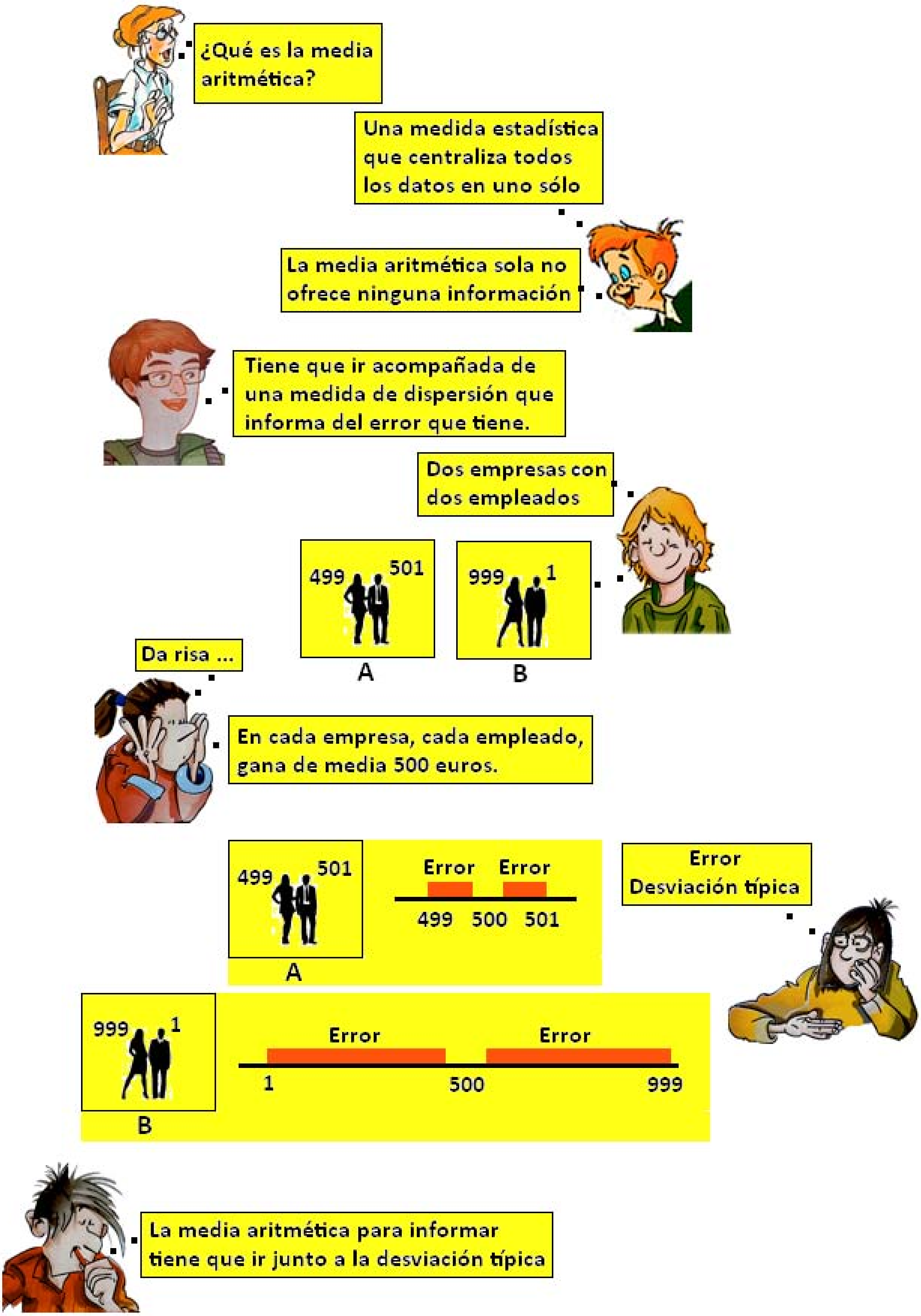
CÓMIC DE INFERENCIA ESTADÍSTICA

BACHILLERATO


¿Qué es la media aritmética?
Una medida estadística que centraliza todos los datos en uno sólo
La media aritmética sola no ofrece ninguna información
Tiene que ir acompañada de una medida de dispersión que informa del error que tiene.
Dos empresas con dos empleados
499 501
A
999 1
B
Da risa ...
En cada empresa, cada empleado, gana de media 500 euros.
499 501
A
Error Error
499 500 501
Error
Desviación típica
999 1
B
Error Error
1 500 999
La media aritmética para informar tiene que ir junto a la desviación típica

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
4	2	8	32
5	9	45	225
7	3	21	147
8	6	48	384
	20	122	788

Media aritmética y desviación típica con datos agrupados

2 alumnos con 4
9 alumnos con 5
3 alumnos con 7
6 alumnos con 8

$$a_1 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot n_i = \frac{122}{20} = 6,1$$

$$a_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 \cdot n_i = \frac{788}{20} = 39,4$$

$$\sigma^2 = a_2 - a_1^2 = a_2 - (\bar{x})^2 = 39,4 - 6,1^2 = 2,19 \text{ (unidades al cuadrado, varianza)}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,19} = 1,48 \text{ (unidades de la media, desviación típica)}$$

Las notas de los 20 alumnos se encuentran entre $\left[\bar{x} \pm \sigma\right]$

En el intervalo $\left[6,1 \pm 1,48\right] \equiv \left[6,1 - 1,48 \ , \ 6,1 + 1,48\right] = \left[4,62 \ , \ 7,58\right]$

La Estadística Descriptiva se encarga de analizar una muestra y calcular los estadísticos.

Estadísticos importantes son: media aritmética $(\bar{x})$, varianza (σ^2), desviación típica (σ) y cuasidesviación típica o desviación estándar (s)

La cuasivarianza (s^2) no la utilizas, aunque viene en tu calculadora. Es muy importante en Inferencia Estadística, la desviación estándar o cuasidesviación típica (s) es imprescindible para generalizar en la población los resultados de la media aritmética $(\bar{x})$ de la muestra.

Inferir es Predecir

Cuasivarianza
Cuasidesviación típica

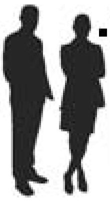
$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = a_2 - a_1^2 = a_2 - (\bar{x})^2 \quad \text{(varianza)}$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i \quad \text{(cuasivarianza)}$$

$$s = \sqrt{s^2} \quad \text{(cuasidesviación típica)}$$

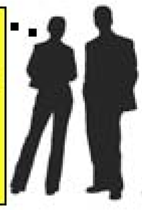
$$N \cdot \sigma^2 = (N-1) \cdot s^2$$

Por el Teorema Central del Límite: Cuando en una distribución de datos (muestra de tamaño n) , el tamaño n tiende a ser grande, se aproxima a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$



Con los estadísticos $(\bar{x}, \sigma_x)$ se obtienen los parámetros de la población (μ, σ)

Sí la población sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$ se obtiene la distribución de la media muestral $\bar{x} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$



El error que se comete al perder información originan los Intervalos de Confianza

Población $N(\mu, \sigma)$

Muestra:
Estadísticos
$n, \bar{x}, \sigma_x$

Al extender el valor de la media muestral $\bar{x}$ para toda la población (con media μ) se pierde información. La media muestral $\bar{x}$ es un estimador insesgado de la media poblacional μ.

El intervalo de confianza para la media de la población μ se expresa mediante:

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \Big[\overbrace{\bar{x}}^{\text{media muestral}} \pm \overbrace{z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\text{error estimación}}\Big]$$

$$\in = z_{z_{\alpha/2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{(error estimación)}$$

L = longitud o amplitud

$$L = \left[\left(\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] = 2\in$$

$\alpha \equiv$ Nivel de significación (error en la predicción)

$1-\alpha \equiv$ Nivel de confianza (fiabilidad)

Intervalos para la media de la población

Intervalo de confianza para la media de la población μ con varianza poblacional σ^2 conocida

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$n \,.\, \sigma_x^2 = (n-1) \,.\, s_x^2$$

Muestras grandes $n > 30$

Intervalo de confianza para la media de la población μ con varianza poblacional σ^2 desconocida

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \left[\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} \right] = \left[\bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s_x}{\sqrt{n}} \right]$$

Cuando ocurre el caso contrario,
se conoce la distribución de la población $N(\mu, \sigma)$
y se quiere conocer la distribución de la media muestral $\bar{x}$.

Teorema de Fisher: $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

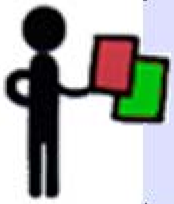
Población $N(\mu, \sigma)$

Muestra:
Estadísticos
$n, \bar{x}, \sigma_x$

Cuando la muestra estudia una variable dicotómica (ocurre un cosa y la contraria)

Binomial $B(n, p)$
$n \equiv$ Tamaño de la muestra
$p \equiv$ Probabilidad de éxito

La característica en estudio de la muestra sigue una distribución binomial



Población $B(n, p)$

Muestra:
Estadísticos
n, p_x, q_x

Intervalo de confianza para el parámetro poblacional p de una distribución binomial $B(n, p)$

$$I_{1-\alpha}(p) = \left[p_x + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_x \,.\, q_x}{n}} \right]$$

$n \equiv$ Tamaño de la muestra
$p_x \equiv$ Probabilidad de éxito en la muestra
$q_x \equiv$ Probabilidad de fracaso en la muestra

Al contrario, distribución del parámetro muestral p_x, conocida la distribución binomial de la población B(n, p)

$$X \approx B(n,p) \;\rightarrow\; N\left(n.p\,,\,\sqrt{n.p.q}\right)$$

Muestra:
Estadísticos
$n\,,\,p_x\,,\,q_x$

$$p_x \sim N\left(p\,,\,\sqrt{\frac{p.q}{n}}\right)$$

Discretas
Continuas

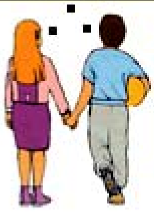
Variable aleatoria Discreta

Solo puede tomar un número finito de valores dentro de un intervalo.

Variable aleatoria Continua

Puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Distribuciones de variable aleatoria Discreta



Uniforme	Poisson
Bernouilli	Polinomial
Binomial	Hipergeométrica

La distribución Binomial se aproxima a una Poisson cuando $n.p > 5$ y $p < 0{,}1$

La distribución de Poisson es muy importante, origina los Procesos de Poisson y Líneas de Espera.

Distribución Binomial

B(n, p)

La distribución Binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernouili independientes entre sí, con una probabilidad fija de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Distribución Binomial

B(n, p)

La distribución Binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernouili independientes entre sí, con una probabilidad fija de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

X = "número de veces que ocurre el suceso A (éxito) en las n pruebas"

$$P(X = k \text{ éxitos}) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k} \quad \text{donde} \quad p + q = 1$$

La media, varianza y desviación típica:

$$\mu_x = n.p \quad \sigma_x^2 = n.p.q \quad \sigma_x = \sqrt{n.p.q}$$

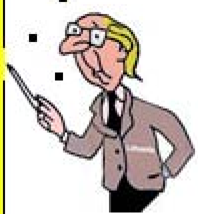
Binomial B(n, p)

En la calculadora nCr

La distribución binomial tiene la propiedad reproductiva: respecto al parámetro n:

Sí $X \sim B(n_1, p)$ e $Y \sim B(n_2, p)$ que son variables aleatorias independientes, entonces: $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

Transformación de la distribución Binomial en una Normal



Sí X es una variable binomial de parámetros *n* y *p*, cuando $n.p > 5$ y $p \leq 0,5$, la distribución Binomial B(n, p) se aproxima a una distribución normal $N\left(n.p, \sqrt{n.p.q}\right)$

Por tanto, la variable

$$z = \frac{X - n.p}{\sqrt{n.p.q}} \text{ es } N(0, 1) \quad \text{(Teorema de Moivre)}$$

Corrección continuidad

Para utilizar correctamente la transformación de una variable discreta X (con distribución binomial) en una variable continua Z (con distribución normal) es necesario hacer una corrección de continuidad.

$$P(X=a)\ =P(a-0,5\leq X^{\bullet}\leq a+0,5)$$

$$P(a<X<b)=P(a+0,5\leq X^{\bullet}\leq b-0,5)$$

$$P(a\leq X\leq b)=P(a-0,5\leq X^{\bullet}\leq b+0,5)$$

$$P(X\leq b)=P(X^{\bullet}\leq b+0,5)$$

$$P(X\geq a)=P(X^{\bullet}\leq a-0,5)$$

Distribución Normal

La distribución normal es la distribución de una variable aleatoria continua.
Es la más importante.

