probabilidade **P(x ≤ k)** nunha **N(μ, σ)**.

=DISTR.NORM.ESTAND.INV(p) dá o valor crítico para o nivel de confianza **1 – α**.

=INTERVALO.CONFIANZA(α; σ; n) dá o erro máximo admisible nun intervalo de confianza de nivel de significación α, desviación típica σ e tamaño da mostra **n**.

Practica

73. Unha empresa de transporte sabe que o peso medio dos paquetes que transporta é de 20 kg cunha desviación típica de 5 kg. Se nun dos seus transportes leva 50 paquetes, cal é a probabilidade de que o seu peso medio sexa maior ca 22 kg?

74. Nunhas eleccións un dos candidatos obtivo o 46% dos votos. Calcula a probabilidade de que nunha mostra de 200 votantes, elixida ao azar, saíse unha porcentaxe igual ou superior ao 50% ao seu favor.

75. O tempo que permanece cada paciente na consulta de certo médico é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal cunha desviación típica de 4 minutos. Tomouse unha mostra de 256 pacientes deste médico e atopouse que o seu tempo medio de consulta foi de 10 minutos. Calcula o intervalo de confianza, a un nivel do 95%, para o tempo medio de consulta que se deduce da mostra.

76. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas que viron un programa de televisión, 100 persoas recoñeceron que lles gustou. Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de persoas na poboación que lles gusta o programa.

77. Un laboratorio farmacéutico afirma que o número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar unha determinada enfermidade segue unha distribución normal con desviación típica igual a 8. Tómase unha mostra de 100 enfermos aos que se lles subministra o medicamento e obsérvase que a media de horas que tardan en curar é igual a 32.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, para a media do número de horas que tarda en curar o medicamento.

b) Se o nivel de significación é 0,05, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar para estimar o valor da media cun erro menor de 3 horas?

78. Un estudo realizado sobre 100 usuarias e usuarios revela que un automóbil percorre anualmente un promedio de 15 200 km cunha desviación típica de 2 250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, ao 99%, para a cantidade promedio de quilómetros percorridos.

b) Cal debe ser o tamaño mínimo da mostra para que o erro cometido non sexa superior a 500 km, con igual confianza?

79. Sábese que o peso dos bebés acabados de nacer nunha determinada poboación segue unha distribución normal de media 3 600 g e desviación típica 280 g. Tómase unha mostra ao azar de 196 destes bebés e calcúlase a media. Calcula cal é a probabilidade de que esta media estea entre 3 580 e 3 620 g.

80. Un fabricante de lámpadas sabe que a desviación típica da duración das lámpadas é de 100. Calcula o tamaño da mostra que se deberá someter a proba para ter unha confianza do 95% de que o erro da duración media que se calcule sexa menor que 10 h.

81. En certa poboación próxima a unha estación de esquí quérese estimar cun nivel de confianza do 95% a poboación de habitantes que practican este deporte. Tómase unha mostra de 400 habitantes da poboación, da que 240 afirman que practican esquí. Determina o correspondente intervalo de confianza.

82. Estímase que o tempo de reacción dun condutor ante un obstáculo imprevisto ten unha distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Se se quere conseguir que o erro de estimación da media non supere os 0,01 segundos cun nivel de confianza do 99%, que tamaño mínimo deberá ter a mostra de tempo de reacción?

83. Cun nivel de confianza igual a 0,95, a partir dun estudo da mostra, o intervalo de confianza da proporción de habitantes dunha comunidade que teñen ordenador portátil é:

$$[0{,}1804;\ 0{,}2196]$$

a) Cal é a proporción da mostra de habitantes desa comunidade que teñen ordenador portátil? Cal é o tamaño da mostra?

b) Cal debería ser o tamaño da mostra para estimar a citada proporción, cunha confianza do 95%, cun erro máximo de 0,01?

Paso a paso

Modificar o ancho dunha columna

Colócase o rato na cabeceira das columnas, entre a columna cuxo ancho se desexa modificar e a seguinte, e cando o cursor se transforma en ⇔ *arrástrase*.

Para autoaxustar o ancho dunha columna ao seu contido, colócase o rato entre esta columna e a seguinte, e cando se transforma en ⇔ faise dobre *clic*.

Opcións da barra de ferramentas formato que se empregarán

Negra
Combinar celas
Engadir decimal
Eliminar decimal
Bordos
Cor de recheo
Cor de fonte

Sempre que haxa **decimais**, débense redondear a 2 ou 4 empregando **Eliminar decimal**.

66. As estaturas das socias e socios dun club teñen de media μ = 175 cm e desviación típica σ = 10 cm. Se se elixe unha mostra de 64 deles, cal é a probabilidade de que a media da mostra sexa menor ou igual ca 173 cm?

