

DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL DE UNA POBLACIÓN NORMAL

Si consideramos todas las muestras aleatorias de tamaño n que se pueden extraer de una población, la variable aleatoria que a cada muestra le hace corresponder su media, se llama **media muestral** y se escribe $\bar{X}$.

$$\bar{X} : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \bar{x}$$

Distribución: La distribución de la media muestral, $\bar{X}$, de las muestras aleatorias de tamaño n que se pueden extraer de una población de media μ y desviación típica σ , sigue una distribución normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

INTERVALO DE CONFIANZA PARA LA MEDIA POBLACIONAL (con desviación típica conocida).
Confianza, error y tamaño de la muestra

$$I.C. = \bar{X} \pm E, \text{ siendo el error } E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ luego } I.C. = \left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Por tanto, μ está dentro de este intervalo con un nivel de confianza $1 - \alpha$

$$P\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Error máximo admisible

El error máximo admisible en la estimación de la media poblacional, utilizando el $I.C.$, es su radio

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

1.-

Las puntuaciones en la Escala de Inteligencia para Adultos de Wechsler (WAIS) siguen en una población una distribución normal de media 100 y desviación típica 16. Al extraer una muestra aleatoria simple de 25 individuos, calcular:

- Probabilidad de que la media de esos 25 individuos sea inferior a 95
- Probabilidad de que la media esté comprendida entre 98 y 102.

2.- La longitud de los pepinos murcianos sigue una distribución normal de media 20 cm y varianza 36 cm cuadrados, escogida una muestra aleatoria simple de tamaño 81, calcular la probabilidad de que la media de dicha muestra supere los 31 cm.

Las especificaciones de un fabricante de botes de pintura dicen que el peso de los botes sigue una distribución normal de media 1 kg de pintura y una desviación estándar de 0,1 kg.

- ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la media muestral de los pesos de una muestra aleatoria simple de 20 botes?
- Se ha comprado un lote del que se ha tomado una muestra de 20 botes y en el que la media de los pesos obtenidos es de 0,98 kg. Construye un intervalo de confianza del 95 % para la media.

rolya Gyorgy

3. El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:
- Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
 - Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7,8 y 9,5 horas.

4

El gasto mensual de los jóvenes de una región durante los fines de semana sigue una distribución normal de media 25 € y desviación típica de 3 €. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 64 jóvenes tenga un gasto medio comprendido entre 23,85 € y 26,15 €?

Distribución de la proporción muestral e intervalo de confianza

Si se toman muestras de tamaño $n \geq 30$ de una población con una distribución binomial de parámetros p y $q = (1 - p)$, la **distribución muestral de proporciones** se aproxima a una distribución normal:

Media : $\mu = p$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$

$$\hat{P} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$$

Un **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una característica en una población, con un nivel de confianza $1 - \alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n , es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \right)$$

donde $\hat{p}$ es la proporción de la muestra

$z_{\alpha/2}$ es el nivel crítico para el nivel de confianza α

5.-Se sabe que el 10 % de los habitantes de una determinada ciudad va regularmente al teatro. Se toma una muestra al azar de 100 habitantes de esta ciudad, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que al menos el 13 % de ellos vaya regularmente al teatro?

6.- En las elecciones generales del país, el presidente del gobierno elegido por los ciudadanos ha recibido un 64 % de los votos favorables. Se escoge una muestra al azar de 120 votantes.

- ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de votantes que han votado al presidente de la muestra?
- Halla la probabilidad de que más del 70 % de los votantes de la muestra votasen al presidente

7.-La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en mese):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Halla un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

8.-

En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar la temperatura media de sus enfermos. La media de la muestra ha sido de $37,1^{\circ}\text{C}$, y la desviación típica de la población de $1,04^{\circ}\text{C}$. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.

9.-Para hacer un estudio sobre el precio/día de una habitación doble en hoteles de cuatro estrellas en Canarias, se elige una muestra de 64 de estos hoteles y se obtiene un precio/día medio de 56 € con una desviación típica de 6 €. Se pide: a) Determina el intervalo de confianza para el precio/día medio de una habitación doble en un hotel de cuatro estrellas en Canarias con un nivel de confianza del 97 %. b) Halla el tamaño de la muestra que se debe tomar para que el error máximo sea de 2 €, con un nivel de significación del 1 %.

10.-Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultado que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago. a) Determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago. b) Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3 % y un nivel de confianza del 94 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuantos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?

11.-En una encuesta se pregunta a 10.000 personas cuántos libros lee al año, obteniéndose una media de 5 libros. Se sabe que la población tiene una distribución normal con desviación típica 2. a) Halla un intervalo de confianza al 80 % para la media poblacional.. b) Para garantizar un error de estimación de la media poblacional no superior a 0,25 con un nivel de confianza del 95 %, ¿a cuántas personas como mínimo sería necesario entrevistar?