Las distribuciones continuas son:
Distribución uniforme
Distribución normal
Distribución t de Student
Distribución Chi-cuadrado

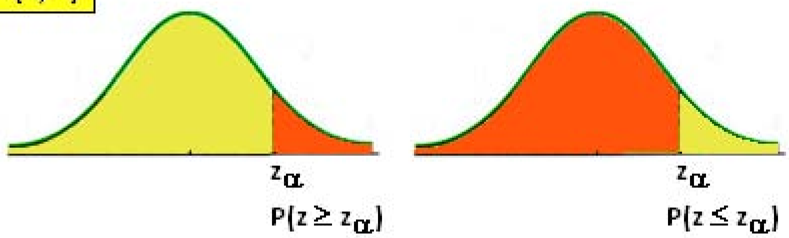
Hay muchas distribuciones $N(\mu, \sigma)$

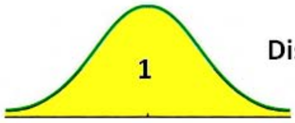
Todas ellas se llevan a una distribución N(0, 1)

Este proceso se llama tipificar
Sí la variable X es $N(\mu, \sigma)$
La nueva variable $z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$
sigue una distribución N(0, 1)

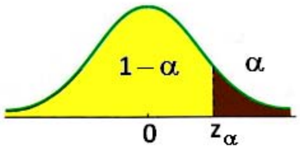
La variable aleatoria Normal es reproductiva respecto de su dos parámetros μ, σ
Sí $X\sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $Y\sim N(\mu_2, \sigma_2)$ son variables aleatorias independientes, entonces:

$$X\pm Y\sim N\left(\mu_1\pm\mu_1,\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$$

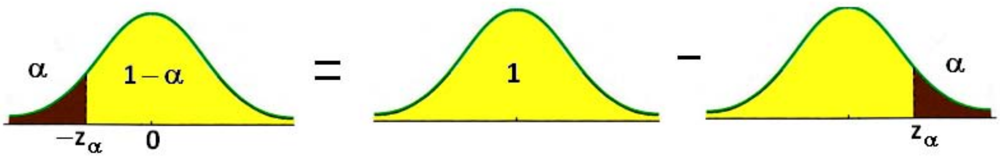




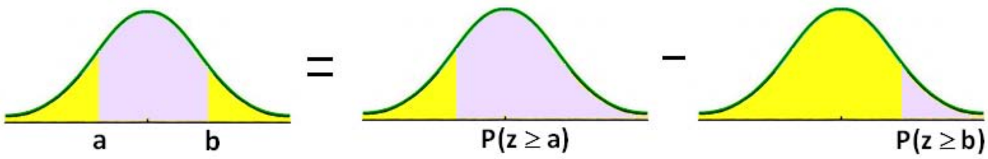
Distribución normal $N(0,1)$



$P(z \geq z_\alpha) = \alpha$



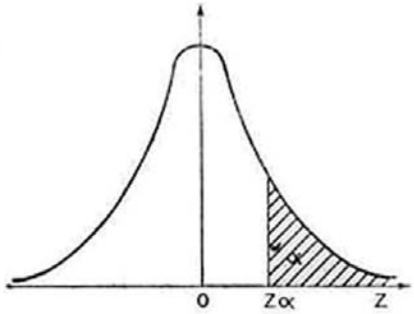
$P(z \geq -z_\alpha) = P(z \leq z_\alpha) = 1 - P(z \geq z_\alpha) = 1 - \alpha$



$P(a \leq z \leq b) = P(z \geq a) - P(z \geq b)$

Distribución normal $N(0, 1)$

$$\int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = \alpha$$

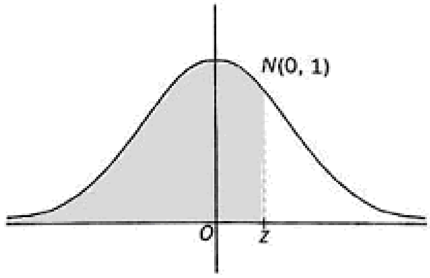


z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00256	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

z_α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,00135	$0{,}0^{3}968$	$0{,}0^{3}687$	$0{,}0^{3}483$	$0{,}0^{3}337$	$0{,}0^{3}233$	$0{,}0^{3}159$	$0{,}0^{3}108$	$0{,}0^{4}723$	$0{,}0^{4}481$
4	$0{,}0^{4}317$	$0{,}0^{4}207$	$0{,}0^{4}133$	$0{,}0^{5}854$	$0{,}0^{5}541$	$0{,}0^{5}340$	$0{,}0^{5}211$	$0{,}0^{5}130$	$0{,}0^{6}793$	$0{,}0^{8}479$
5	$0{,}0^{6}287$	$0{,}0^{6}170$	$0{,}0^{7}996$	$0{,}0^{7}579$	$0{,}0^{7}333$	$0{,}0^{7}190$	$0{,}0^{7}107$	$0{,}0^{8}599$	$0{,}0^{8}332$	$0{,}0^{8}182$
6	$0{,}0^{9}987$	$0{,}0^{9}530$	$0{,}0^{9}282$	$0{,}0^{9}149$	$0{,}0^{10}777$	$0{,}0^{10}402$	$0{,}0^{10}206$	$0{,}0^{10}104$	$0{,}0^{11}523$	$0{,}0^{11}260$

DISTRIBUCIÓN NORMAL $N(0, 1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	$1-\frac{\alpha}{2}$
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	$1-\frac{\alpha}{2}$
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	$1-\frac{\alpha}{2}$
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	$1-\frac{\alpha}{2}$
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	$1-\frac{\alpha}{2}$
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	$1-\frac{\alpha}{2}$
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	$1-\frac{\alpha}{2}$
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	$1-\frac{\alpha}{2}$
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

1. Un técnico realiza un test de cien ítems a unos doscientos opositores. Suponiendo que las puntuaciones X obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos. Se pide obtener:

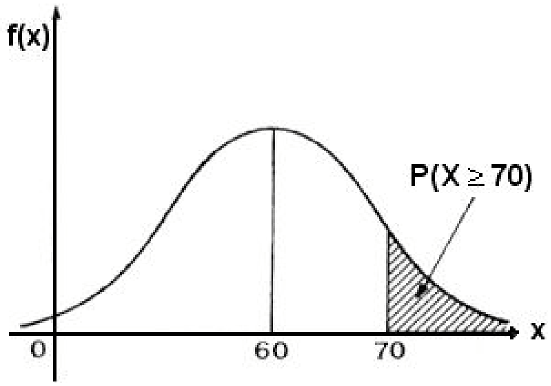
1) $P(X \geq 70)$	2) $P(X \leq 80)$	3) $P(X \leq 30)$
4) $P(X \geq 46)$	5) $P(39 \leq X \leq 80)$	6) $P(80 \leq X \leq 82{,}5)$
7) $P(30 \leq X \leq 40)$	8) $P(\lvert X-60 \rvert \leq 20)$	9) $P(\lvert X-60 \rvert \geq 20)$

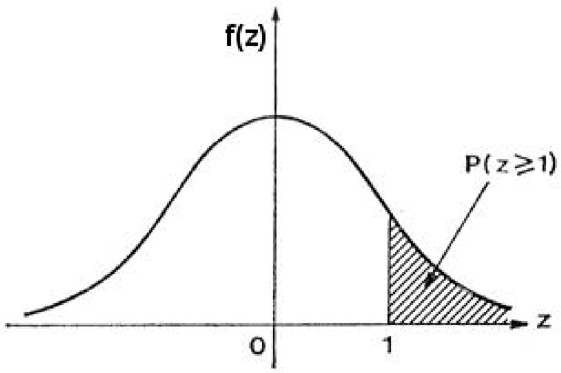
10) Número de opositores que obtuvieron 70 puntos

Solución:

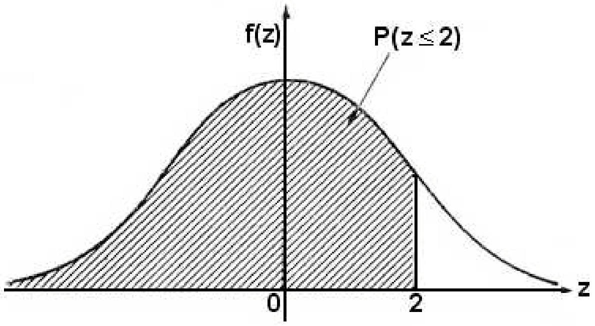
La variable aleatoria X = 'puntuación obtenida en el test' sigue una distribución $N(60, 10)$, luego su variable tipificada será $z = \dfrac{X-60}{10}$ con distribución normal $N(0, 1)$

$$1)\ P(X \geq 70) = P\left[\frac{X-60}{10} \geq \frac{70-60}{10}\right] = P\left[z \geq 1\right] = 0{,}1587$$

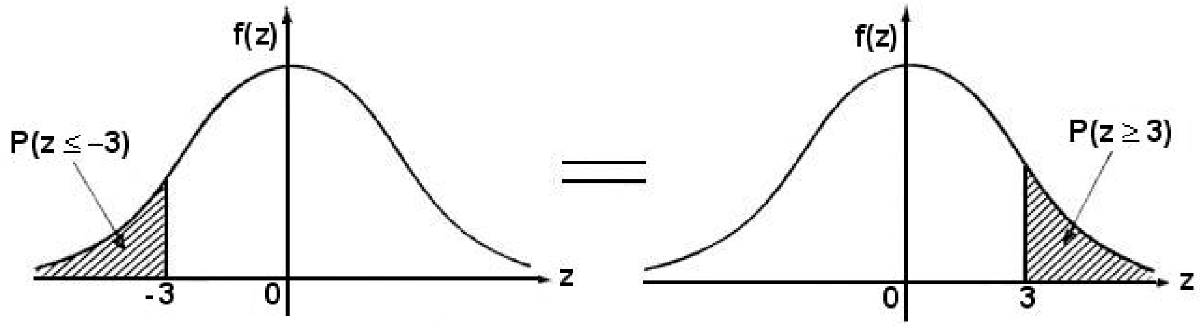




$$2)\ P(X \leq 80) = P\left[\frac{X-60}{10} \leq \frac{80-60}{10}\right] = P\left[z \leq 2\right] = 1 - P\left[z \geq 2\right] = 1 - 0{,}0288 = 0{,}9772$$

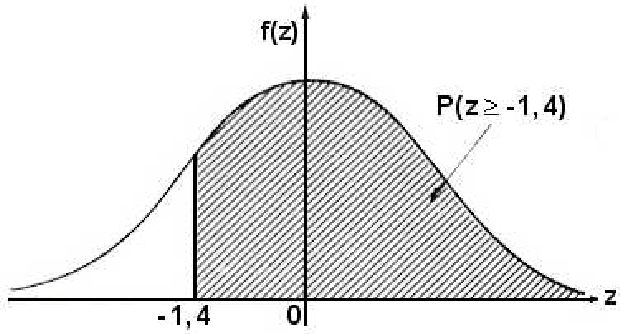


3) $P(X \le 30) = P\left[\frac{X-60}{10} \le \frac{30-60}{10}\right] = P\left[z \le -3\right] = P\left[z \ge 3\right] = 0,00135$



4) $P(X \ge 46) = P\left[\frac{X-60}{10} \ge \frac{46-60}{10}\right] = P\left[z \ge -1,4\right] = P\left[z \le 1,4\right] = 1 - P\left[z \ge 1,4\right] =$

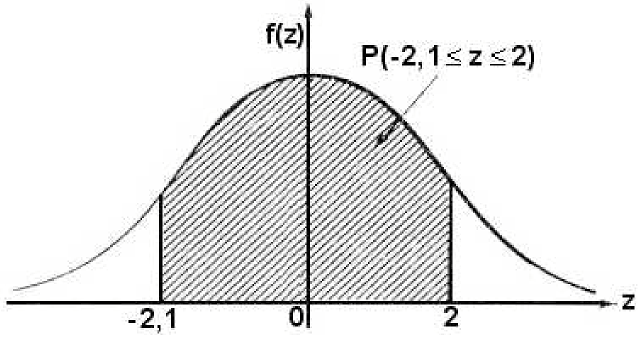
$= 1 - 0,0808 = 0,9192$



5) $P(39 \le X \le 80) = P\left[\frac{39-60}{10} \le \frac{X-60}{10} \le \frac{80-60}{10}\right] = P\left[-2,1 \le z \le 2\right] =$

