FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

Función real de variable real. Dominio y recorrido.

Una función es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto X un único elemento y de un conjunto Y. A y se le llama imagen de x por f y se escribe $y = f(x)$. La x se llama variable independiente, y la y, dependiente. El conjunto X se llama dominio de f, $D(f)$, y el conjunto de todas las imágenes de los elementos de X se llama recorrido o imagen de f, $Re(f)$ o $Im(f)$

Leonhard Euler

Ejemplo: $\sqrt{4} = \pm 2$, tiene 2 soluciones, pero una función definida con la raíz cuadrada, sólo puede tener una solución, la positiva o la negativa.

$y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ son 2 funciones diferentes. $D(f) = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

Gottfried Wilhelm Leibniz

Ejercicio: $f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$, $\sqrt{\triangle}$ $\triangle \equiv$ radicando

La función no existe en los puntos en los que el radicando $\triangle < 0 \Rightarrow \boxed{\triangle \geq 0}$

$x - 3 \geq 0$ Resolvemos la inecuación.

$x \geq 3$, $[3, \infty)$, $Df(x) = [3, \infty)$

$Im\, f(x) = [2, \infty)$

x	f(x)
2	∄
3	2
4	3

Isaac Newton

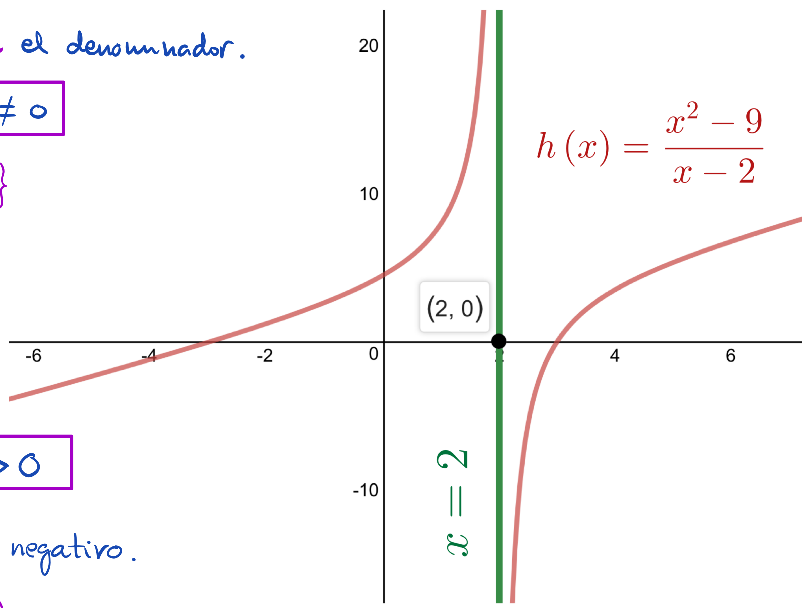
Ejercicio: $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 2}$

La función no existe en los puntos que anulan el denominador.

Son puntos válidos si verifican $\boxed{\text{denominador} \neq 0}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow Dh(x) = \mathbb{R} - \{2\}$

La función tiende a 2, pero nunca alcanza la recta $x=2$. Se dice que $x=2$ es una asíntota vertical (las estudiaremos más adelante).



Ejercicio: $f(x) = \log(x+1)$ $\boxed{\text{argumento} > 0}$

La función no existe si el argumento es cero o negativo.

$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow Df(x) = (-1, \infty)$

Ejercicio: $g(x) = \dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$

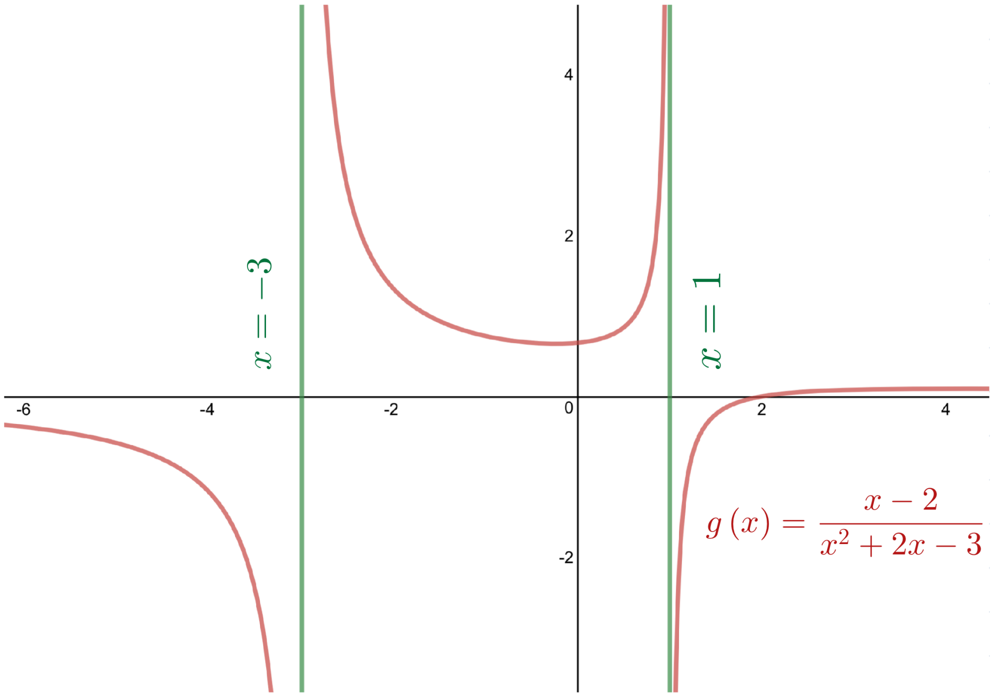
La función no existe en los puntos que anulan el denominador.

$x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$x_1 = 1, \; x_2 = -3$

$D\,g(x) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

La función tiende a -3 y 1, pero nunca alcanza las rectas $x = -3$ ni $x = 1$ que son asíntotas verticales.



Ejercicio: $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

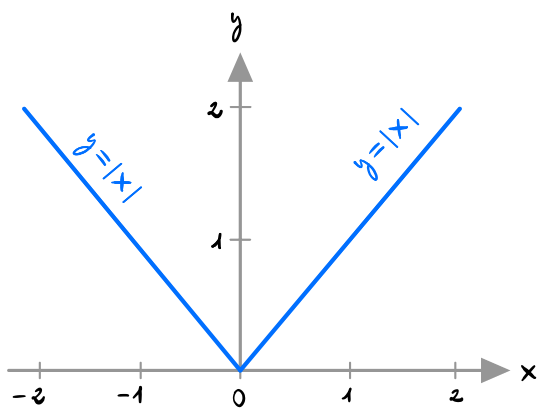
La función no existe en los puntos en los que el radicando $\Delta < 0$.