12.-El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 10^{-2} UI / l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90 %, el intervalo de confianza (805608 , 8 08392) para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra. a) ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas? b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? Ejercicios planteados por las distintas CCAA como muestra para la PAU 2025 - MCS2 15 c) Uno de los dos intervalos siguientes: (805681 , 8 08319) y (805514 , 8 08486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

13.-Un Instituto de opinión pública quiere obtener una muestra de votantes. La muestra debe ser suficientemente grande para que la proporción de votos a favor de la consulta inferior al 50% tenga una probabilidad de 0,01. ¿Qué tamaño deberá tener la muestra?, si la intención del voto es realmente del 52%

14.-Se quiere conocer la permanencia media de los pacientes de un hospital, con el fin de estudiar una posible ampliación del mismo. Se tienen datos referidos a la estancias, expresada en días, de 800 pacientes, obteniéndose los siguientes resultados: $\bar{x}= 8,1$ días ; $s =9$ días. Se pide obtener un intervalo de confianza del 95 % para la estancia media

15.-Se realiza una encuesta para conocer la proporción de españoles a los que no le gusta el fútbol, tomando una muestra aleatoria de tamaño 100. Por análisis anteriores se conoce que dicha proporción es del 40%. Calcular la probabilidad de que la proporción muestral sea superior al 46%.

16.-De una muestra aleatoria de 2100 personas de una población hay 630 que leen un determinado diario. Calcular el intervalo de confianza para la proporción poblacional para un nivel de confianza del 99 %

17.-Un agricultor quiere estimar el peso medio de las naranjas que produce, con un error menor de 10 g, empleando una muestra de 81 naranjas. Sabiendo que la desviación típica poblacional es de 36 g, ¿cuál será el máximo nivel de confianza con que realizará la estimación?

18.-

[País Vasco] Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \text{ puntos} \quad \sigma = 15 \text{ puntos}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación: "El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94'5 puntos y 101'5 puntos". ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

19.-La desviación típica de las estaturas de los soldados es de 5,3 cm. ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para estimar la estatura media, μ , de la población con un error menor que 0,5 cm y con un nivel de confianza del 95%?

20.-En una ciudad residen 1250 familias. Se seleccionó una muestra aleatoria de un 20 % de ellas y se les preguntó si disponían de gas ciudad en su vivienda. Sabiendo que todas las familias seleccionadas respondieron y que se obtuvo un total de 75 respuestas afirmativas. Se pide: a) ¿Qué estimación puntual podríamos dar para el porcentaje de familias de esa ciudad que disponen de gas ciudad en su vivienda?. b) ¿Qué error máximo cometeríamos con dicha estimación puntual con un nivel de confianza del 95 %?

21.-La media de edad de las personas que se presentan a una prueba es de 18,1 años, y su desviación típica, 0,6 años. Se toman al azar 100 de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que su edad media esté comprendida entre 17,9 y 18,2 años?

22.-De una muestra de 400 mazorcas hemos hallado su media, $\bar{x} = 193$ g, y su desviación típica, $s = 33$ g. Con estos resultados afirmamos que la media de la población, μ , está en el intervalo (190, 196). ¿Con qué nivel de confianza efectuamos la afirmación?

23.-

» La estatura de los jóvenes de una ciudad sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 90 % de las medias de las muestras de 81 jóvenes están en (173,4; 175,8), halla μ y σ .

24.-La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1,75 m. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0,16$ m². a) Construye un intervalo, de un 95 % de confianza, para la media de las estaturas de la población. b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90 %?

25.-Una muestra aleatoria de tamaño 100, extraída de una población normal de varianza 81, presenta una media muestral igual a 150. a) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la media poblacional. b) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional y compararlo con el anterior. c) Si se quiere tener una confianza del 95 % de que su estimación se encuentra a una distancia máxima de 1,2 de la verdadera media poblacional, ¿cuántas observaciones adicionales deben tomarse?

26.-En una muestra de 64 turismos de gasolina, se observó que el consumo medio fue de 9,36 L cada 100 km con una desviación típica de 1,4 L. a) Obtén un intervalo de confianza del consumo medio en los turismos de gasolina al 96%. b) ¿De qué tamaño debería ser la muestra si, con la misma confianza, queremos que el error máximo cometido en la estimación sea 0,25 L? c) ¿Cuál sería el tamaño mínimo de la muestra si, con el mismo nivel de confianza, quisiéramos que el error máximo fuera de 0,5 litros?

27.-En un control de calidad se analizó una muestra aleatoria de 750 tornillos resultando defectuosos 80 de ellos. Hallar:

- a) Un intervalo de confianza para la proporción de tornillos defectuosos en el conjunto de producción con 99% de confianza.
- b) ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación anterior?
- c) Si deseamos que el error cometido, con el mismo nivel de confianza, sea la décima parte **dele apartado anterior, ¿cuál ha de ser el tamaño de la muestra?**

28

► En una muestra de 80 personas hay 10 de ellas con Rh⁺.

Estimar p (proporción de Rh⁺ en la población) mediante un intervalo con un nivel de confianza del 95,5 %.

29

Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1.480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros: a) Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público. b) Si se quiere que el error máximo de la estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %

30

Un estudio electoral con una muestra de 400 electores, obtiene un intervalo para la proporción de votos para un partido de (0,23; 0,31). Averigua cuánto vale la proporción muestral, cuál es el nivel de confianza y cuál es el error máximo cometido en el intervalo anterior.