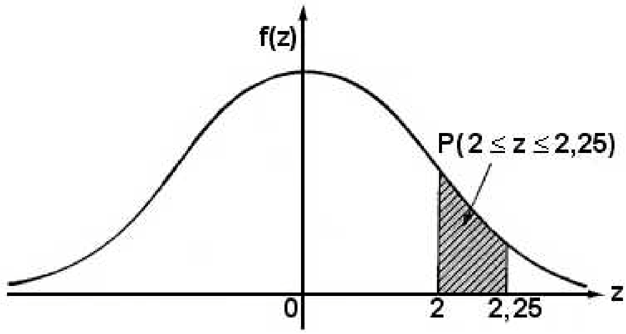
$= P\left[z \ge -2,1\right] - P\left[z \ge 2\right] = P\left[z \le 2,1\right] - P\left[z \ge 2\right] = 1 - P\left[z \ge 2,1\right] - P\left[z \ge 2\right] =$

$= 1 - 0,0179 - 0,0228 = 0,9593$



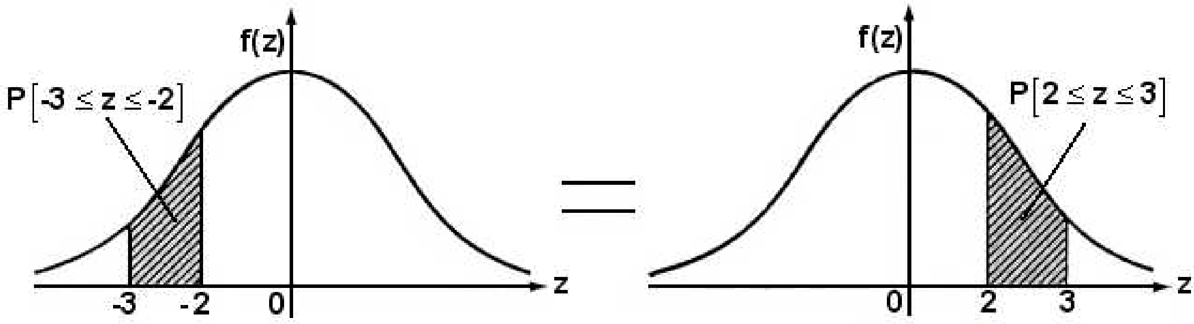
6) $P(80 \le X \le 82{,}5) = P\left[\frac{80-60}{10} \le \frac{X-60}{10} \le \frac{82{,}5-60}{10}\right] = P[2 \le z \le 2{,}25] =$

$= P[z \ge 2] - P[z \ge 2{,}25] = 0{,}0228 - 0{,}0122 = 0{,}0106$



7) $P(30 \le X \le 40) = P\left[\frac{30-60}{10} \le \frac{X-60}{10} \le \frac{40-60}{10}\right] = P[-3 \le z \le -2] = P[2 \le z \le 3] =$

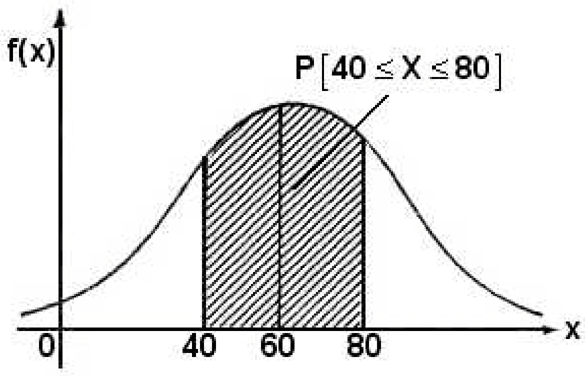
$= P[z \ge 2] - P[z \ge 3] = 0{,}0228 - 0{,}00135 = 0{,}02145$

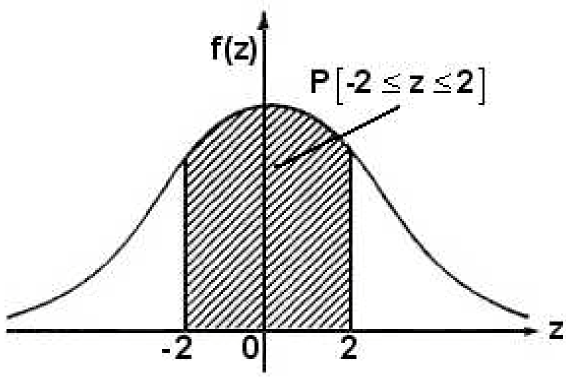


8) $P(|X-60| \le 20) = P[-20 \le X-60 \le 20] = P[40 \le X \le 80] =$

$= P\left[\frac{40-60}{10} \le \frac{X-60}{10} \le \frac{80-60}{10}\right] = P[-2 \le z \le 2] = P[z \ge -2] - P[z \ge 2] =$

$= P[z \le 2] - P[z \ge 2] = 1 - P[z \ge 2] - P[z \ge 2] == 1 - 2.P[z \ge 2] = 1 - 2.0{,}0228 = 0{,}9544$

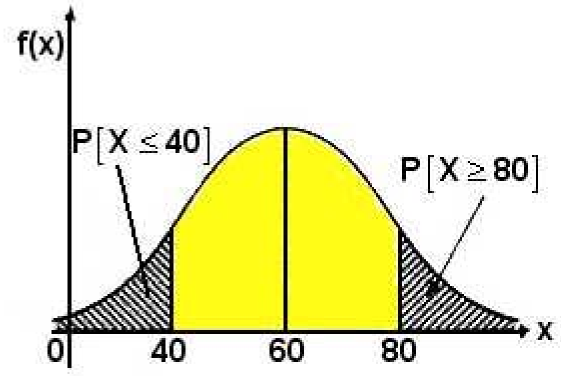


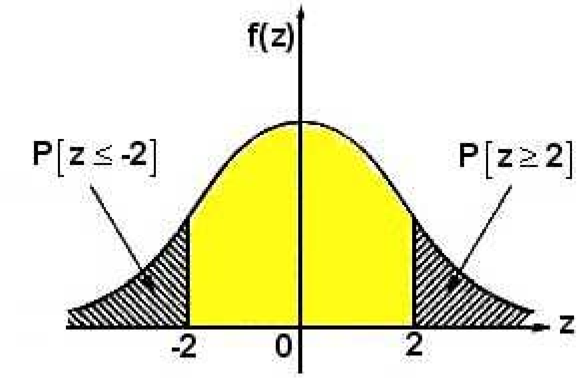


9) $|X-60| \geq 20 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X-60 \geq 20 \\ X-60 \leq -20 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X \geq 80 \\ X \leq 40 \end{cases}$

$$P\big[|X-60| \geq 20\big] = P\big[X \geq 80\big] + P\big[X \leq 40\big] = P\left[\frac{X-60}{10} \geq \frac{80-60}{10}\right] + P\left[\frac{X-60}{10} \leq \frac{40-60}{10}\right] =$$

$$= P\big[z \geq 2\big] + P\big[z \leq -2\big] = 2.P\big[z \geq 2\big] = 2.0,0228 = 0,0456$$





10) $P\big[X \geq 70\big] = 0,1587$

En consecuencia el 15,87% de los opositores obtuvieron una puntuación superior a 70, esto es, aproximadamente 32 opositores.

2 . El tiempo empleado, en horas, en hacer un determinado producto sigue una distribución N(10, 2) . Se pide la probabilidad de que ese producto se tarde en hacer:

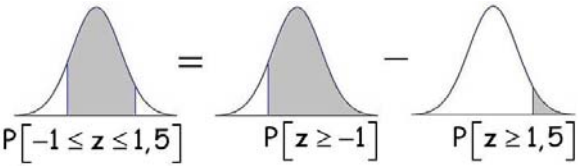
a) Menos de 7 horas

b) Entre 8 y 13 horas

Solución:

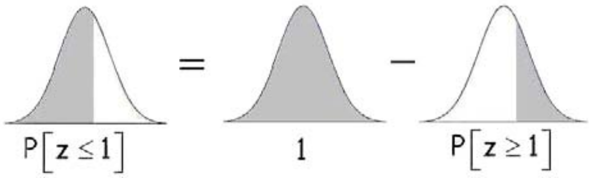
a) $$P\left[x<7\right] \underset{\text{tipificando}}{=} P\left[\frac{x-10}{2}<\frac{7-10}{2}\right]=P\left[z<-1,5\right]=P\left[z>1,5\right]=0,0668$$

b) $$P\left[8\le x\le 13\right] \underset{\text{tipificando}}{=} P\left[\frac{8-10}{2}\le\frac{x-10}{2}\le\frac{13-10}{2}\right]=P\left[-1\le z\le 1,5\right]$$



$$P\left[-1\le z\le 1,5\right]=P\left[z\ge -1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]$$

$$P\left[-1\le z\le 1,5\right]=P\left[z\ge -1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]=P\left[z\le 1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]$$



$$P\left[z\le 1\right]=1-P\left[z\ge 1\right]$$

$$P\left[-1\le z\le 1,5\right]=P\left[z\ge -1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]=P\left[z\le 1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]=1-P\left[z\ge 1\right]-P\left[z\ge 1,5\right]=$$
$$=1-0,1587-0,0668=0,7745$$

3. El peso (en gramos) de las cajas de cereales de una determinada marca sigue una distribución $N(\mu, 5)$. Se han tomado los pesos de 16 cajas seleccionadas aleatoriamente, y los resultados obtenidos han sido:

506, 508, 499, 503, 504, 510, 497, 512, 514, 505, 493, 496, 506, 502, 509, 496.

a) Obtener los intervalos de confianza del 90%, 95% y 99% para la media poblacional.
b) Determinar cuál sería el tamaño muestral necesario para conseguir, con un 95% de confianza, un intervalo de longitud igual a 2 gramos.

Solución:

a) Se trata de construir un intervalo de confianza para la media poblacional μ de varianza conocida $\sigma^2 = 25$. El intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ viene dado por:

$$I_{1-\alpha}(\mu) = \Big[\overbrace{\bar{x}}^{\text{media muestral}} \pm \overbrace{z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\text{error estimación}}\Big]$$

$$\begin{cases} L_{1-\alpha} = 2 \,.\, z_{\alpha/2} \,.\, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; n = \left(\dfrac{2 \,.\, z_{\alpha/2} \,.\, \sigma}{L_{1-\alpha}}\right)^2 \\ L = \text{longitud o amplitud} \qquad \text{Error estimación } \epsilon = z_{z_{\alpha/2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i = 503{,}75$$

$$\begin{cases} 1-\alpha = 0{,}90 & \alpha = 0{,}10 & \alpha/2 = 0{,}05 & z_{0{,}05} = 1{,}645 \\ 1-\alpha = 0{,}95 & \alpha = 0{,}05 & \alpha/2 = 0{,}025 & z_{0{,}025} = 1{,}96 \\ 1-\alpha = 0{,}99 & \alpha = 0{,}01 & \alpha/2 = 0{,}005 & z_{0{,}005} = 2{,}575 \end{cases}$$

A medida que el nivel de confianza es mayor, aumenta longitud del intervalo.