Solución:

a) Abre **Calc** e na **Folla1** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado. Tes que combinar os rangos **A1:F1**, **A2:D2**, **A3:D3**, **A4:D4** e **A5:D5**, poñerlle cores ao texto e ao fondo, bordos, etc.

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	175
3	Desviación típica da poboación				σ	10
4	Tamaño da mostra				n	64
5	Desviación típica da media da mostra				σ/√n	
6	k	μ	σ	Acumulado	P(z ≤ k)	P(z ≥ k)
7	173			1		
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	P(k_1 ≤ z ≤ k_2)
10					1	

b) Fai *clic* na cela **F5**, e escribe a fórmula:

=F3/RAIZ(F4)

e fai *clic* en **Introducir**; obtense: **1,25**

c) Na cela **B7** escribe: **=F2**

Na cela **C7** escribe: **=F5**

e copiaranse os valores da media e a desviación típica da mostra.

d) Repite o mesmo en **C10** e **D10**, respectivamente.

e) Na cela **E7** escribe:

=DISTR.NORM(A7;B7;C7;D7)

Obtense: **0,0548**

f) Na cela **F7** escribe: **=1 – E7**

Obtense: **0,9452**

g) En **F10**, escribe:

=DISTR.NORM(B10;C10;D10;E10) – DISTR.NORM(A10;C10;D10;E10)

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das medias da mostra					
2	Media da poboación				μ	175
3	Desviación típica da poboación				σ	10
4	Tamaño da mostra				n	64
5	Desviación típica da media da mostra				σ/√n	1,25
6	k	μ	σ	Acumulado	P(z ≤ k)	P(z ≥ k)
7	173	175	1,25	1	0,0548	0,9452
8						
9	k_1	k_2	μ	σ	Acumulado	P(k_1 ≤ z ≤ k_2)
10			175	1,25	1	0,0000

$$P(\overline{X} \leq 173) = 0{,}0548$$

Garda o libro na túa carpeta co nome **2C12**.

67. Nunha mostra de 100 persoas obtívose que o peso medio é de 69 kg. Sabendo que a desviación típica da poboación é 8 kg, atopa o intervalo de confianza cun nivel de significación de 0,05 para a media da poboación.

Solución:

a) Na **Folla2** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado. Tes que combinar o rango **A1:G1**, poñerlle cores ao texto e ao fondo, bordos, etc.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	69	0,05	8	100			

b) Na cela **E3** escribe:

=INTERVALO.CONFIANZA(B3;C3;D3)

Obtense: **1,57**

c) Na cela F3 escribe:

=A3 – E3

Obtense: **67,43**

d) Na cela **G3** escribe:

=A3 + E3

Obtense: **70,57**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Intervalo de confianza para a media						
2	Media	Nivel de significación	σ	n	L. intervalo	Ext. inf.	Ext. sup.
3	69	0,05	8	100	1,57	67,43	70,57

A media da poboación está no intervalo (67,43; 70,57) cun 95% de probabilidade.

68. Queremos estimar as vendas diarias que se fan nunha tenda cun nivel de confianza do 90% e que o erro máximo da estimación sexa de 200 €. Calcula o número mínimo de días que debemos contabilizar as vendas, sabendo que a desviación típica é de 500 €.

Solución:

a) Na **Folla3** escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1 - \alpha$	$P(k \le z \le k) = 1 - \alpha$	k	
4	0,9			
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8		500	200,00	

a) Fai *clic* na cela **B4** e escribe:

=(1 + A4)/2

Obtense: **0,95**

b) Na cela **C4** escribe:

=DISTR.NORM.ESTAND.INV(B4)

Obtense: **1,64**

b) Na cela **A8** escribe:

=C4

Obtense: **1,64**

c) Na cela **D8** escribe:

=(A8*B8/C8)^2

Obtense: **16,91**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D
1	Valor crítico para a media			
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico	
3	$1 - \alpha$	$P(k \le z \le k) = 1 - \alpha$	k	
4	0,9	0,95	1,64	
5				
6	Tamaño da mostra para a media			
7	$k = z_{\alpha/2}$	σ	Erro	Tamaño da mostra
8	1,64	500	200,00	16,91

Débese tomar unha mostra de 17 días para cometer un erro menor de 200 € cun nivel de confianza do 90%.

69. O 3% das pezas fabricadas por unha máquina son defectuosas. Cal é a probabilidade de que en 50 pezas o 2% ou menos sexan defectuosas?

Solución:

a) Copia a **Folla1**, na parte inferior esquerda no menú *Contextual* da ficha Folla1 **Folla do libro** elíxese **Mover ou copiar folla**… Na ventá **Mover ou Copiar** elíxese **(mover ao final)** e actívase a casa de verificación **Crear unha copia**. Cambia o título de **Folla1 (2)** polo de **Folla4**.

b) Modifica esta folla para que estea adaptada aos novos datos.