$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2, \; [-2, +\infty)$

$D\,h(x) = [-2, +\infty) - \{-2, 2\} = (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Funciones definidas en trozos o intervalos

Ejemplo: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$



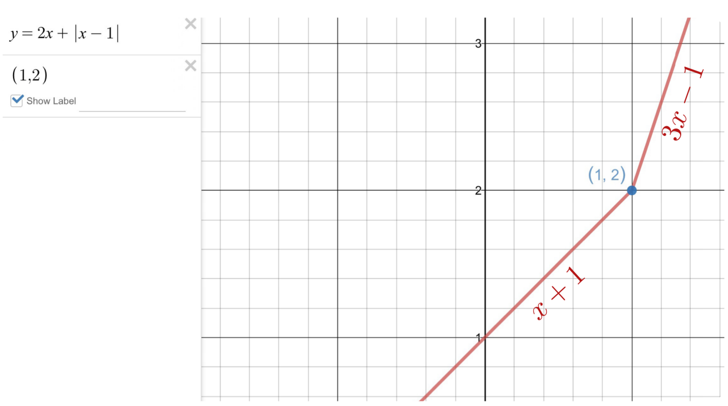
Valor absoluto $y = |x|$

Ejercicio: $g(x) = 2x + |x - 1|$

Vamos a escribir la función en intervalos:

$f(x) = \begin{cases} 2x + x - 1 & \text{si } x - 1 \geq 0, \; x \geq 1 \\ 2x - (x-1) & \text{si } x - 1 < 0, \; x < 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \geq 1 \longrightarrow [1, +\infty) \\ x + 1 & \text{si } x < 1 \longrightarrow (-\infty, 1) \end{cases}$



$x + 1$ | 1 | $3x - 1$

punto de frontera

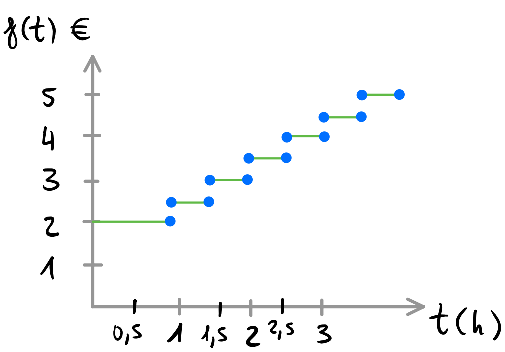
Ejercicio: En un aparcamiento se cobra un fijo de 2 € y, a partir de la 1ª hora, 50 céntimos por cada media hora de uso. Calcula la función que describe el coste en función del tiempo.

$2 € = 200 c$ fijo No depende del tiempo, t (horas)

$200 + 50 \cdot 2(t-1) = 200 + 100(t-1)$ pasadas, t (horas) $\Rightarrow 2 + 1 \cdot (t-1) €$

$$f(t) \begin{cases} 200\ c & \text{si } t \leqslant 1h \\ 100 + 100t\ c & \text{si } t > 1h \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 € & \text{si } t \leqslant 1h \\ 2 + (t-1) € & \text{si } t > 1h \end{cases}$$

Sólo $t = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$



t	$f(t)$
0	1
1	2
2	3
3	4

Ejercicio: Para la siguiente función, calcula *f(-2), f(-1), f(0), f(1)* y *f(2)* y determina su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & \text{si } x \leqslant 0 \quad (-\infty, 0] \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \quad (0, \infty) \end{cases}$$

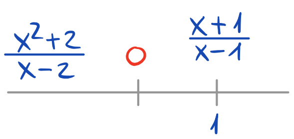
$f(-2) = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$, $f(-1) = \frac{3}{-3} = -1$, $f(0) = \frac{2}{-2} = -1$

$f(1) = \frac{2}{0} = \infty \nexists$, $f(2) = \frac{3}{1} = 3$

La función $\frac{x^2+2}{x-2}$ no existe cuando $x-2=0$, $x=2 \notin (-\infty, 0]$ está fuera del intervalo $x \leqslant 0$; no es problema

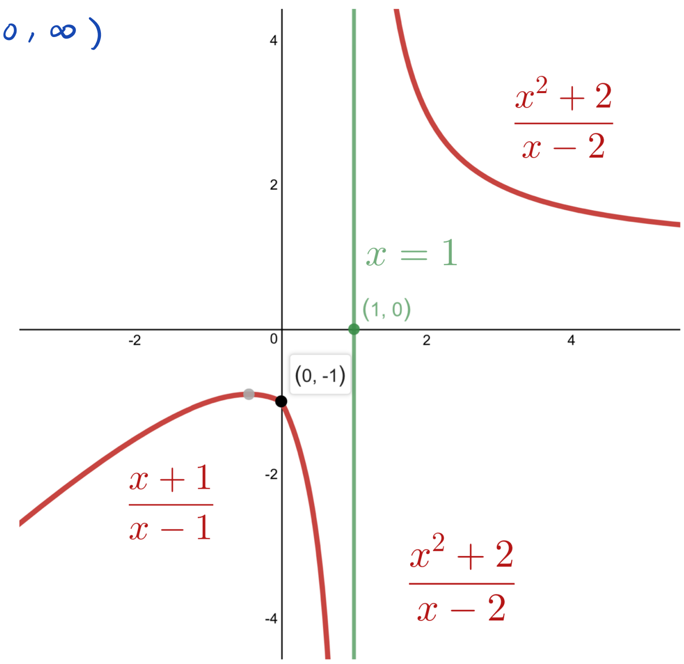
La función $\frac{x+1}{x-1}$ no existe cuando $x-1=0$, $x=1 \in (0, \infty)$

Entonces sí hay un problema. Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$



Podemos expresar la función en línea.

$f(1) = \infty, \nexists$



Composición de funciones

Componemos una función con otra, f con g, haciendo actuar una después de la otra.

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f[g(x)]}$$

Para que el punto $a \in D(f \circ g)$ $\exists\, g(a)$, $a \in D(g)$, $g(a) \in D(f)$

Ejemplo: $f(x) = (x-3)^2$ | $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x+1-3)^2 = x^2 - 4x + 4$

$g(x) = x+1$ | $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

Función recíproca: inversa de la composición de funciones

$$\boxed{f^{-1}(a) = b \Rightarrow f(b) = a}$$; f^{-1} es la **función recíproca** de f.

Por la definición, si componemos $\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x}$ identidad

Una función $y = f(x)$ tiene función recíproca sólo cuando es **inyectiva**, es decir, si a cada valor de y le corresponde un único valor de x.

Ejercicio: $y = x^3 - 1$

Intercambio las variables x e y.

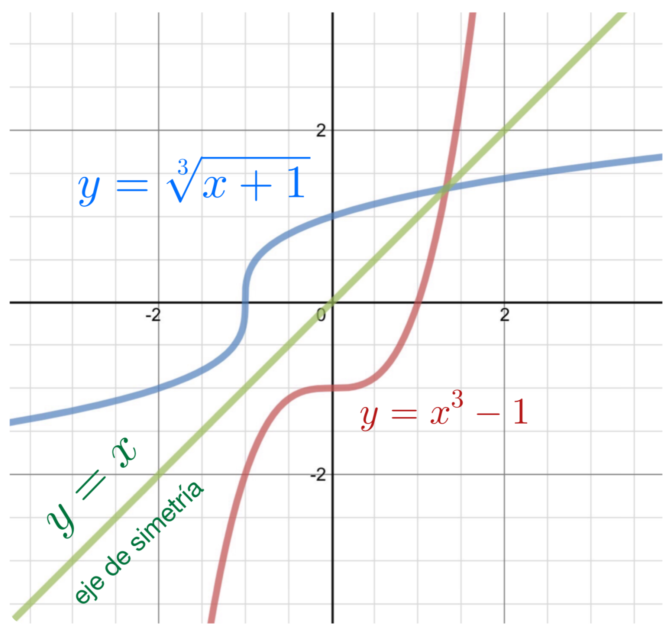
$x = y^3 - 1 \Rightarrow$

Despejo y: $y = \sqrt[3]{x+1}$ Comprobación:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 1 \\ f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x+1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} f \circ f^{-1} &= \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 - 1 = x \\ f^{-1} \circ f &= \sqrt[3]{x^3 \cancel{-1} \cancel{+1}} = \sqrt[3]{x^3} = x \end{aligned}$$

Ejemplo numérico: $x = 7$, $f(7) = 7^3 - 1 = 342$

$f^{-1}(342) = \sqrt[3]{342+1} = 7$



Función recíproca

Ejercicio: $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ Calcula f^{-1} Intercambio las variables x e y.