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Los intervalos de confianza solicitados serán:

$$I_{0{,}90}(\mu) = \left[503{,}75 \pm 1{,}645\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = \left[503{,}75 - 1{,}645\frac{5}{\sqrt{16}}\,,\; 503{,}75 + 1{,}645\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = [501{,}69\,,\;505{,}81]$$

$$I_{0{,}95}(\mu) = \left[503{,}75 \pm 1{,}96\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = \left[503{,}75 - 1{,}96\frac{5}{\sqrt{16}}\,,\; 503{,}75 + 1{,}96\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = [501{,}30\,,\;506{,}20]$$

$$I_{0{,}99}(\mu) = \left[503{,}75 \pm 2{,}575\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = \left[503{,}75 - 2{,}575\frac{5}{\sqrt{16}}\,,\; 503{,}75 + 2{,}575\frac{5}{\sqrt{16}}\right] = [500{,}53\,,\;506{,}97]$$

Longitud de cada uno de los intervalos de confianza:

$$L_{0{,}90}(\mu) = 505{,}81 - 501{,}69 = 4{,}12$$
$$L_{0{,}95}(\mu) = 506{,}20 - 501{,}30 = 4{,}9$$
$$L_{0{,}99}(\mu) = 506{,}97 - 500{,}53 = 6{,}44$$

b) La amplitud o longitud vendrá dado por la fórmula: $I_{1-\alpha}(\mu) = \left[\overline{x} \pm z_{\alpha/2}\dfrac{s_x}{\sqrt{n}}\right]$

$$\begin{pmatrix}\text{Amplitud o}\\ \text{Longitud}\end{pmatrix} = \left(\overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\,.\,z_{\alpha/2}\,.\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; n = \left(\frac{2\,.\,z_{\alpha/2}\,.\,\sigma}{\text{Amplitud}}\right)^2$$

siendo $n = \left(\dfrac{2 \times 1{,}96 \times 5}{2}\right)^2 \approx 96$ cajas de cereales

4. Una muestra aleatoria extraída de una población normal de varianza 100, presenta una media muestral $\overline{x} = 160$. Con una muestra de tamaño 144, se pide:
a) Calcular un intervalo de confianza del 95 por ciento para la media poblacional.
b) Si se quiere tener una confianza del 95 por ciento de que su estimación se encuentra a una distancia de 1,2 cm más o menos de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

Solución:

a) $n = 144 \quad \overline{x} = 160 \quad \sigma = 10 \quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad \alpha/2 = 0{,}025 \quad z_{0,025} = 1{,}96$

$$I_{0,95}(\mu) = \left[160 - 1{,}96\,\frac{10}{12}\;,\;160 + 1{,}96\,\frac{10}{12}\right] = \left[158{,}37\;,\;161{,}63\right]$$

b) El error absoluto que se quiere cometer es de 1,2, aplicando la fórmula para la determinación de la muestra a un nivel de confianza del 95 por 100, se tiene:

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\,.\,\sigma}{\epsilon}\right)^2 \;\rightarrow\; n = \left(\frac{1{,}96\,.\,10}{1{,}2}\right)^2 \approx 267$$

Se debería tomar una muestra adicional de $267 - 144 = 123$ elementos

5. El 30% de un determinado pueblo ve un concurso que hay en televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, entre las 10 personas, estuvieran viendo el programa:

a) Más de ocho personas

b) Algunas de las diez personas

c) Calcular la media y desviación típica

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial con $n=10$ y $p=0,3$, es decir,

$$B(10,0,3) \equiv B(10,\,k,\,0,3) \text{ con } k \equiv \text{éxitos}: \; P(X=k)=\binom{n}{k}.\,p^k\,.\,q^{n-k}$$

Llamando X = "número de personas que están viendo el programa"

$$P[X>8]=P[X=9]+P[X=10]=\left[\binom{10}{9}\,0,3^9\,.\,0,7\right]+\left[\binom{10}{10}\,0,3^{10}\,.\,0,7^0\right]=$$

$$=10.0,3^9.0,7+0,3^{10}=0,000144$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \binom{10}{9}=\dfrac{10!}{9!\,(10-1)!}=\dfrac{10\,.\,9!}{9!\,.\,1!}=\dfrac{10}{1}=10 \\[2ex] \binom{10}{10}=\dfrac{10!}{10!\,(10-10)!}=\dfrac{1}{0!}=\dfrac{1}{1}=1 \end{cases}$$

b) $P[X>0]=1-P[X=0]=1-\binom{10}{0}\,0,3^0\,.\,0,7^{10}=1-0,7^{10}=0,972$

c) Media: $\mu=n\,.\,p=10\,.\,0,3=3$

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{n.\,p.q}=\sqrt{10.0,3.0,7}=\sqrt{2,1}=1,45$

6. El jefe de recursos humanos de una empresa realiza un test de diez ítems a los aspirantes a un puesto, teniendo en cada ítems cuatro posibles respuestas, de las que sólo una es correcta. Suponiendo que los aspirantes teniendo la misma probabilidad de responder. Se pide hallar las probabilidades para el aspirante:

a) Conteste todos los ítems mal

b) Conteste al menos cuatro ítems bien

c) Conteste entre cuatro y seis ítems bien

d) Conteste todos los ítems bien

e) Conteste menos de tres ítems bien

Solución:

Sea X = "contestar ítems bien en el test", la variable sigue una distribución binomial

$$n = 10 \;,\; p = \frac{1}{4} = 0,25 \;,\; B(10, 0,25) \;,\; P(X = k) = \binom{10}{k} \,.\, 0,25^{k} \,.\, 0,75^{10-k} \qquad k = 0,1,\cdots,10$$

a) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \,.\, 0,25^{0} \,.\, 0,75^{10} = 0,25^{0} \,.\, 0,75^{10} = 0,0563$

b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big) =$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} \,.\, 0,25^{0} \,.\, 0,75^{10} + \binom{10}{1} \,.\, 0,25^{1} \,.\, 0,75^{9} + \binom{10}{2} \,.\, 0,25^{2} \,.\, 0,75^{8} + \binom{10}{3} \,.\, 0,25^{3} \,.\, 0,75^{7}\right] =$$

$$= 1 - \left[0,0563 + 0,1877 + 0,2816 + 0,2503\right] = 0,2241$$

c) $P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$

$$= \binom{10}{4} \,.\, 0,25^{4} \,.\, 0,75^{6} + \binom{10}{5} \,.\, 0,25^{5} \,.\, 0,75^{5} + \binom{10}{6} \,.\, 0,25^{6} \,.\, 0,75^{4} =$$

$$= 0,1460 + 0,0584 + 0,0162 = 0,2206$$

d) $P(X = 10) = \binom{10}{10} \,.\, 0,25^{10} \,.\, 0,75^{0} = 0$

e) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= \binom{10}{0} \,.\, 0,25^{0} \,.\, 0,75^{10} + \binom{10}{1} \,.\, 0,25^{1} \,.\, 0,75^{9} + \binom{10}{2} \,.\, 0,25^{2} \,.\, 0,75^{8} =$$

$$= 0,0563 + 0,1877 + 0,2816 = 0,5256$$

Discreta: $a-2 \quad a-1 \quad a$

$$\overbrace{P(X \ge a) = P(X > a-1)} = \overbrace{P(X^{\bullet} \ge a-0,5)}^{\text{Continua}}$$

Discreta: $b-1 \quad b \quad b+1$

$$\overbrace{P(X \le b) = P(X < b+1)} = \overbrace{P(X^{\bullet} \le b+0,5)}^{\text{Continua}}$$

$$\overbrace{P(a \le X \le b) = P(a-1 < X < b+1)}^{\text{Discreta}} = \overbrace{P(a-0,5 \le X^{\bullet} \le b+0,5)}^{\text{Continua}}$$

Discreta: $a \quad a+1 \quad a+2$

$$\overbrace{P(X > a) = P(X \ge a+1)} = \overbrace{P(X^{\bullet} \ge a+0,5)}^{\text{Continua}}$$

Discreta: $b-2 \quad b-1 \quad b$

$$\overbrace{P(X < b) = P(X \le b-1)} = \overbrace{P(X^{\bullet} \le b-0,5)}^{\text{Continua}}$$

$$\overbrace{P(a < X < b) = P(a+1 \le X \le b-1)}^{\text{Discreta}} = \overbrace{P(a+0,5 \le X^{\bullet} \le b-0,5)}^{\text{Continua}}$$

7. Un test de inteligencia consta de 200 preguntas de verdadero o falso. Para una persona que respondiese al azar, calcular la probabilidad de que acertase:
a) 50 preguntas o menos
b) Más de 50 preguntas y menos de 100
c) Más de 120 preguntas

Solución:

El número de preguntas acertadas sigue una binomial $B(200, 0,5)$

Como el número de pruebas es elevado la distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de media

$$N\left[n.p, \sqrt{n.p.q}\right] \equiv N\left[200.0,5, \sqrt{200.0,5.0,5}\right] \equiv N\left[100, \sqrt{50}\right]$$

Para utilizar correctamente la transformación de una variable discreta en una variable continua es necesario realizar una transformación de continuidad.

a) $P[x \leq 50] \approx P[x \leq 50,5] = P\left[\frac{x-100}{\sqrt{50}} \leq \frac{50,5-100}{\sqrt{50}}\right] = P[z \leq -7] = P[z \geq 7] = 0$

b) $P[50 < x < 100] \approx P[50+0,5 < x < 100-0,5] = P[50,5 \leq x \leq 99,5] =$

$$= P\left[\frac{50,5-100}{\sqrt{50}} \leq \frac{x-100}{\sqrt{50}} \leq \frac{99,5-100}{\sqrt{50}}\right] = P[-7 \leq z \leq -0,07] = P[0,07 \leq z \leq 7] =$$

$$= P[z \geq 0,07] - P[z \geq 7] = 0,4721 - 0 = 0,4721$$

c) $P[x > 120] \approx P[x \geq 120,5] = P\left[\frac{x-100}{\sqrt{50}} \geq \frac{120,5-100}{\sqrt{50}}\right] = P[z \geq 2,9] = 0,00187$

8. El departamento comercial de una industria alimenticia conoce que 2 de cada 16.- Las puntuaciones en la Escala de Inteligencia para Adultos de Wechsler (WAIS) siguen en una población una distribución normal de media 100 y desviación típica 16. Al extraer una muestra aleatoria simple de 25 individuos, calcular:
a) Probabilidad de que la media de esos 25 individuos sea inferior a 95
b) Probabilidad de que la media esté comprendida entre 98 y 102.

Solución:

Según el teorema de Fisher $\overline{x} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, **es decir,** $\overline{x} \approx N\left(100, \frac{16}{\sqrt{25}}\right) \equiv N(100,\ 3,2)$

a) $P(\overline{x} \leq 95 + 0,5) = P(\overline{x} \leq 95,5) = P\left(\frac{\overline{x} - 100}{3,2} \leq \frac{95,5 - 100}{3,2}\right) = P(z \leq -1,4) = P(z \geq 1,4) = 0,0808$

b) $P(98 \leq \overline{x} \leq 102) = P(98 + 0,5 \leq \overline{x} \leq 102 - 0,5) = P(98,5 \leq \overline{x} \leq 101,5) =$

$$= P\left(\frac{98,5 - 100}{3,2} \leq \frac{\overline{x} - 100}{3,2} \leq \frac{101,5 - 100}{3,2}\right) = P(-0,46 \leq z \leq 0,46) =$$

$$= P(z \geq -0,46) - P(z \geq 0,46) = P(z \leq 0,46) - P(z \geq 0,46) = 1 - P(z \geq 0,46) - P(z \geq 0,46) =$$

$$= 1 - 2 \,.\, P(z \geq 0,46) = 1 - 2 \times 0,3228 = 0,3544$$

9. Un pasajero opta por una compañía aérea con probabilidad 0,5. En un grupo de 400 pasajeros potenciales, la compañía vende billetes a cualquiera que se lo solicita, sabiendo que la capacidad de su avión es de 230 pasajeros. Se pide:
a) Probabilidad de que la compañía tenga overbooking, es decir, que un pasajero no tenga asiento.
b) Si existen 10 compañías aéreas que realizan el mismo viaje con condiciones similares a la anterior, ¿cuál será la probabilidad de que al menos dos de ellas tenga overbooking?

Solución:

a) La variable X = "pasajeros que optan por esa compañía", donde $X \sim B(400, 0,5)$

Como el número de pasajeros es elevado la distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de media $\mu = n.p = 400.0,5 = 200$ **y desviación típica**
$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{400.0,5.0,5} = 10$, **es decir,** $X \sim N(200, 10)$

$$P\left[X > 230\right] = P\left[\frac{X - 200}{10} > \frac{230 - 200}{10}\right] = P\left[z > 3\right] = 0,00135$$

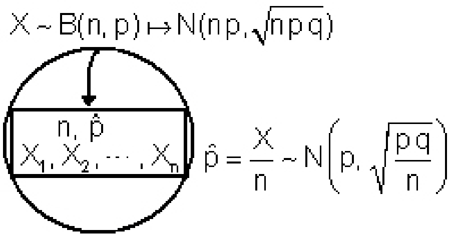
b) La variable Y = "compañía aérea", $Y \sim B(10, 0,0013)$

$$P\left[Y \geq 2\right] = 1 - P\left[Y < 2\right] = 1 - \left[P(Y = 0) + P(Y = 1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0}.0,0013^{0}.0,9987^{10} + \binom{10}{1}.0,0013^{1}.0,9987^{9}\right] = 1 - \left[0,987 + 0,0128\right] = 0,00015$$

10. Se realiza una encuesta para conocer la proporción de españoles a los que no le gusta el fútbol, tomando una muestra aleatoria simple (m.a.s) de tamaño 100. Por análisis anteriores se conoce que dicha proporción es del 40%. Calcular la probabilidad de que la proporción muestral sea superior al 46%.