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das proporcións da mostra					
2	Proporción				p	0,03
3	Proporción				q	
4	Tamaño da mostra				n	50
5	Desviación típica da proporción da mostra				σ	
6	k	µ	σ	Acumulado	$P(p \le k)$	$P(p \ge k)$
7	0,02			1		
8						
9	p_1	p_2	µ	σ	Acumulado	$P(p_1 \le z \le p_2)$
10					1	

c) Na cela **F3** escribe:

=1 – F2

d) Na cela **F5** escribe:

=RAIZ(F2*F3/F4)

A solución obtense en **E7** e é: **0,3392**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F
1	Distribución das proporcións da mostra					
2	Proporción				p	0,03
3	Proporción				q	0,97
4	Tamaño da mostra				n	50
5	Desviación típica da proporción da mostra				σ	0,024
6	k	µ	σ	Acumulado	$P(p \le k)$	$P(p \ge k)$
7	0,02	0,03	0,024	1	0,3392	0,6608
8						
9	p_1	p_2	µ	σ	Acumulado	$P(p_1 \le z \le p_2)$
10			0,03	0,024	1	0

70. Tomouse unha mostra de 40 oliveiras e contabilizáronse 18 delas con repilo (enfermidade producida por un fungo). Atopa o intervalo de confianza para a proporción de oliveiras con repilo na poboación cun nivel de confianza do 99%.

Solución:

a) Fai unha copia da **Folla3**, ponlle de nome **Folla5** e escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	$1 - \alpha$	$P(k \le z \le k) = 1 - \alpha$	k						
4	0,99								
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_{\alpha/2}$	$z_{\alpha/2} \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	40	18							

b) Na cela **C8** escribe:

=B8/A8

Obtense: **0,45**

c) Na cela **D8** escribe: **=1 – C8**

Obtense: **0,55**

d) Na cela **E8** escribe:

=RAIZ(C8*D8/A8)

e) Na cela **F8** escribe: **=C4**

Obtense: **2,58**

Na cela **G8** escribe:

=F8*E8

Obtense: **0,20**

f) Na cela **H8** escribe:

=C8 – G8

Obtense: **0,25**

g) Na cela **I8** escribe:

=C8 + G8

Obtense: **0,65**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Valor crítico para a proporción								
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico						
3	1 – α	P(k ≤ z ≤ k) = 1 – α	k						
4	0,99	0,995	2,58						
5									
6	Intervalo de confianza para a proporción								
7	n	Éxitos	p	q	σ	$z_{\alpha/2}$	$z_{\alpha/2} \cdot \sigma$	Ext. Inf.	Ext. Sup.
8	40	18	0,45	0,55	0,08	2,58	0,20	0,25	0,65

A proporción da poboación está entre o 25 e o 65% cun 95% de probabilidade.

71. Sábese por unha enquisa piloto que a proporción de usuarias e usuarios que valora o uso dun modelo de ordenador é 0,45. Calcula o tamaño da mostra que debe tomarse para estimar cun nivel de confianza do 95% e erro máximo da estimación de 0,5%, a proporción de usuarios e usuarias que valoran o modelo de ordenador.

Solución:

a) Fai unha copia da **Folla3**, ponlle de nome **Folla6** e escribe os datos iniciais que se dan no enunciado.

	A	B	C	D	E
1	Valor crítico para a proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico		
3	1 – α	P(k ≤ z ≤ k) = 1 – α	k		
4	0,95				
5					
6	Tamaño da mostra para a proporción				
7	k = $z_{\alpha/2}$	p	q	Erro	Tamaño da mostra
8		0,45		0,005	

b) Na cela **C8** escribe: **=1–B8**

Obtense: **0,55**

c) Na cela **E8** escribe:

=A8^2*B8*C8/D8^2

Obtense: **38 030,44**

A folla de cálculo con todas as solucións é:

	A	B	C	D	E
1	Valor crítico para a proporción				
2	Nivel de confianza	Probabilidade	Valor crítico		
3	1 – α	P(k ≤ z ≤ k) = 1 – α	k		
4	0,95	0,98	1,96		
5					
6	Tamaño da mostra para a proporción				
7	k = $z_{\alpha/2}$	p	q	Erro	Tamaño da mostra
8	1,96	0,45	0,55	0,005	38030,44

Débese entrevistar a 38 031 persoas.

72. **Internet**. Abre: www.xerais.es e elixe **Matemáticas**, **curso** e **tema**.

Así funciona

Inserir follas

Para inserir unha folla nova elíxese na barra de menús **Inserir/Folla de cálculo**.

Seleccionar unha fila ou columna

Faise *clic* na letra ou número da cabeceira.

Seleccionar varias filas ou columnas

Faise *clic* na primeira letra ou número e *arrástrase* ata a última ou último.