$x = \dfrac{2y+1}{3} \Rightarrow 3x = 2y + 1 \Rightarrow y = \dfrac{3x-1}{2} = f^{-1}(x)$

Comprobación: $f \circ f^{-1}(x) = \dfrac{\cancel{2} \cdot \dfrac{3x-1}{\cancel{2}} + 1}{3} = \dfrac{3x \cancel{-1} \cancel{+1}}{3} = \dfrac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x$

Ejercicio: $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$

Intercambio las variables x e y

$x = \sqrt{2y-3}$

$x^2 = 2y-3$

$2y = x^2+3$

$y = \frac{x^2+3}{2} = f^{-1}(x)$

Aparentemente, el Dominio de f^{-1} es $\mathbb{R}$, pero debemos antes comprobar dónde existe f.

$Df(x) = ?$

$2x-3 \geq 0$

$x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$

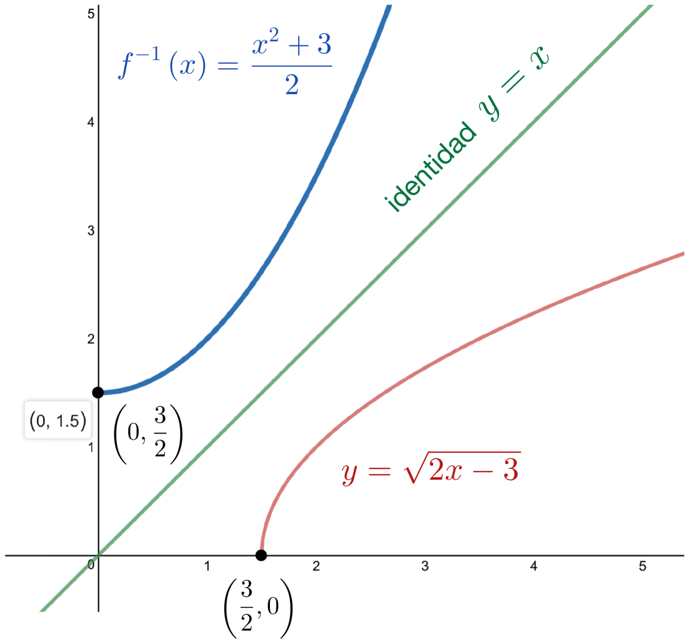
$D(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

La imagen de f es el dominio de f^{-1}

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, Punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Por lo tanto, $D(f^{-1}) = [0, +\infty)$

La imagen $f^{-1}(0) = \frac{3}{2}$, Punto $\left(0, \frac{3}{2}\right)$



Comprobación: $f \circ f^{-1}(x) = \sqrt{\cancel{2}\cdot\left(\frac{x^2+3}{\cancel{2}}\right)-3} = \sqrt{x^2+\cancel{3}-\cancel{3}} = x$

Sucesiones de números reales

Una sucesión es una función real cuyo dominio son los números naturales mayores que cero: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$. Llamamos a_n al término general:

Ejemplo: $a_n = n^2$

$a_1 = 1^2 = 1$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 3^2 = 9$

$\ldots$

La sucesión $a_n = \{1, 4, 9 \ldots\}$

Ejemplo: $a_n = \frac{1}{n}$

$a_1 = \frac{1}{1} = 1$

$a_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$a_3 = \frac{1}{3} = 0{,}\hat{3}$

$\ldots$

La sucesión $a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$

Una sucesión es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ (para todo n).

Una sucesión es decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$.

Una sucesión está acotada superiormente si existe un número $M \geq a_n$ $\forall n$. (Cota superior)

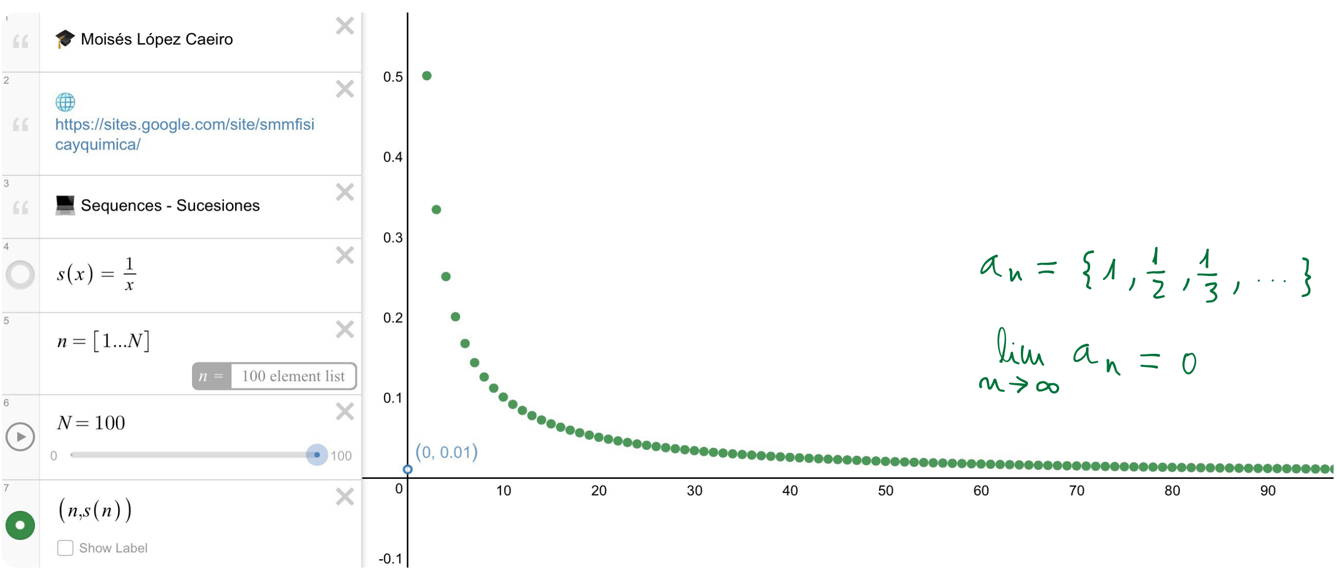
Una sucesión está acotada inferiormente si existe un número $m \leq a_n$ $\forall n$. (Cota inferior)

Una sucesión es convergente $\begin{cases} \text{si es creciente y está acotada superiormente} \\ \text{es decreciente y está acotada inferiormente} \end{cases}$

Una sucesión es divergente si $\begin{cases} \text{si es creciente y NO está acotada superiormente} \\ \text{es decreciente y NO está acotada inferiormente} \end{cases}$

Ejemplo: La sucesión $a_n = \{1, 4, 9 \ldots\}$ es creciente y divergente.

La sucesión $a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ es decreciente y convergente.



Límite de una sucesión

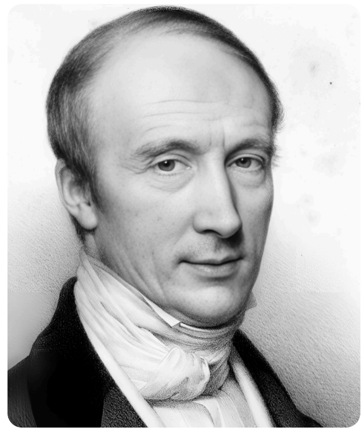
Si $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l}$ se dice que la sucesión a_n es convergente o que converge a l.