Solución:



La muestra $n = 100$, se conoce que $p = 0,4$ y $q = 0,6$

$$\hat{p} \sim N\left(0,4,\ \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{100}}\right) = N\big(0,4,\ 0,049\big)$$

$$P\big[\hat{p} > 0,46\big] = P\left[\frac{\hat{p} - 0,4}{0,049} > \frac{0,46 - 0,4}{0,049}\right] = P(z > 1,22) = 0,1112$$

11. Una agencia ofrece un premio entre los distribuidores si venden trescientos veinte o más paquetes de viajes por día. Sabiendo que el número de paquetes de viajes vendidos al día por los distribuidores A y B siguen una ley normal de la forma siguiente:

Distribuidor	Media	Desviación típica
A	290 paquetes de viaje	20 paquetes de viaje
B	300 paquetes de viaje	10 paquetes de viaje

Se pide:
a) Porcentaje de los días que obtendrá premio el distribuidor A
b) Porcentaje de los días que obtendrá premio el distribuidor B
c) A qué distribuidor beneficia la decisión de la agencia
d) Si se asocian los dos distribuidores, ¿qué porcentaje de días obtendrían premio?

Solución:

a) Sea X = "número de paquetes de viajes vendidos por el distribuidor A al día"

La variable aleatoria $X \sim N(290, 20)$. El porcentaje de los días que obtendrá premio el distribuidor A será el correspondiente a la probabilidad:

$$P\big[X \geq 320\big] = P\left[\frac{X - 290}{20} \geq \frac{320 - 290}{20}\right] = P\big[z \geq 1,5\big] = 0,0688$$

es decir, el 6,68% de los días obtendrá premio el distribuidor A

b) Análogamente, la variable aleatoria

Y = "número de paquetes de viajes vendidos por el distribuidor B al día"

sigue una ley normal $Y \sim N(300, 10)$ con lo que

$$P\big[Y \geq 320\big] = P\left[\frac{Y - 300}{10} \geq \frac{320 - 300}{10}\right] = P\big[z \geq 2\big] = 0,0228$$

es decir, el 2,28% de los días obtendrá premio el distribuidor B

c) De los apartados anteriores se observa que el distribuidor A resulta beneficiado con la decisión de la agencia.

d) Siendo $X \sim N(290, 20)$ e $Y \sim N(300, 10)$, se tiene que la nueva variable $U = X + Y$ sigue una distribución normal $U \sim N\left[(290+300), \sqrt{20^2+10^2}\right] \equiv N\left[590, 22,4\right]$

con lo cual, $P\left[U \geq 320\right] = P\left[\dfrac{U-590}{22,4} \geq \dfrac{320-590}{22,4}\right] = P\left[z \geq -12,05\right] = P\left[z \leq 12,05\right] \simeq 1$

El resultado indica que si se asociaran los distribuidores A y B prácticamente todos los días obtendrían premio.

12. El peso de un determinado tipo de manzanas fluctúa normalmente con media 150 gramos y desviación típica 30 gramos. Una bolsa de llena con 15 manzanas seleccionadas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total de la bolsa sea inferior a 2 kilos?

Solución:

Sea la variable aleatoria Y = "peso de la bolsa de manzanas"

$$Y = \sum_{i=1}^{15} x_i \sim N\left[15 \,.\, \mu_x, \sqrt{15 \,.\, \sigma_x^2}\right] \equiv N\left[15 \,.\, 150, \sqrt{15 \,.\, 30^2}\right] \equiv N\left[2.250\,gr, \sqrt{13.500}\,gr\right]$$

$$P\left[Y < 2000\right] = P\left[\frac{Y-2250}{\sqrt{13500}} < \frac{2000-2250}{\sqrt{13500}}\right] = P\left[z < -2,15\right] = P\left[z > 2,15\right] = 0,0158$$

13. Para analizar el peso promedio de niños y niñas, siguiendo ambos pesos una distribución normal, se utiliza una muestra aleatoria de 20 niños y 25 niñas. El promedio de los pesos de los niños es 45 kg. con una desviación típica de 6,4 kg., mientras que el promedio del peso de las niñas es 38 kg. y una desviación típica de 5,6 kg.
¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra el peso promedio de los niños sea al menos 10 kg. mayor que el de las niñas?.

Solución:

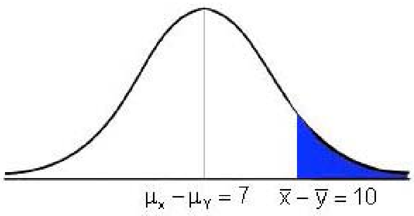
Sean las variables aleatorias X = "peso de los niños" e Y = "peso de las niñas", $X \approx N\left(\mu_x, \sigma_x\right)$ e $Y \approx N\left(\mu_y, \sigma_y\right)$, independientes entre sí.

En las muestras respectivas:

$$\overline{x} \approx N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right) \equiv N\left(45, \frac{6,4}{\sqrt{20}}\right) \quad e \quad \overline{y} \approx N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}\right) \equiv N\left(38, \frac{5,6}{\sqrt{25}}\right)$$

$$\xi = \overline{x} - \overline{y} \approx N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{m}}\right)^2}\right)$$

La variable $\xi = \overline{x} - \overline{y} \approx N\left(45-38, \sqrt{\dfrac{6,4^2}{20} + \dfrac{5,6^2}{25}}\right) = N(7,\,1,82)$



$$P(\xi \geq 10) = P\left(\frac{\xi - 7}{1,82} \geq \frac{10-7}{1,82}\right) = P(z \geq 1,648) = 0,05$$

14. Las puntuaciones en la Escala de Inteligencia para Adultos de Wechsler (WAIS) siguen en una población una distribución normal de media 100 y desviación típica 16. Al extraer una muestra aleatoria simple de 25 individuos, calcular:

a) Probabilidad de que la media de esos 25 individuos sea inferior a 95

b) Probabilidad de que la media esté comprendida entre 98 y 102.

Solución:

Según el teorema de Fisher $\overline{x} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, es decir, $\overline{x} \approx N\left(100, \dfrac{16}{\sqrt{25}}\right) \equiv N(100,\,3,2)$

a) $P(\overline{x} \leq 95) = P\left(\dfrac{\overline{x} - 100}{3,2} \leq \dfrac{95-100}{3,2}\right) = P(z \leq -1,56) = P(z \geq 1,56) = 0,0594$

b) $P(98 \leq \overline{x} \leq 102) = P\left(\dfrac{98-100}{3,2} \leq \dfrac{\overline{x} - 100}{3,2} \leq \dfrac{102-100}{3,2}\right) = P(-0,62 \leq z \leq 0,62) =$

$= P(z \geq -0,625) - P(z \geq 0,62) = P(z \leq 0,62) - P(z \geq 0,62) = 1 - P(z \geq 0,62) - P(z \geq 0,62) =$

$= 1 - 2P(z \geq 0,62) = 0,4648$

15. Una máquina automática llena latas de una bebida gaseosa siguiendo una distribución normal de media 34 cl. y desviación típica 1,5 cl.

a) Si se despachan latas que contienen 33 cl. ¿cuál es la proporción de latas desechadas?

b) ¿La máquina automática de llenado puede ser ajustada para cambiar el volumen medio o para que únicamente el 1% de las latas tuviera 33 cl.?

c) Eligiendo 10 latas llenadas con la máquina como se describe originalmente, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna sea desechada?

d) Si se eligen 500 latas llenadas con la máquina como se describe originalmente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 100 sean desechadas?

Solución:

a) Sea X = "Latas llenadas con la máquina automática", $X \sim N(34\,,1,5)$

$$P(X<33)=P\left[\frac{X-34}{1,5}<\frac{33-34}{1,5}\right]=P(z<-0,66)=P(z>0,66)=0,2546$$

b) Hay que calcular la media μ

$$P(X<33)=P\left[\frac{X-\mu}{1,5}<\frac{33-\mu}{1,5}\right]=P\left[z<\frac{33-\mu}{1,5}\right]=0,01 \quad\rightarrow\quad P\left[z>\frac{\mu-33}{1,5}\right]=0,01$$

Observando la tabla $N(0\,,1)$: $\dfrac{\mu-33}{1,5}=2,33 \quad\rightarrow\quad \mu=33+2,33 \text{ x } 1,5=36,495$ cl.

c) Sea Y = "Latas desechadas", donde $Y \sim B(10\,,0,2546)$

$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\,.\,0,2546^{0}\,.\,0,7454^{10}=0,05295$$

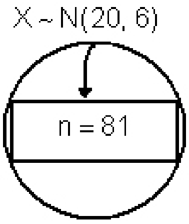
d) En este caso, $Y \sim B(500\,,0,2546)$

Como el número de latas es elevado la distribución binomial se puede aproximar por una distribución normal de media $\mu=n.p=500 \text{ x } 0,2546=127,3$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{n.\,p.q}=\sqrt{500 \text{ x } 0,2546 \text{ x } 0,7454}=9,74$, es decir, $Y \sim N(127,3\ ,\ 9,74)$

$$P(Y\geq 100)=P\left[\frac{X-127,3}{9,74}\geq\frac{100-127,3}{9,74}\right]=P(z\geq -2,8)=P(z\leq 2,8)=1-P(z\geq 2,8)=$$
$$=1-0,00256=0,99744$$

16. La longitud de los pepinos murcianos sigue una distribución normal de media 20 cm y varianza 36 cm cuadrados, escogida una muestra aleatoria simple de tamaño 81, calcular la probabilidad de que la media de dicha muestra supere los 31 cm.

Solución:



$$\bar{x} \sim N\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\bar{x} \sim N\left[20, \frac{6}{\sqrt{81}}\right] \equiv N(20, 0{,}66) \qquad P(\bar{x} > 31) = P\left[\frac{\bar{x}-20}{0{,}66} > \frac{31-20}{0{,}66}\right] = P(z > 16) = 0$$

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-20}{0{,}66}$$

17. Un pasajero opta por una compañía aérea con probabilidad 0,5. En un grupo de 400 pasajeros potenciales, la compañía vende billetes a cualquiera que se lo solicita, sabiendo que la capacidad de su avión es de 230 pasajeros. Se pide:

a) Probabilidad de que la compañía tenga overbooking, es decir, que un pasajero no tenga asiento.

b) Si existen 10 compañías aéreas que realizan el mismo viaje con condiciones similares a la anterior, ¿cuál será la probabilidad de que al menos dos de ellas tenga overbooking?

Solución:

a) La variable X = "Pasajeros que optan por esa compañía", donde $X \sim B(400\,,0{,}5)$

Como el número de pasajeros es elevado la distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de media $\mu = n.p = 400 \times 0{,}5 = 200$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{400 \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 10$, es decir, $X \sim N(200, 10)$

$$P\left[X > 230\right] = P\left[\frac{X-200}{10} > \frac{230-200}{10}\right] = P\left[z > 3\right] = 0{,}00135$$

b) La variable Y = "Compañía aérea", $Y \sim B(10\,,0{,}0013)$

$$P\left[Y \geq 2\right] = 1 - P\left[Y < 2\right] = 1 - \left[P(Y=0) + P(Y=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0}.0{,}0013^{0}.0{,}9987^{10} + \binom{10}{1}.0{,}0013^{1}.0{,}9987^{9}\right] = 1 - \left[0{,}987 + 0{,}0128\right] = 0{,}00015$$

18. El número de ventas diarias de un quiosco de periódicos se distribuye con media 30 y varianza 2. Determinar:

a) Probabilidad de que en un día se vendan entre 13 y 31 periódicos

b) Determinar el número de periódicos que se venden en el 90% de las ocasiones

c) Si en una ciudad hay 10 quioscos independientes del mismo tipo y características que el anterior. Hallar la probabilidad de que más de dos quioscos vendan entre 13 y 31 periódicos