31.-Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de la universidad, se encontró que un tercio hablaban el idioma inglés.

- a) Halla, con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo para estimar la proporción de alumnos que hablan el idioma inglés entre los alumnos de la universidad.
- b) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01 con el mismo nivel de confianza del 90 %. ¿Cuántos individuos ha de tener la muestra?

32.-Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente: a) Halla, con un nivel de confianza del 94 %, un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente. b) En las mismas condiciones del apartado anterior, se realiza la experiencia para conseguir una cota de error del 0,01. ¿Cuál sería el tamaño de la muestra?

33.- En una población de 2 000 conductores se seleccionó una muestra aleatoria de 200. A los conductores seleccionados se les preguntó si llevaban en sus vehículos cadenas para utilizar en caso de que hubiese nieve en las carreteras. A partir de la información recogida se obtuvo el siguiente intervalo de confianza al 95 % para la proporción de conductores de esa población que llevaban en sus vehículos cadenas para la nieve: (0,172 , 0,228). Determinar, justificando la respuesta:

- a) La estimación puntual que daríamos para la proporción de conductores de esa población que llevan en su vehículo cadenas para la nieve.
- b) El error máximo que estaríamos cometiendo, con una confianza del 95 %, con dicha estimación puntual.

34.-Se estima que el tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto tiene una distribución normal con desviación típica 0,05 segundos. Si se quiere conseguir que el error de estimación de la media no supere los 0,01 segundos con un nivel de confianza del 99%, ¿qué tamaño mínimo ha de tener la muestra de tiempos de reacción?

35.-Se hizo una encuesta a 325 personas mayores de 16 años y se encontró que 120 iban al teatro regularmente.

Halla, con un nivel de confianza del 94% , un intervalo para estudiar la proporción de los ciudadanos que van al teatro regularmente.

36

En una piscifactoría, se inició un cultivo con 90 ejemplares, de los cuales 64 llegaron a la edad adulta. De los que llegaron a la edad adulta, el peso medio fue de 3,1 kilos con una desviación típica de medio kilo. a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 90%. b) Obtener un intervalo de confianza para el peso medio que alcanzan los ejemplares que llegan a la edad adulta, con un nivel de confianza del 95%.

37

En una empresa se quiere racionalizar el gasto en teléfono móvil de sus agentes comerciales. Para eso se hace un estudio sobre una muestra y se obtiene "con una confianza del 95 % , la media del gasto mensual en teléfono móvil está entre 199,71 y 220,29 €". Suponiendo que el gasto en teléfono móvil es una variable normal:

- a) Calcula el gasto medio muestral y el error cometido en la estimación.
- b) Si la desviación típica es de 42 euros, ¿qué tamaño tiene la muestra?

(septiembre 2018) Sol: a) $\bar{x} = 210 \text{ €}$, $E = 10,29$ b) $n = 64$

38

- 9. El tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución $N(\mu, \sigma = 15)$.
- a) Elegida una muestra de 36 empleados de la empresa, se obtiene el I.C. (321,1 , 330,9) para la media μ . Calcula el tiempo medio de formación de los empleados de la muestra y el nivel de confianza con el que se construyó el intervalo.
- b) Supongamos que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de esa empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal $N(\mu = 326, \sigma = 15)$. Calcula la probabilidad de que el tiempo medio de formación no supere las 330 horas, en muestras de 36 empleados.

(Septiembre 2017 Opc B) Solución:

- a) La media muestral 326 horas. El nivel de confianza (n.c.) es del 95 %
- b) $P(\bar{X} \leq 330) = 0,9452$

39.-Al estudiar una variable con desviación típica 3 se obtiene un intervalo de confianza de (6,66, 8,34) al 95%. Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo.

40

El peso (en gramos) de las empanadas que salen de un horno sigue una distribución normal con una desviación típica de 120 g. Si se estableció el *I.C.* (1499,9 , 1539,1) como *I.C.* para la media a partir de una muestra de 144 empanadas,

- a) ¿Cuál es el valor de la media muestral? ¿Con qué nivel de confianza se construye el intervalo?
- b) ¿Cuántas empanadas, como mínimo, deberíamos pesar para que el nivel de confianza del intervalo anterior sea del 99 % ?

unio 2018 Opc A) Sol: a) 1519,5 g es la media muestral y el n.c. es del 95 % b) 249 empanadas

41

Una empresa informática lanza al mercado un producto del que se sabe que su vida útil, en años, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 1,6$ años.

- a) Para una muestra aleatoria de 100 productos, la vida media útil fue de 4,6 años. Calcula un intervalo del 95 % , de confianza para estimar la vida útil del producto. Interpreta el intervalo obtenido.
- b) Supongamos que la vida útil del producto sigue una distribución $N(4,6 , 1,6)$ y se toma una muestra aleatoria de 64 productos. Calcula la probabilidad de que la vida media útil de la muestra esté entre 4,25 y 4,95 años.