Si $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty}$ se dice que la sucesión a_n es divergente o que diverge a $\pm\infty$.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \{1, 4, 9 \ldots\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ Diverge a $+\infty$.

La sucesión $a_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ Converge a 0.

Límite de una función



Augustin Louis Cauchy

$a, b \in \mathbb{R}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = b}$ Límite de una función en un punto

El límite en el punto $x = a$ es b.

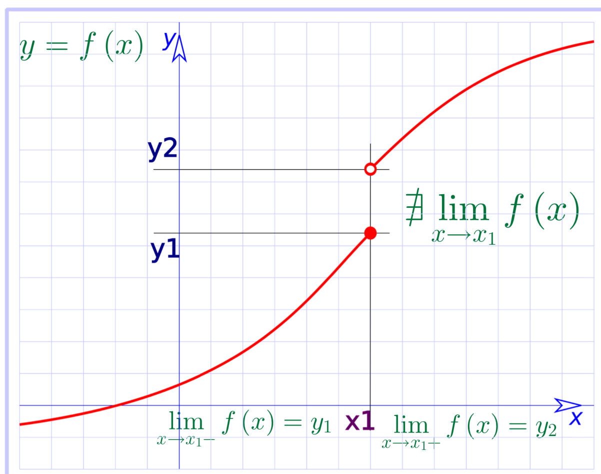
Tipos de límites

Límites laterales

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b$

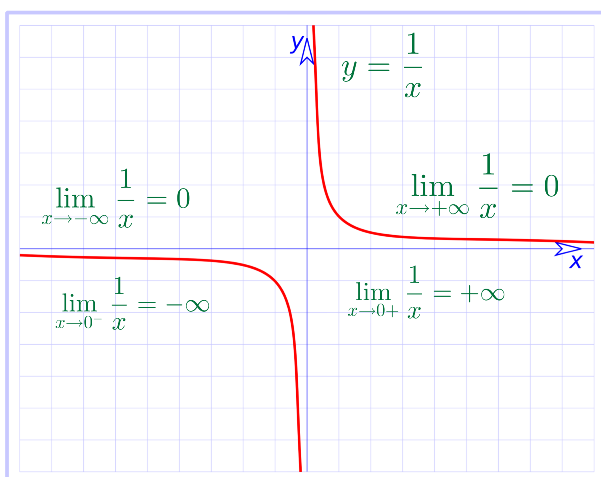


Límites infinitos $y = f(x) \longrightarrow \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



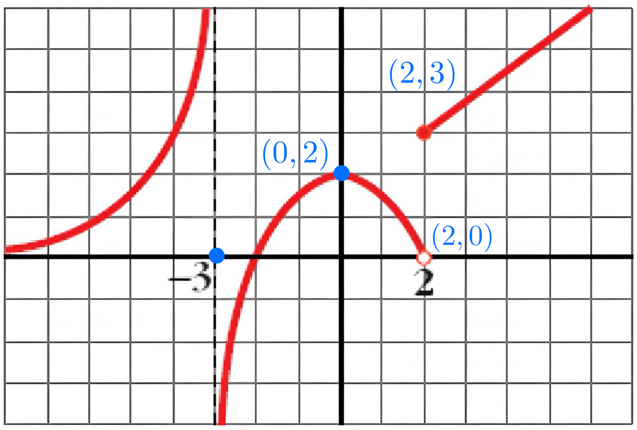
Límites en el infinito $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ejemplos gráficos de límites



$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$

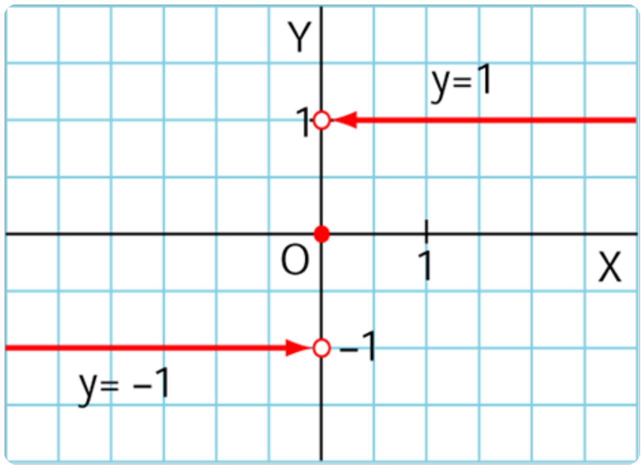
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$

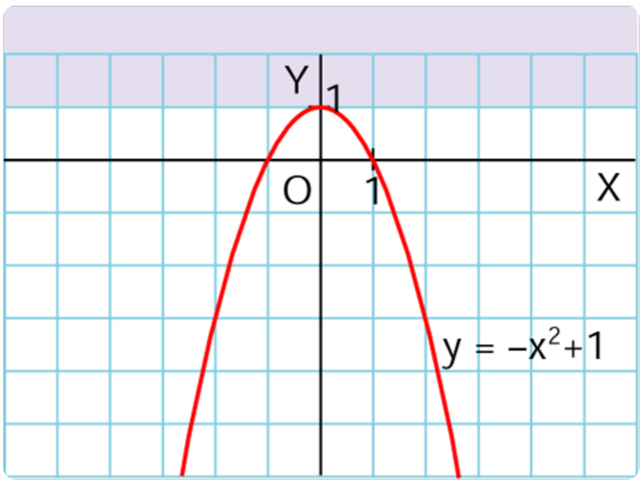
$\lim_{x\to -0^-} f(x) = 2$

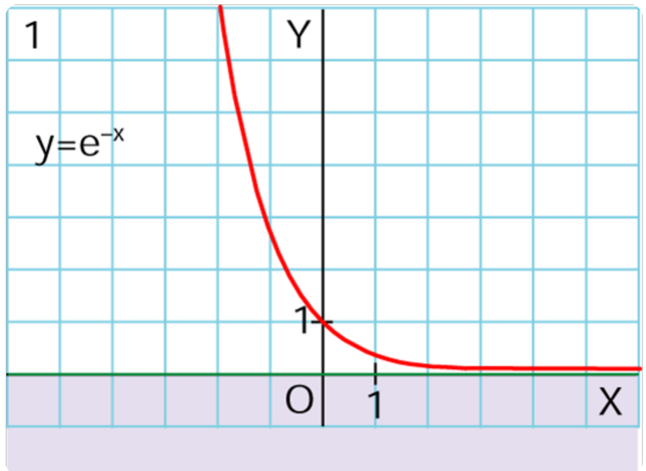
$\lim_{x\to -0^+} f(x) = 2$



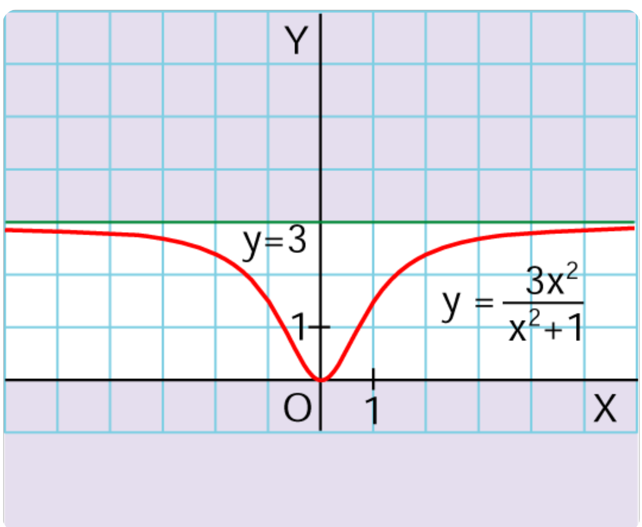
$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