Inserir filas ou columnas

Selecciónase a fila ou columna e no menú *Contextual* elíxese **Inserir**; a fila ou columna introdúcese diante da que se seleccionou. Cando se insire unha fila de datos, debe colocarse antes da última.

Mover follas

Para mover unha folla selecciónase na parte inferior, na barra de follas do libro, e *arrástrase* ao lugar correspondente.

Eliminar filas ou columnas

Selecciónanse e no menú *Contextual* elíxese **Eliminar**.

Introdución de fórmulas

Unha fórmula comeza sempre polo signo igual =.

=DISTR.NORM(k; μ; σ; 1) dá a probabilidade **P(x ≤ k)** nunha **N(μ, σ)**.

=DISTR.NORM.ESTAND.INV(p) dá o valor crítico para o nivel de confianza **1 – α**.

=INTERVALO.CONFIANZA(α; σ; n) dá o erro máximo admisible nun intervalo de confianza de nivel de significación α, desviación típica σ e tamaño da mostra **n**.

Practica

73. Unha empresa de transporte sabe que o peso medio dos paquetes que transporta é de 20 kg cunha desviación típica de 5 kg. Se nun dos seus transportes leva 50 paquetes, cal é a probabilidade de que o seu peso medio sexa maior ca 22 kg?

74. Nunhas eleccións un dos candidatos obtivo o 46% dos votos. Calcula a probabilidade de que nunha mostra de 200 votantes, elixida ao azar, saíse unha porcentaxe igual ou superior ao 50% ao seu favor.

75. O tempo que permanece cada paciente na consulta de certo médico é unha variable aleatoria que segue unha distribución normal cunha desviación típica de 4 minutos. Tomouse unha mostra de 256 pacientes deste médico e atopouse que o seu tempo medio de consulta foi de 10 minutos. Calcula o intervalo de confianza, a un nivel do 95%, para o tempo medio de consulta que se deduce da mostra.

76. Nunha mostra aleatoria de 400 persoas que viron un programa de televisión, 100 persoas recoñeceron que lles gustou. Determina o intervalo de confianza, ao 95%, para a proporción de persoas na poboación que lles gusta o programa.

77. Un laboratorio farmacéutico afirma que o número de horas que un medicamento de fabricación propia tarda en curar unha determinada enfermidade segue unha distribución normal con desviación típica igual a 8. Tómase unha mostra de 100 enfermos aos que se lles subministra o medicamento e obsérvase que a media de horas que tardan en curar é igual a 32.

a) Atopa un intervalo de confianza, cun nivel de confianza do 99%, para a media do número de horas que tarda en curar o medicamento.

b) Se o nivel de significación é 0,05, cal é o tamaño da mostra que habería que considerar para estimar o valor da media cun erro menor de 3 horas?

78. Un estudo realizado sobre 100 usuarias e usuarios revela que un automóbil percorre anualmente un promedio de 15 200 km cunha desviación típica de 2 250 km.

a) Determina un intervalo de confianza, ao 99%, para a cantidade promedio de quilómetros percorridos.

b) Cal debe ser o tamaño mínimo da mostra para que o erro cometido non sexa superior a 500 km, con igual confianza?

79. Sábese que o peso dos bebés acabados de nacer nunha determinada poboación segue unha distribución normal de media 3 600 g e desviación típica 280 g. Tómase unha mostra ao azar de 196 destes bebés e calcúlase a media. Calcula cal é a probabilidade de que esta media estea entre 3 580 e 3 620 g.

80. Un fabricante de lámpadas sabe que a desviación típica da duración das lámpadas é de 100. Calcula o tamaño da mostra que se deberá someter a proba para ter unha confianza do 95% de que o erro da duración media que se calcule sexa menor que 10 h.

81. En certa poboación próxima a unha estación de esquí quérese estimar cun nivel de confianza do 95% a poboación de habitantes que practican este deporte. Tómase unha mostra de 400 habitantes da poboación, da que 240 afirman que practican esquí. Determina o correspondente intervalo de confianza.

82. Estímase que o tempo de reacción dun condutor ante un obstáculo imprevisto ten unha distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Se se quere conseguir que o erro de estimación da media non supere os 0,01 segundos cun nivel de confianza do 99%, que tamaño mínimo deberá ter a mostra de tempo de reacción?

83. Cun nivel de confianza igual a 0,95, a partir dun estudo da mostra, o intervalo de confianza da proporción de habitantes dunha comunidade que teñen ordenador portátil é:

$$[0{,}1804;\ 0{,}2196]$$

a) Cal é a proporción da mostra de habitantes desa comunidade que teñen ordenador portátil? Cal é o tamaño da mostra?

b) Cal debería ser o tamaño da mostra para estimar a citada proporción, cunha confianza do 95%, cun erro máximo de 0,01?