Solución:

a) La variable X = "Venta de periódicos", donde $X \sim N(30, \sqrt{2})$

$$P\left[13 \le X \le 31\right] = P\left[\frac{13-30}{\sqrt{2}} \le \frac{X-30}{\sqrt{2}} \le \frac{31-30}{\sqrt{2}}\right] = P\left[-12,02 \le z \le 0,707\right] =$$
$$= P(z \ge -12,07) - P(z \ge 0,707) = P(z \le 12,07) - P(z \ge 0,707) =$$
$$= 1 - P(z \ge 12,07) - P(z \ge 0,707) = 1 - 0 - 0,2206 = 0,7794$$

b) $P(X \le k) = 0,90 \quad \rightarrow \quad P\left[\frac{X-30}{\sqrt{2}} \le \frac{k-30}{\sqrt{2}}\right] = 0,90 \quad \rightarrow \quad P\left[z \le \frac{k-30}{\sqrt{2}}\right] = 0,90$

$$P\left[z > \frac{k-30}{\sqrt{2}}\right] = 0,10 \Rightarrow \frac{k-30}{\sqrt{2}} = 1,28 \Rightarrow k = 30 + 1,28.\sqrt{2} = 31,81 \text{ periódicos}$$

c) La variable Y ="quioscos que venden entre 13 y 31 periódicos", $Y \sim B(10, 0,7794)$

$$P\left[X > 2\right] = 1 - P\left[X \le 2\right] = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0}.0,7794^0.0,2206^{10} + \binom{10}{1}.0,7794^1.0,2206^9 + \binom{10}{2}.0,7794^2.0,2206^8\right] = 0,9998$$

19. La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en mese):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

Solución:

Se trata de un intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$I(\mu) = \Big[\overbrace{\bar{x}}^{\text{media muestral}} \pm \overbrace{z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}^{\text{error estimación}}\Big] \qquad \begin{cases} 1-\alpha = 0,95 \quad \rightarrow \quad \alpha = 0,05 \\ z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96 \\ n = 10 \quad \sigma = 5 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(33+34+26+37+30+39+26+31+36+19) = 31,1$$

$$I(\mu)=\left[\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[31,1\pm 1,96\ \text{x}\,\frac{5}{\sqrt{10}}\right]=\left[31,1\pm 3,1\right]=\left[28\,,\,34,2\right]$$

20. En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2.
a) Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional..
b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

Solución:

a) Es un intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$I(\mu)=\left[\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\qquad\begin{cases}1-\alpha=0,80\ \rightarrow\ \alpha=0,20\\ z_{\alpha/2}=z_{0,10}=1,28\\ n=10.000\quad \bar{x}=5\quad \sigma=2\end{cases}$$

$$I(\mu)=\left[\bar{x}\pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[5\pm 1,28\ \text{x}\,\frac{2}{\sqrt{10.000}}\right]=\left[5-0,0256\,,\,5+0,0256\right]=\left[4,9744\,,\,5,0256\right]$$

b) El error admitido es $\in=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<0,25$ **con** $1-\alpha=0,95$ **,** $\alpha=0,05$ **,** $z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1,96$

$$\in=1,96\ \text{x}\ \frac{2}{\sqrt{n}}<0,25\ \rightarrow\ \sqrt{n}>1,96\ \text{x}\,\frac{2}{0,25}=15,68\ \rightarrow\ n=15,68^2\approx 246$$

21. Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a las estancias, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x}=8,1$ **días ;** $s=9$ **días.**
Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media.

Solución:

Es un intervalo de confianza para la media poblacional, desconocida la varianza poblacional, en muestras grandes ($n=800>30$ **)**

$$I(\mu)=\Big[\overbrace{\bar{x}}^{\text{media muestral}}\pm\overbrace{z_{\alpha/2}\frac{s_x}{\sqrt{n}}}^{\text{error estimación}}\Big]\qquad\begin{cases}1-\alpha=0,95\ \rightarrow\ \alpha=0,05\\ z_{\alpha/2}=z_{0,025}=1,96\\ n=800\quad \bar{x}=8,1\quad s_x=9\end{cases}$$

$$I(\mu)=\left[8,1\pm 1,96\ \text{x}\,\frac{9}{\sqrt{800}}\right]=\left[8,1\pm 0,62\right]=\left[8,1-0,62\,,\,8,1+0,62\right]=\left[7,48\,,\,8,72\right]$$

La estancia media está entre 7,48 y 8,72 días.

La longitud o amplitud del intervalo: $L = 8,72 - 7,48 = 1,24 = 2 \text{ x } 0,62 = 2 . \in$

22. Una muestra aleatoria de tamaño 100, extraída de una población normal de varianza 81, presenta una media muestral igual a 150.
a) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional.
b) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional y compararlo con el anterior.
c) Si se quiere tener una confianza del 95 % de que su estimación se encuentra a una distancia máxima de 1,2 de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

Solución:

a) Es un intervalo de confianza para la media poblacional, desconocida la varianza poblacional, en muestras grandes ($n = 100 > 30$)

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} \right] \quad \begin{cases} 1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \\ z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645 \\ n = 100 \quad \bar{x} = 150 \quad \sigma_x^2 = 81 \end{cases} \quad n . \sigma_x^2 = (n-1) . s_x^2 \rightarrow \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

$$I(\mu) = \left[150 \pm 1,645 \text{ x } \frac{9}{\sqrt{99}} \right] = \left[150 \pm 0,9 \right] = \left[149,1 \, , \, 150,9 \right]$$

Amplitud del intervalo: $L = 2 . \in = 2 \text{ x } 0,9 = 1,8$

b) $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow z_{0,025} = 1,96$

$$I(\mu) = \left[150 \pm 1,96 \text{ x } \frac{9}{\sqrt{99}} \right] = \left[150 \pm 1,77 \right] = \left[148,23 \, , \, 151,77 \right]$$

Amplitud del intervalo: $L = 2 . \in = 2 \text{ x } 1,77 = 3,54$

A medida que el nivel de confianza $(1 - \alpha)$ es mayor el intervalo se hace más amplio.

c) $\in = z_{\alpha/2} \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} \leq 1,2 \rightarrow 1,96 \text{ x } \dfrac{9}{\sqrt{n-1}} \leq 1,2 \rightarrow 1,96 \text{ x } \dfrac{9}{1,2} \leq \sqrt{n-1}$

$\sqrt{n-1} \geq 14,7 \rightarrow n - 1 \geq 14,7^2 \rightarrow n \geq 217$

El valor mínimo del tamaño de la muestra es de 217 elementos. En consecuencia, deben tomarse $(217 - 100) = 117$ elementos más.

23. Un agricultor quiere estimar el peso medio de las naranjas que produce, con un error menor de 10 g, empleando una muestra de 81 naranjas. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 36 g, ¿cuál será el máximo nivel de confianza con que realizará la estimación?

Solución:

El intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad \in = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10 \quad n = 81 \quad \sigma = 36$$

$$z_{\alpha/2}\frac{36}{\sqrt{81}} < 10 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} < \frac{90}{36} = 2,5 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} < 2,5$$

- **En las tablas de la N(0, 1), con área o probabilidad a la derecha, se tiene,**

  $$z_{\alpha/2} < 2,5 \;\rightarrow\; \alpha/2 = 0,00621 \;\rightarrow\; \alpha = 0,01242$$

  En consecuencia, la confianza máxima: $(1-\alpha) = 1 - 0,01242 = 0,9876 \; (98,76\%)$

- **En las tablas de la N(0, 1), con área o probabilidad a la izquierda, se tiene,**

  $$z_{\alpha/2} < 2,5 \;\rightarrow\; \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0,99379 \;\rightarrow\; \alpha = 0,01242$$

  En consecuencia, la confianza máxima: $(1-\alpha) = 1 - 0,01242 = 0,9876 \; (98,76\%)$

24. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1.480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros:
a) Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

a) Es un intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad \begin{cases} 1-\alpha = 0,90 \;\rightarrow\; \alpha = 0,10 \\ z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645 \\ n = 625 \quad \bar{x} = 1.480 \quad \sigma = 250 \end{cases}$$

$$I(\mu) = \left[1.480 \pm 1,645 \times \frac{250}{\sqrt{625}}\right] = \left[1.480 \pm 16,45\right] = \left[1.463,55\,,\,1.496,45\right]$$

b) $\in = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10$ **con** $1-\alpha = 0,99\,,\ \alpha = 0,01\,,\ z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,575$

$$\in = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 10 \;\;\rightarrow\;\; 2,575\,x\,\frac{250}{\sqrt{n}} < 10 \;\;\rightarrow\;\; 2,575\,x\,\frac{250}{10} < \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} > 64,375 \;\;\rightarrow\;\; n > 64,375^2 = 4.144,14$$

El tamaño mínimo es de 4.145 personas.

25. Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas en Canarias, se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 € con una desviación típica de 6 €. Se pide:
a) Determina el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas en Canarias con un nivel de confianza del 97 %.
b) Halla el tamaño de la muestra que se debe tomar para que el error máximo sea de 2 €, con un nivel de significación del 1 %.

Solución:

a) Es un intervalo de confianza para la media poblacional, desconocida la varianza poblacional, en muestras grandes ($n = 64 > 30$)

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right] = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right]$$

La cuasivarianza muestral s_x^2 es un estimador insesgado de la varianza poblacional σ^2.

$$n\,.\,\sigma_x^2 = (n-1)\,.\,s_x^2 \;\;\rightarrow\;\; \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Se tiene}\;\begin{cases} 1-\alpha = 0,97 \;\;\rightarrow\;\; \alpha = 0,03 \;\;\rightarrow\;\; z_{\alpha/2} = z_{0,015} = 2,17 \\ n = 64 \quad \bar{x} = 56 \quad \sigma_x = 6 \end{cases}$$

$$I(\mu) = \left[56 \pm 2,17\,x\,\frac{6}{\sqrt{63}}\right] = \left[56 \pm 1,64\right] = \left[54,36\,,\,57,64\right]$$

$$\text{b)}\quad \in = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} < 2 \quad \text{con}\;\; 1-\alpha = 0,99\;,\;\alpha = 0,01\;,\; z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,575$$

$$\in = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}} < 2 \;\;\rightarrow\;\; 2,575\,x\,\frac{6}{\sqrt{n-1}} < 2 \;\;\rightarrow\;\; 2,575\,x\,3 < \sqrt{n-1}$$

$$\sqrt{n-1} > 7,725 \;\;\rightarrow\;\; n-1 > 7,725^2 = 59,67 \;\;\rightarrow\;\; n > 60,67$$

El tamaño muestral debe de ser al menor de 61 hoteles.

26. Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

Solución:

El intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad \in = z_{\alpha/2}\,\frac{0,05}{\sqrt{n}} < 0,01 \;\;,\;\; 1-\alpha = 0,99 \;,\; \alpha = 0,01 \;,\; z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,575$$

$$2,575 \times \frac{0,05}{\sqrt{n}} < 0,01 \;\;\rightarrow\;\; 2,575 \times \frac{0,05}{0,01} < \sqrt{n} \;\;\rightarrow\;\; \sqrt{n} > 12,875 \;\;\rightarrow\;\; n > 12,875^2 = 165,76$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 166

27. Las especificaciones de un fabricante de botes de pintura dicen que el peso de los botes sigue una distribución normal de media 1 kg de pintura y una desviación estándar de 0,1 kg.
a) ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 botes?
b) Se ha comprado un lote del que se ha tomado una muestra de 20 botes y en el que la media de los pesos obtenidos es de 0,98 kg. Construye un intervalo de confianza del 95 % para la media.

Solución:

a) La media muestral $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

El ejercicio habla de una desviación estándar poblacional de 0,1 kg , queriendo referirse a la desviación típica.

En este caso, $\bar{x} \sim N\left(1, \frac{0,1}{\sqrt{20}}\right) = N(1, 0,022) \;\;\rightarrow\;\; \bar{x} = 1 \text{ kg} \qquad \sigma_x = 0,022 \text{ kg}$

b) Los datos obtenidos son: $n = 20 \qquad \bar{x} = 0,98 \text{ kg}$

Se trata de intervalo de confianza para la media poblacional, conocida la varianza poblacional.

$$1-\alpha = 0,95 \;,\; \alpha = 0,05 \;,\; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,98 \pm 1,96 \times \frac{0,1}{\sqrt{20}}\right] = \left[0,98 \pm 0,044\right] = \left[0,936,\; 1,024\right]$$

28. De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

La proporción de la muestra es $p_x = \dfrac{630}{2.100} = 0,3 \;\rightarrow\; q_x = 0,7 \qquad n = 630$

Intervalo de confianza para la proporción de la población:

$$I(p) = \Big[\overbrace{p_x}^{\text{proporción muestral}} \pm \overbrace{z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_x \cdot q_x}{n}}}^{\text{error estimación}} \Big] \qquad \text{con } 1-\alpha = 0,99 \;,\; \alpha = 0,01 \;,\; z_{\alpha/2} = z_{0,005} = 2,575$$

$$I(p) = \left[p_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_x \cdot q_x}{n}} \right] = \left[0,3 \pm 2,575 \,.\, \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{630}} \right] = \left[0,3 \pm 0,047 \right] = \left[0,253 \;,\; 0,347 \right]$$

29. En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas. Se pide:
a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?.
b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?
Justificar las respuestas.