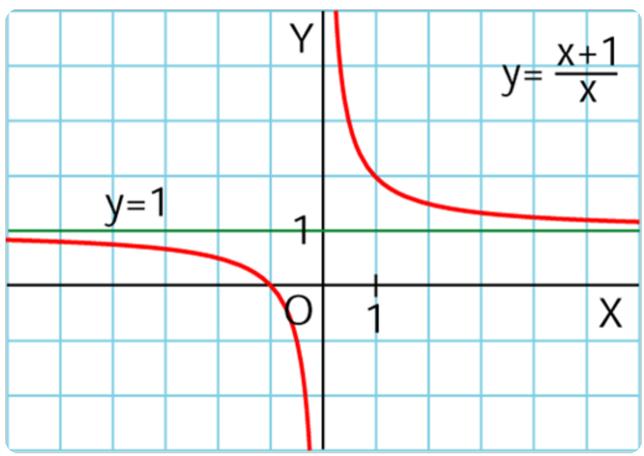




$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

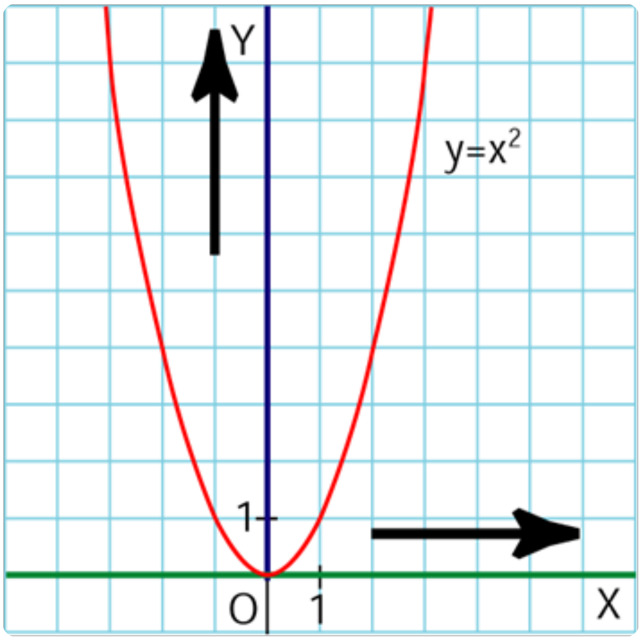


$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

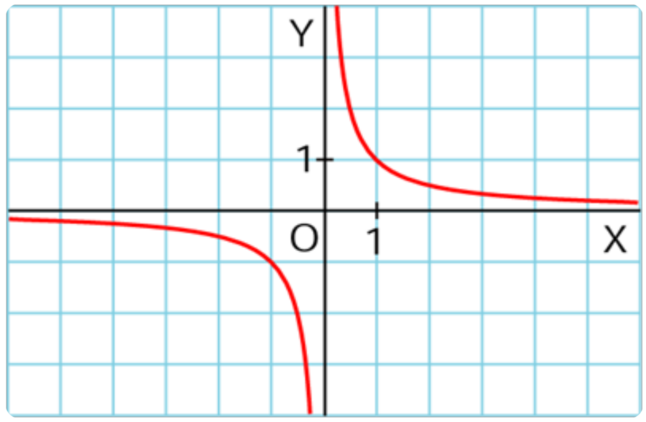


$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

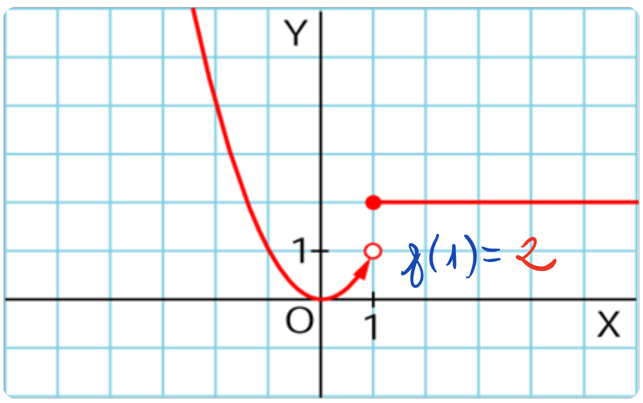


$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

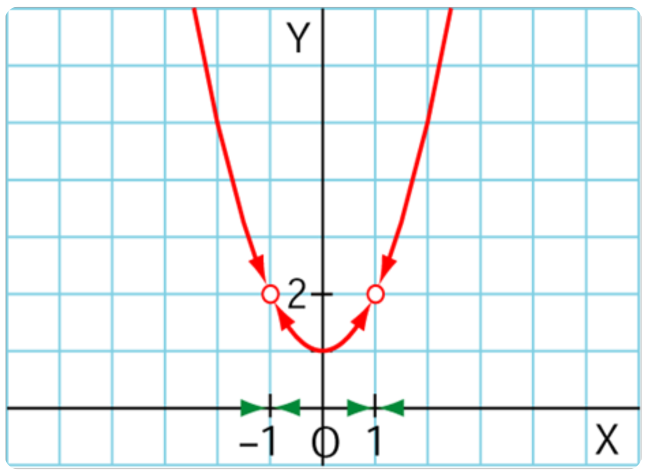


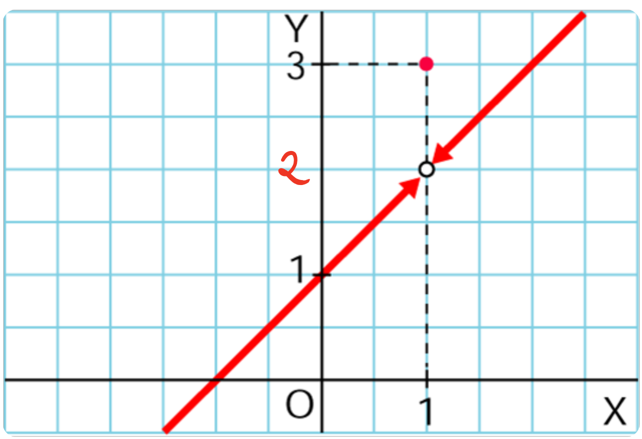
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

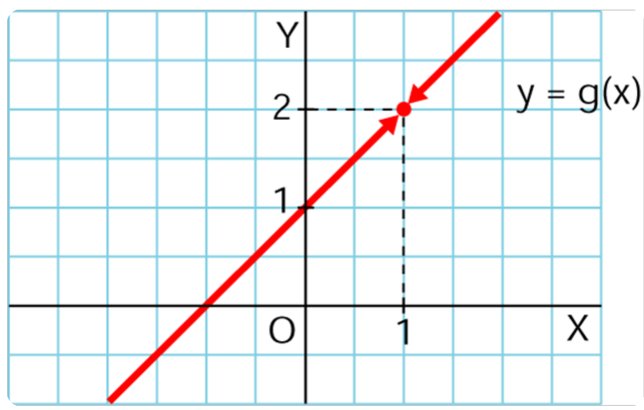


$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$





$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$



Operaciones básicas con límites

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

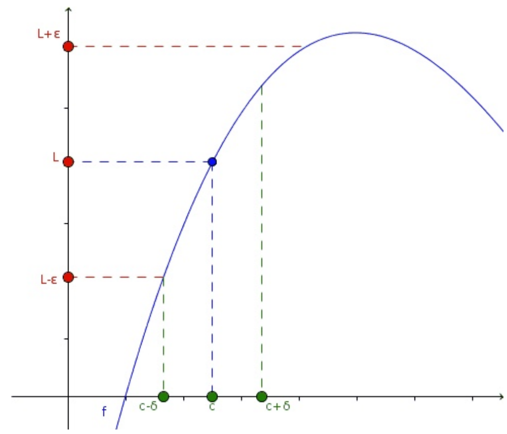
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c$

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \cdot c$

- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = b^c$

siempre que no haya indeterminaciones.

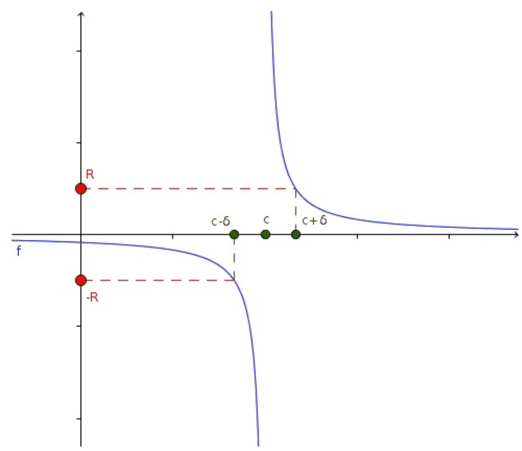


Operaciones con 0 e ∞

$\infty^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$ $k^\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \\ \nexists & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$\infty + k = \infty$ $k \cdot \infty = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$ $\infty + \infty = \infty$ $\dfrac{k}{\infty} = 0$	$+\infty^{+\infty} = \infty$ $(+\infty)^{-\infty} = 0$ $0^{+\infty} = 0$ $0^{-\infty} = +\infty$

$\dfrac{k}{0}\ (k \neq 0) = \infty^*$ Hay que comprobar si es $\pm\infty$ (depende del signo de k)

$\dfrac{+1}{0} = +\infty$ $\dfrac{-1}{0} = -\infty$



Indeterminaciones

$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$	$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	0^0	1^∞	∞^0

Es indeterminado el límite de una función en la que, simultaneamente, la base tiende a 1 y el exponente a ∞.

Una indeterminación se puede resolver utilizando el cálculo de límites.

Georg Ferdinand Cantor

Cálculo de límites con indeterminaciones

Cómo resolver una indeterminación ∞/∞

Sea una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y el límite $L = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

Dividimos numerador y denominador por la potencia de mayor grado.

- grado $p <$ grado $Q \Rightarrow L = 0$
- grado $p >$ grado $Q \Rightarrow L = \pm\infty \leftarrow$ Razón entre los coeficientes de mayor grado
- grado $p =$ grado $Q \Rightarrow L = \frac{a_n}{b_n}$ coeficientes de mayor grado

$\frac{+}{+} = +$	$\frac{+}{-} = -$
$\frac{-}{+} = -$	$\frac{-}{-} = +$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3-2} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ IND}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow y \to 0$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot x^3-2}{1\cdot x^2+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ IND}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{0+0} = \frac{1}{0} = +\infty \Rightarrow y \to \infty$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot x^3-2}{2\cdot x^3+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ IND}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2} \Rightarrow y \to \frac{1}{2}$

Ejercicio:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{1-2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\text{ IND}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6+\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}-2} = \frac{6+\frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-2} = \frac{6+0}{0-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$\Rightarrow y \to -3$

Cómo resolver una indeterminación 0/0

Pudiera pensarse que $\frac{0}{0} = \infty$ por el denominador, o bien que $\frac{0}{0} = 0$ por el numerador o que $\frac{0}{0} = 1$ por ser iguales el numerador y el denominador. Podría ser cualquier número dependiendo de la situación.

Ejemplos básicos: $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} \underset{0/0\text{ IND}}{=} 2$; $\lim_{x\to 0} \frac{7x}{x} \underset{0/0\text{ IND}}{=} 7$

Vamos a calcular el límite de una función racional $L = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$

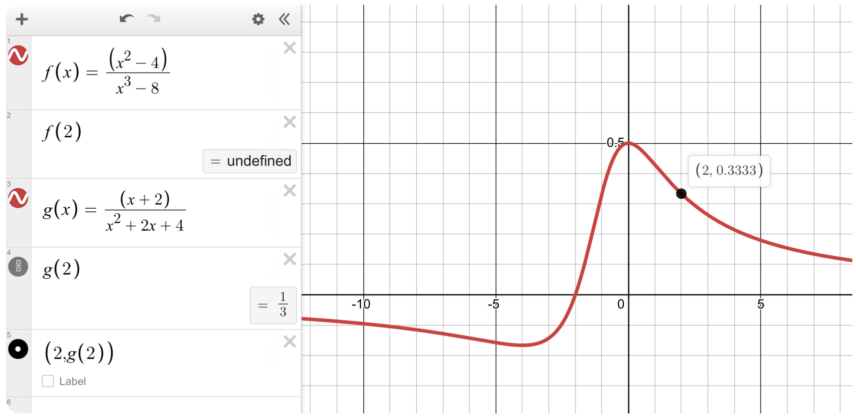
Como el nº a anula $P(x)$ y $Q(x)$, es raíz y ambos polinomios son divisibles por $(x-a)$.

Ejemplo: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \frac{0}{0}$ (indeterminado), $x=2$ es raíz del numerador y del denominador

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

La función existe en $x=2$.
No es una asíntota vertical.
El punto $(2, 1/3)$ forma parte de la gráfica.



Ejercicio: $\lim_{x\to 1} \frac{-4x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = -4$

$\frac{0}{0}$ IND

Ejercicio:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{1-2+1}{-1+1} \left(\frac{0}{0} \text{ IND}\right) = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1} (x+1) = -1+1 = 0$$

$$x^2+2x+1=0, \quad x = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{-2\pm 0}{2} = -1 \text{ (doble)}$$

$$x^2+2x+1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$$

Cómo resolver una indeterminación k/0 (k≠0) = ∞*

* Hay que comprobar si es $\pm\infty$ con los límites laterales.

Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ *

Indeterminación $\frac{k}{0} = \infty$ $(k \neq 0)$

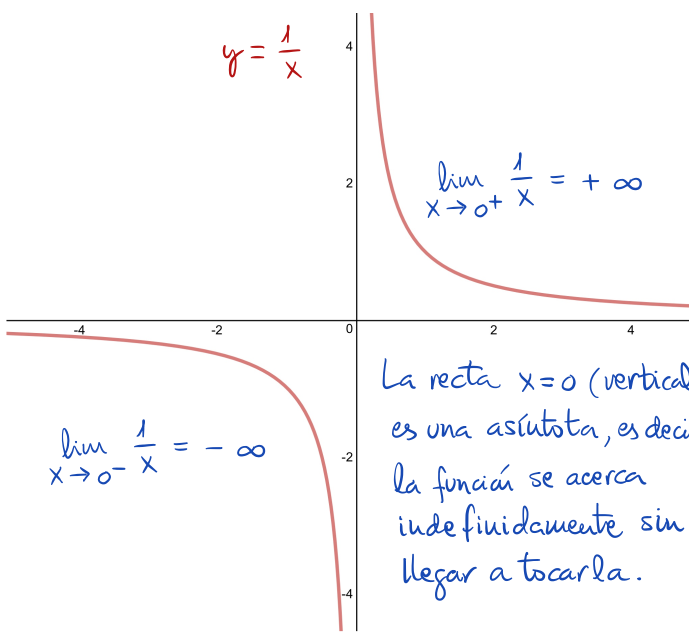
Hay que comprobar si es $\pm\infty$ con los límites laterales

Probamos puntos muy próximos: $-0{,}1$ y $+0{,}1$

0

$-0{,}1$ $\quad$ $+0{,}1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \nexists \text{ el límite}$$



$y = \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

La recta $x=0$ (vertical) es una asíntota, es decir, la función se acerca indefinidamente sin llegar a tocarla.