Solución:

a) El tamaño muestral es: $n = 1.250 \times 0,2 = 250$ **familias**

$$p_x \text{ (familias con gas ciudad)} = \frac{75}{250} = 0,3 \qquad q_x = 0,7$$

La proporción de familias con gas ciudad es del 30 %

b) Intervalo de confianza para la proporción de la población: $I(p) = \left[p_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_x \cdot q_x}{n}} \right]$

El error que se comete en la estimación es: $\in = z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_x \cdot q_x}{n}}$

$$1-\alpha = 0,95 \;,\; \alpha = 0,05 \;,\; z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96$$

$$\in = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{250}} = 0,057 \;\; (5,7\%)$$

Por tanto, el porcentaje de familias con gas ciudad se encuenra en el intervalo de confianza:

$$I(p) = \left[p_x \pm \in\right] = \left[0,3 \pm 0,057\right] = \left[0,243\ ,\ 0,357\right]$$

30. En una piscifactoría, se inició un cultivo con 90 ejemplares, de los cuales 64 llegaron a la edad adulta. De los que llegaron a la edad adulta, el peso medio fue de 3,1 kilos con una desviación típica de medio kilo.
a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 90%.
b) Obtener un intervalo de confianza para el peso medio que alcanzan los ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

a) Intervalo de confianza para la proporción de la población: $I(p) = \left[p_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_x . q_x}{n}}\right]$

$$1-\alpha = 0,90 \ \rightarrow\ \alpha = 0,10 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = z_{0,05} = 1,645$$

$$n = 90 \quad p_x = \frac{64}{90} = 0,711 \ \rightarrow\ q_x = 1 - 0,711 = 0,289$$

$$I(p) = \left[0,711 \pm 1,645 \text{ x } \sqrt{\frac{0,711 \text{ x } 0,289}{90}}\right] = \left[0,711 \pm 0,0786\right] = \left[0,6324\ ,\ 0,7896\right]$$

b) El intervalo de confianza para el peso medio (media poblacional), con varianza poblacional conocida:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad \begin{cases} 1-\alpha = 0,95 \ \rightarrow\ \alpha = 0,05 \\ z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1,96 \\ n = 64 \quad \bar{x} = 3,1 \quad \sigma_x = 0,5 \end{cases}$$

$$I(\mu) = \left[3,1 \pm 1,96 \text{ x } \frac{0,5}{\sqrt{64}}\right] = \left[3,1 \pm 0,1225\right] = \left[2,9775\ ,\ 3,2225\right]$$

31. Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente:
a) Halla, con un nivel de confianza del 94 %, un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.
b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se realiza la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra?

Solución:

a) Intervalo de confianza para la proporción de la población: $I(p) = \left[p_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{p_x . q_x}{n}}\right]$

$$1-\alpha = 0,94 \ \rightarrow\ \alpha = 0,06 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = z_{0,03} = 1,88$$

$$n = 325 \quad p_x = \frac{120}{325} = 0,37 \ \rightarrow\ q_x = 1 - 0,37 = 0,63$$

$$I(p) = \left[p_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_x . q_x}{n}} \right] = \left[0,37 \pm 1,88 \text{ x } \sqrt{\frac{0,37 \text{ x } 0,63}{325}} \right] = \left[0,37 \pm 0,05 \right] = \left[0,32\,,\, 0,42 \right]$$

b) El error que se comete en la estimación es: $\in = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_x . q_x}{n}}$

$$0,01 = 1,88\sqrt{\frac{0,37 \text{ x } 0,63}{n}} \;\rightarrow\; \left(\frac{0,01}{1,88}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{0,37 \text{ x } 0,63}{n}}\right)^2 \;\rightarrow\; n = \frac{0,37 \text{ x } 0,63}{(0,01/1,88)^2} = 8.238,68$$

El tamaño muestral es $n = 8.239$

32. Al estudiar una variable con desviación típica 3 se obtiene un intervalo de confianza de (6,66, 8,34) al 95%. Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo.

Solución:

El intervalo de confianza para la media poblacional, con varianza poblacional conocida $\sigma^2 = 9$**:**

$$I(\mu) = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \qquad 1-\alpha = 0,95 \;\rightarrow\; \alpha = 0,05 \;\rightarrow\; z_{0,025} = 1,96$$

$$I(\mu) = \left[6,66\,,\, 8,34 \right] \;\rightarrow\; \begin{cases} L = 8,34 - 6,66 = 1,68 = 2.\in \;\mapsto\; \in = 1,68/2 = 0,84 \\ \bar{x} = (6,66 + 8,34)/2 = 7,5 \end{cases}$$

$$\in = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; 0,84 = 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{1,96 \text{ x } 3}{0,84} = 7 \;\rightarrow\; n = 49$$

Método II:

$$I(\mu) = \left[\bar{x} - 1,96\frac{3}{\sqrt{n}}\,,\, \bar{x} + 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} \right] = \left[6,66, 8,34 \right] \rightarrow \begin{cases} \bar{x} - 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} = 6,66 \\ \bar{x} + 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} = 8,34 \end{cases} \qquad \bar{x} = \frac{6,66 + 8,34}{2} = 7,5$$

$$7,5 + 1,96\frac{3}{\sqrt{n}} = 8,34 \;\rightarrow\; \frac{5,88}{\sqrt{n}} = 8,34 - 7,5 = 0,84 \;\rightarrow\; \frac{5,88}{0,84} = \sqrt{n} \;\rightarrow\; n = 49$$

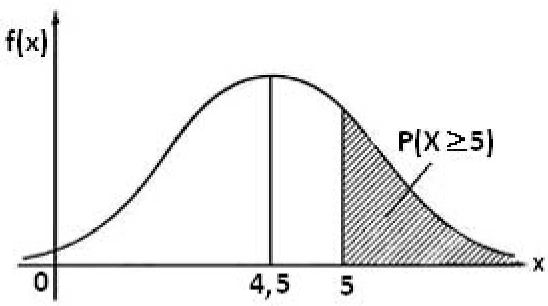
33. La utilización de la tarjeta VISA en operaciones comerciales, en la población de una gran ciudad, sigue en porcentajes una distribución normal de media 4,5 y desviación típica 0,5. Se pide calcular las siguientes probabilidades:

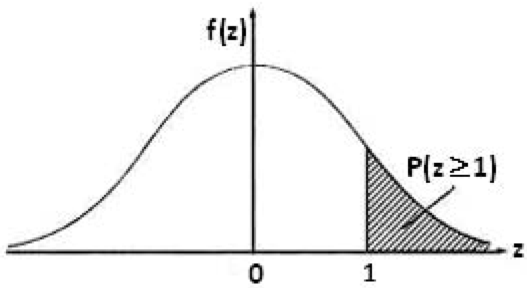
a) Que un ciudadano tomado al azar utilice la tarjeta más del 5% en sus operaciones
b) Tanto por ciento de la ciudad que utiliza la tarjeta menos del 3,75%
c) Porcentaje de operaciones con tarjeta que utiliza el 20% más alto de la población
d) Porcentaje de operaciones con tarjeta que utiliza el 10% más bajo de la población
e) Porcentaje de operaciones del 80% más próximo a la media

Solución:

a) La variable X = "Porcentaje del número de operaciones con VISA" sigue una $N(4,5\,,\,0,5)$

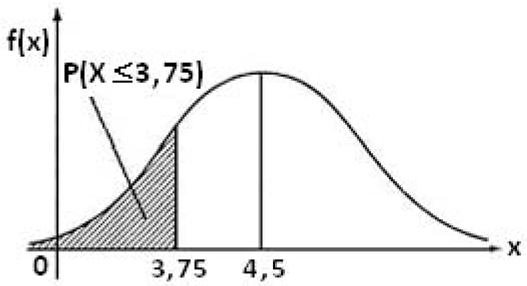
$$P(X \geq 5) = P\left[\frac{X-4,5}{0,5} \geq \frac{5-4,5}{0,5}\right] = P(z \geq 1) = 0,1587$$





b) Para hallar el tanto por ciento hay que calcular primero la probabilidad:

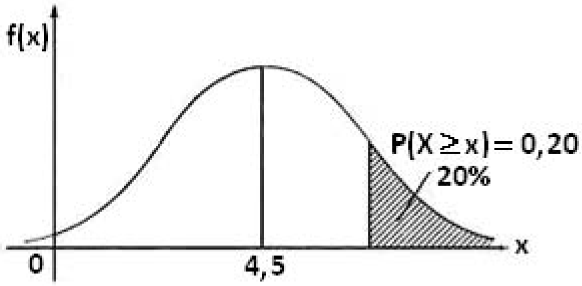
$$P(X \leq 3,75) = P\left[\frac{X-4,5}{0,5} \leq \frac{3,75-4,5}{0,5}\right] = P(z \leq -1,5) = P(z \geq 1,5) = 0,0668$$

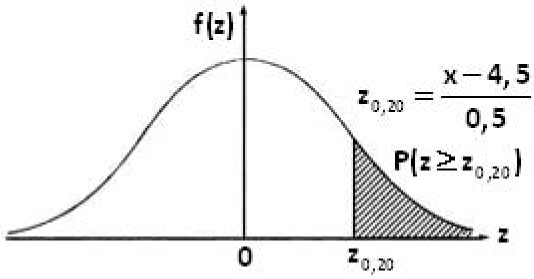


En consecuencia, existe aproximadamente un 6.68% de la población que utiliza la tarjeta Visa menos del 4,5% de las veces en sus transacciones comerciales.

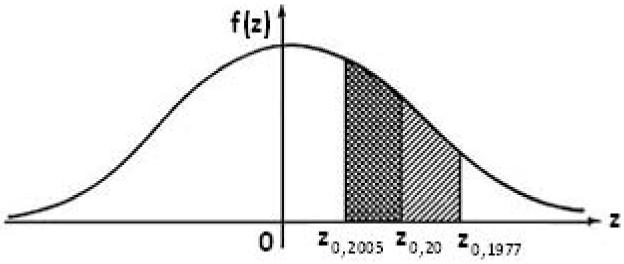
c) Sea X = "Número de operaciones con tarjeta del 20% más alto de la población"

$$P(X \geq x) = P\left[\frac{X-4,5}{0,5} \geq \frac{x-4,5}{0,5}\right] = 0,20 \quad \rightarrow \quad P(z \geq z_{0,20}) = 0,20 \quad \text{con} \quad z_{0,20} = \frac{x-4,5}{0,5}$$





La probabilidad de 0,20 no se encuentra en las tablas, por lo que no puede encontrarse directamente el $z_{0,20}$ correspondiente. Para calcularlo es necesario interpolar entre los dos valores en que se encuentra.



Abscisas	Áreas	Abscisas	Áreas
$z_{0,2005} - z_{0,1977}$	$0,2005 - 0,1977$	$0,84 - 0,85$	0,0028
$z_{0,20} - z_{0,1977}$	$0,20 - 0,1977$	$z_{0,20} - 0,85$	0,0023

$$\begin{array}{lcl} -0,01 & \longrightarrow & 0,0028 \\ z_{0,20} - 0,85 & \longrightarrow & 0,0023 \end{array} \quad \rightarrow \quad z_{0,20} = 0,85 + \frac{-0,01 \times 0,0023}{0,0028} = 0,85 - 0,008 = 0,842$$

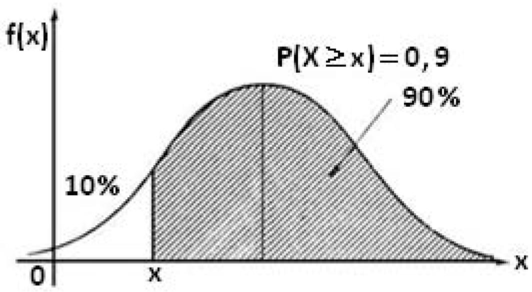
Por tanto, $z_{0,20} = \dfrac{x - 4,5}{0,5} = 0,842 \quad \leftrightarrow \quad x = 4,5 + 0,5 \times 0,842 = 4,921$

Es decir, el 20% de la población que más utiliza la tarjeta lo hace en el 4,921% de las operaciones comerciales.

Cuando los cálculos que se pretenden obtener no se muestran muy rigurosos, se puede tomar el área más próxima sin necesidad de interpolar.