Cómo resolver una indeterminación ∞ − ∞

Se resuelve manipulando las expresiones hasta que se pueda resolver como $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ $\quad \underset{\text{IND}}{\infty - \infty}$ Se multiplica y divide por el conjugado $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La fracción marcada en rojo es igual a 1 por eso no altera el enunciado original

cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo

Volvemos a sustituir

Veamos ahora un ejemplo con dos indeterminaciones consecutivas.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x} - x$ $\quad \underset{\text{IND}}{\infty - \infty}$ Se multiplica y divide por el conjugado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

Aparece una segunda indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ IND

El grado del numerador es 1 y también el del denominador porque $\sqrt{x^2} = x^1$.

Nos fijamos en los coeficientes de grado mayor: $\lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot x}{\sqrt{1\cdot x^2 + x} + 1\cdot x} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$

Si no recordásemos esta técnica rápida para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, tendríamos que dividir por la potencia mayor, en este caso, x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Introducimos x dentro de la raíz como x^2

En el boletín de actividades correspondiente a este tema hay también ejercicios de límites con parámetros.

El número e

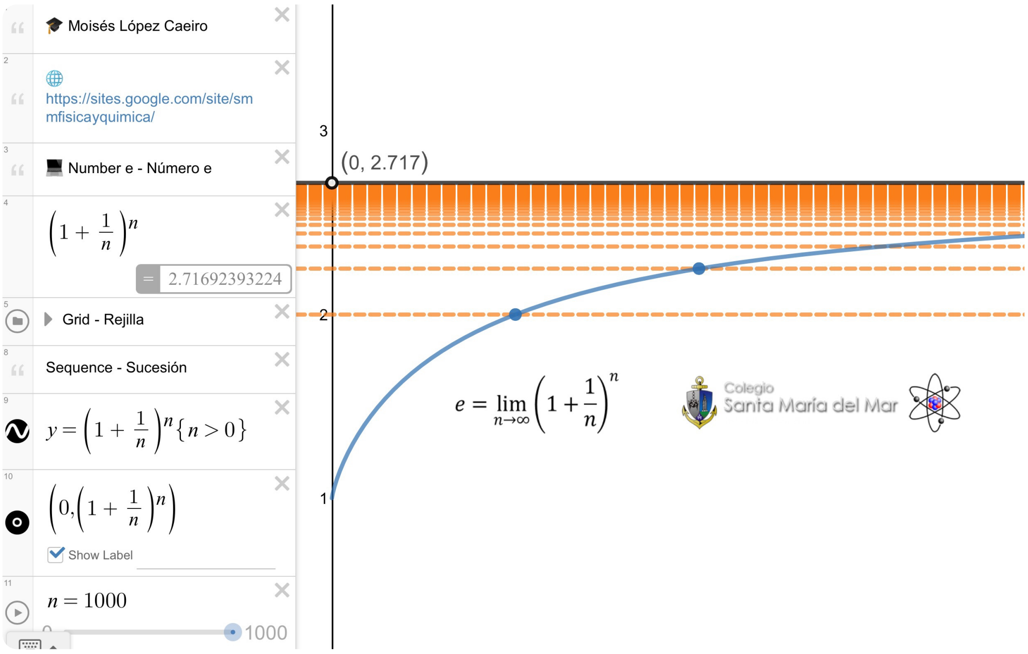
$$\boxed{e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

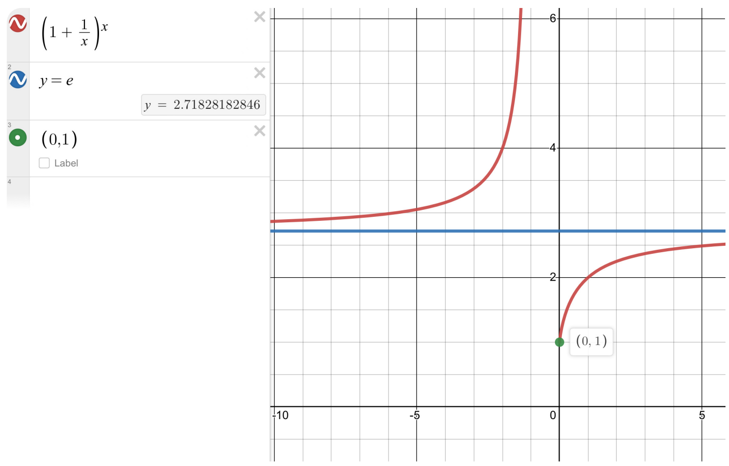
$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2.593742$$

$$\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{10^3} \approx 2.716924$$

$$\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} \approx 2.718280$$

$e \simeq 2{,}718$





Cómo resolver una indeterminación 1 elevado a ∞ : 1^∞

$$\boxed{\lim_{x \to a} \left[\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\right]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)}}$$

En el siguiente ejemplo desarrollaremos una demostración rigurosa del límite, pero a continuación, estudiaremos un método más rápido para su resolución.

$(x+1)+2 = x+3$

Ejemplo: $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+5} \underset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)}\right)^{x+5} =$$

$x+5 = \frac{x+1}{2}\cdot\frac{2}{x+1}\cdot x+5$

$$= \lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{x+1}{2}\right)}}_{e}\Bigg]^{\frac{2(x+5)}{x+1}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+5)}{x+1}} = e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2(x+5)}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+10}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$$

Método rápido: Podremos utilizar siempre este método.

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{x+3}{x+1}\right)}_{\text{base}}^{\overbrace{x+5}^{\text{exponente}}} \overset{1^\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x+5} = e^{L} = \boxed{e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\text{base}-1)\cdot\text{exponente}}}$$

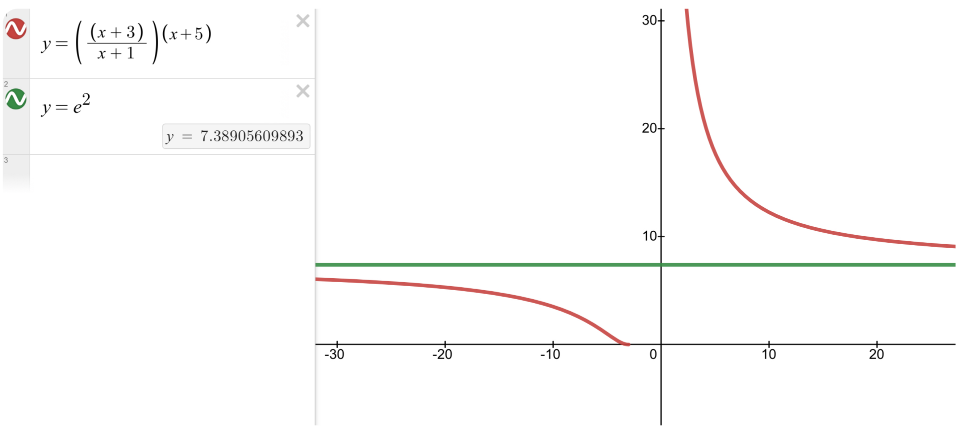
¡Ojo! En este caso el límite es ∞, pero podría ser cualquier número.