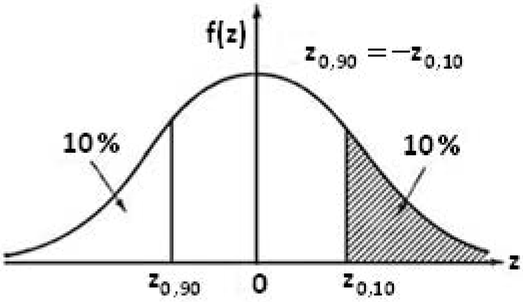
En este caso, se puede tomar $z_{0,20} = \dfrac{x - 4,5}{0,5} = 0,84 \quad \rightarrow \quad x = 4,5 + 0,5 \times 0,84 = 4,92$

d) Sea X = "Número de operaciones con tarjeta del 10% más bajo de la población"



$$P(X \geq x) = P\left[\frac{X-4,5}{0,5} \geq \frac{x-4,5}{0,5}\right] = 0,90 \quad \rightarrow \quad P(z \geq z_{0,90}) = 0,90 \quad \text{con} \quad z_{0,90} = \frac{x-4,5}{0,5}$$

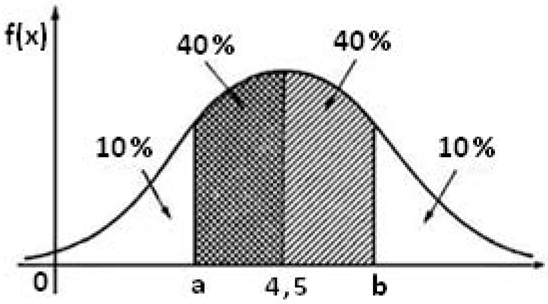
En las tablas no se encuentra el valor $z_{0,90}$. Considerando la simetría de la curva normal tipificada se tiene que $z_{0,90} = -z_{0,10} = -1,28$



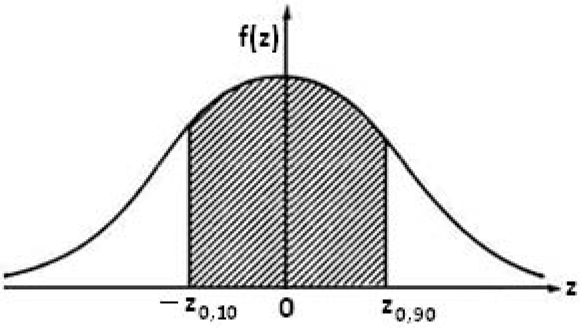
de donde, $z_{0,90} = \dfrac{x-4,5}{0,5} = -1,28 \quad \rightarrow \quad x = 4,5 - 0,5 \times 1,28 = 3,86$

Es decir, el 10% más bajo de la población utiliza la tarjeta en menos del 3,96 % de las operaciones comerciales.

e) El 80% más próximo a la media es $P[a \leq X \leq b] = 0,80$



tipificando $P\left[\frac{a-4,5}{0,5} \leq \frac{X-4,5}{0,5} \leq \frac{b-4,5}{0,5}\right] = P\left[z_{0.90} \leq z \leq z_{0,10}\right] = 0,80$ **, siendo** $z_{0,90} = -z_{0,10}$



$$P\left[-z_{0,10} \leq z \leq z_{0,10}\right] = 0,80 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -z_{0,10} = -1,28 = \dfrac{a-4,5}{0,5} & \rightarrow \quad a = 4,5 - 1,28 \times 0,5 = 3,86 \\ z_{0,10} = 1,28 = \dfrac{b-4,5}{0,5} & \rightarrow \quad b = 4,5 + 1,28 \times 0,5 = 5,14 \end{cases}$$

El 80% más próximo a la media de la población utiliza la tarjeta más de $3,86\%$ y menos de $5,14\%$ en las operaciones comerciales.

34. En una población de mujeres, las puntuaciones de un test de ansiedad-riesgo siguen una distribución normal N(25, 10). Al clasificar la población en cuatro grupos de igual tamaño, ¿cuales serán las puntuaciones que delimiten estos grupos?.

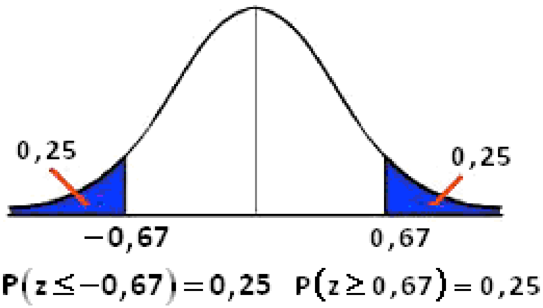
Solución:

Siendo la variable aleatoria X = "Puntuaciones en un test de ansiedad-riesgo"

Las puntuaciones que delimitan estos cuatro grupos serán: el primer Q_1, segundo Q_2 y tercer cuartil Q_3 de la distribución.

$$P(X \leq Q_1) = 0,25 \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{X-25}{10} \leq \frac{Q_1 - 25}{10}\right) = $$

$$= P\left(z \leq \frac{Q_1 - 25}{10}\right) = 0,25$$



$$\frac{Q_1 - 25}{10} = -0,67 \quad \rightarrow \quad Q_1 = 25 - 0,67 \text{ x } 10 = 18,3$$

En la distribución normal la media y la mediana son iguales: $\mu = M_e = Q_2 = 25$

$$P(X \leq Q_3) = 0,75 \quad \rightarrow \quad P\left(\frac{X-25}{10} \leq \frac{Q_3 - 25}{10}\right) = P\left(z \leq \frac{Q_3 - 25}{10}\right) = 0,75 \quad \rightarrow \quad P\left(z \geq \frac{Q_3 - 25}{10}\right) = 0,25$$

$$\frac{Q_3 - 25}{10} = 0,67 \quad \rightarrow \quad Q_3 = 25 + 0,67 \text{ x } 10 = 31,7$$

Por consiguiente,

El primer grupo serían las mujeres con puntuaciones inferiores o iguales a 18,3.
El segundo grupo son aquellas mujeres con puntuaciones entre 18,3 y 25.
El tercer grupo son las mujeres con puntuaciones entre 25 y 31,7.
El cuarto grupo son mujeres que tengan puntuaciones superiores a 31,7.

35. El departamento comercial de una industria alimenticia conoce que 2 de cada 10 consumidores reconocen su producto en una prueba a ciegas.
¿Cuántas pruebas ciegas de sabor deberían hacerse para que la proporción de que los que conocen la marca oscile entre el 16% y el 24% con una probabilidad mínima de 0,8?

Solución:

Reconocen el producto el 20% $(p = 0,2)$ $\quad P(0,16 \leq p_x \leq 0,24) \geq 0,8$

Con la distribución poblacional $N\left(n.p, \sqrt{n.p.q}\right)$, la proporción muestral $p_x \approx N\left(p, \sqrt{\dfrac{p.q}{n}}\right)$

$$p_x \approx N\left(0,2, \sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{n}}\right) = N\left(0,2, \frac{0,4}{\sqrt{n}}\right)$$

$$P(0,16 \leq p_x \leq 0,24) = P\left(\frac{0,16 - 0,2}{0,4/\sqrt{n}} < z < \frac{0,24 - 0,2}{0,4/\sqrt{n}}\right) = P\left(-0,1\sqrt{n} < z < 0,1\sqrt{n}\right) =$$

$$= 1 - 2P\left(z > 0,1\sqrt{n}\right) = 0,8 \quad \rightarrow \quad P\left(z > 0,1\sqrt{n}\right) = 0,1$$

En las tablas de la normal N(0, 1): $\quad 0,1\sqrt{n} = 1,282 \quad \rightarrow \quad n = 165$

Para una probabilidad como mínimo de 0,8 harían falta 165 pruebas.

36. Un Instituto de opinión pública quiere obtener una muestra de votantes. La muestra debe ser suficientemente grande para que la proporción de votos a favor de la consulta inferior al 50% tenga una probabilidad de 0,01.
¿Qué tamaño deberá tener la muestra?, si la intención del voto es realmente del 52%

Solución:

La variable aleatoria X = "Votos obtenidos en la consulta" $\quad X \sim B(n, p) \approx N\left[n.p, \sqrt{n.p.q}\right]$

Sea Y ="Frecuencia obtenida con una muestra n", donde $Y = \dfrac{X}{n} \sim N\left[p, \sqrt{\dfrac{p.q}{n}}\right]$, $p = 0,52$

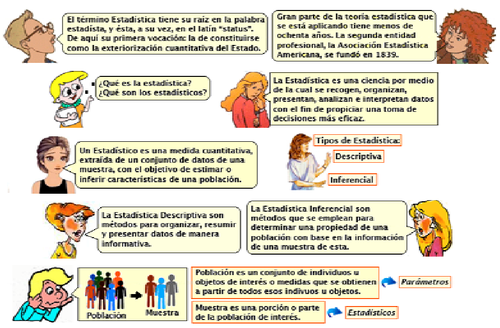
$$Y \sim N\left[0,52, \sqrt{\frac{0,52 . 0,48}{n}}\right] \equiv N\left[0,52, \frac{0,49968}{\sqrt{n}}\right]$$

Hay que determinar el tamaño n con la condición $P\left[Y < 0,50\right] = 0,01$

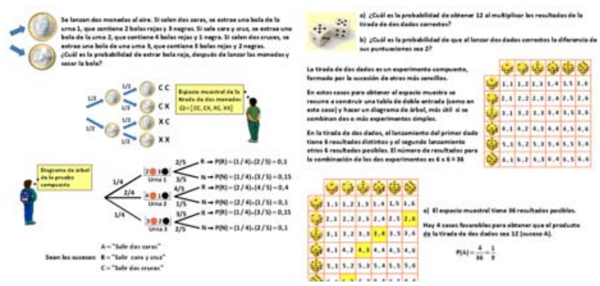
$$P\left[Y < 0,50\right] = P\left[\frac{Y - 0,52}{0,49968/\sqrt{n}} < \frac{0,50 - 0,52}{0,49968/\sqrt{n}}\right] = P\left[z < \frac{-0,02 . \sqrt{n}}{0,49968}\right] = 0,01$$

$$P\left[z < \frac{-0,02\,.\sqrt{n}}{0,49968} \right] = P\left[z > \frac{0,02\,.\sqrt{n}}{0,49968} \right] = 0,01 \quad \rightarrow \quad \frac{0,02\,.\sqrt{n}}{0,49968} \geq 2,33$$

$$n \geq \left[\frac{2,33.0,49968}{0,02} \right]^2 \geq 3389$$



El término Estadística tiene su raíz en la palabra estadista, y ésta, a su vez, en el latín "status". De aquí su primera vocación: la de constituirse como la exteriorización cuantitativa del Estado.
Gran parte de la teoría estadística que se está aplicando tiene menos de ochenta años. La segunda entidad profesional, la Asociación Estadística Americana, se fundó en 1839.
¿Qué es la estadística? ¿Qué son los estadísticos?
La Estadística es una ciencia por medio de la cual se recogen, organizan, presentan, analizan e interpretan datos con el fin de propiciar una toma de decisiones más eficaz.
Un Estadístico es una medida cuantitativa, extraída de un conjunto de datos de una muestra, con el objetivo de estimar o inferir características de una población.
Tipos de Estadística:
Descriptiva
Inferencial
La Estadística Descriptiva son métodos para organizar, resumir y presentar datos de manera informativa.
La Estadística Inferencial son métodos que se emplean para determinar una propiedad de una población con base en la información de una muestra de esta.
Población
Muestra
Población es un conjunto de individuos u objetos de interés o medidas que se obtienen a partir de todos esos indivuos u objetos.
Parámetros
Muestra es una porción o parte de la población de interés.
Estadísticos



COMUNIDAD ESCOLAR
Un empleado furioso
La empresa familiar está formada por un sobrino, dos tíos y cinco parientes, constituidos en Sociedad Limitada.
La dirección está a cargo del sobrino Luis Quintana
El bloque laboral está formado por 5 parientes, 7 operarios y 2 encargados.
El año 1986 es bueno para los negocios y una de las secciones requiere un empleado más.
El señor Quintana entrevista a Raúl, que necesita un puesto de trabajo.

Un empleado furioso
La empresa familiar está formada por un sobrino, dos tíos y cinco parientes, constituidos en Sociedad Limitada.
La dirección está a cargo del sobrino Luis Quintana.
Muebles Quintana es una pequeña fábrica en Fuenterrebollo (Segovia)
El bloque laboral está formado por 5 parientes, 7 operarios y 2 encargados.
El año 1986 es bueno para los negocios y una de las secciones requiere un empleado más.
El señor Quintana