2 métodos para obtener la función que multiplica al exponente:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x+3}{x+1}-1 = \frac{x+3-x-1}{x+1} = \frac{2}{x+1}\\[2ex] &\frac{x+3-(x+1)}{x+1} = \frac{2}{x+1}\end{aligned}\right\}$$

Podemos escribir directamente: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+5} = e^{L} = e^{2}$

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}\cdot(x+5) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+10}{1x+1} = 2$$

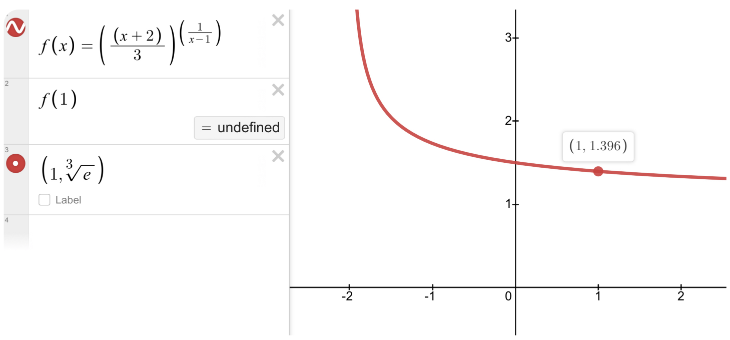


Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

En este caso, el límite no es en el ∞, pero se utiliza la misma técnica.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}} \overset{1^\infty}{=} e^{L} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

$$\frac{x+2}{3}-1 = \frac{x-1}{3}\ , \quad L = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



LÍMITES E INDETERMINACIONES (IND)		
Límite de una función		
$\lim_{x\to a} f(x) = b, (Si\ \ a, b \in \mathbb{R})$	Existe el límite si los límites laterales (por la izquierda y por la derecha de $x = a$) son iguales:	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
Límites en el infinito y límites infinitos	$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$
Propiedades de los límites		
Sea $\lim_{x\to a} f(x) = p$	Sea $\lim_{x\to a} g(x) = q$	Entonces se cumple que:
$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = p + q$	$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = p \cdot q$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p}{q}\ \ ,\ \ (Si\ \ q \neq 0)$
$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = p - q$	$\lim_{x\to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot p\ \ ,\ \ (Si\ \ k \in \mathbb{R})$	$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = p^q\ \ ,\ \ (Si\ \ p^q \in \mathbb{R})$
Indeterminaciones		
Indeterminación $\frac{k}{0} = \infty$	$L = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{k}{0} = \infty\ \ ,\ \ k \neq 0$	Se estudian los límites laterales, evaluando puntos próximos al punto a por su izquierda y por su derecha.
Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$	$L = \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, P y Q polinomios	Se resuelve dividiendo por la potencia de mayor grado. Estudio de casos según el grado de P y Q :
Grado de P $>$ Grado de Q $\Rightarrow\ \ L = \pm\infty$ El signo del ∞ depende del signo de los coeficientes de grado mayor.		Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x}{-5x^2 - 1} = -\infty$
Grado de P $<$ Grado de Q $\Rightarrow\ \ L = 0$		Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{5x^3 - 1} = 0$
Grado de P $=$ Grado de Q $\Rightarrow\ \ L = \frac{a}{b}$ siendo a y b los coeficientes de grado mayor de P y Q respectivamente.		Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3 - x}{5x^3 - 1} = \frac{-2}{5}$
Indeterminación $\frac{0}{0}$	$L = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, P y Q polinomios	Se resuelve factorizando los polinomios. El factor $(x - a)$ es el común y se podrá simplificar. A continuación se recalcula.
Indeterminación $\frac{0}{0}$	$L = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, P y Q con radicales	Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del radical.
Indeterminación $\infty - \infty$	Aparece en sumas o diferencias de fracciones o radicales.	Se resuelve multiplicando numerador y denominador por el conjugado del radical.
Indeterminación 1^∞	Se resuelve a partir de la definición del número e:	$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
Si $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty$ entonces el límite es $= e^L$ siendo:		$L = \lim_{x\to a} \left[\left(f(x) - 1\right) \cdot g(x)\right]$

Indeterminación $\frac{k}{0} = \infty$: Se estudian los **límites laterales**, evaluando puntos próximos.

$\lim_{x \to 1} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty$ con signo IND $\Rightarrow$ Evalúo el límite con puntos próximos a 1 por la izquierda y por la derecha.

Escojo, por ejemplo, 0,9 por la izquierda y 1,1 por la derecha, es decir, $\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: Se resuelve **dividiendo por la potencia de mayor grado**.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x}{-5x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{-5x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{-\frac{5}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{-\frac{5}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = -\frac{2}{0} = -\infty$$

(signo de la razón entre los coeficientes de grado mayor)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 - x}{5x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-\frac{2}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{5 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2x^3 - x}{5x^3 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2 - \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-2 - \frac{1}{\infty}}{5 - \frac{1}{\infty}} = \frac{-2}{5}$$

(división de coeficientes de mayor grado)

Indeterminación $\frac{0}{0}$: Se resuelve **factorizando los polinomios**. El factor $(x-a)$ es el común, siendo a el límite.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 5x + 4} = \frac{0}{0}$ IND $\Rightarrow x = 1$ es raíz común. Factorizando: $\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-4} = \frac{3}{-3} = -1$

Nota: Si hubiera radicales, se resuelve multiplicando el numerador y el denominador por el **conjugado del radical**.

Indeterminación $\infty - \infty$: Se resuelve multiplicando el numerador y el denominador por el **conjugado del radical**.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - x = \infty - \infty$ IND . El numerador se resuelve como una diferencia de cuadrados.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 2} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = -\frac{2}{\infty} = 0$$

Indeterminación 1^∞ : $\lim_{x \to a} \left[f(x)\right]^{g(x)} = e^L$ siendo $L = \lim_{x \to a} \left[\left(f(x) - 1\right) \cdot g(x)\right]$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = 1^\infty \text{ IND} = e^L \text{ siendo } L = \lim_{x \to \infty} \left[\left(\frac{x}{x+3}\right) - 1\right] \cdot (3x+1) = \lim_{x \to \infty} \frac{-9x - 3}{x+3} = -9$$

Resolvimos el límite anterior como una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Finalmente: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$

Asíntotas

Asíntota vertical: $a \in \mathbb{R}$. La recta vertical $x=a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty} \Rightarrow \boxed{x=a} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

Buscamos los ceros (raíces) del denominador. Si no hubiera ceros, no habría asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $b \in \mathbb{R}$. La recta horizontal $y=b$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = b} \Rightarrow \boxed{y=b}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, no hay.

Asíntota oblicua: La recta no horizontal $y = mx+n$, $m \neq 0$ y $m \neq \infty$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-(mx+n)] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} mx+n,$$

dividimos por x $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{n}{x} = m \quad$ ($\frac{n}{x} \to 0$)

Si $m=\infty$ o $m=0$, no hay

Para calcular los parámetros: $\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}$ $\boxed{n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m\cdot x]}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = mx+n}$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$; Vamos a ver si tiene una Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x+2)\cdot x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

Como $m \neq 0$ y $m \neq \infty$, hay asíntota

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+2} = -\frac{2}{1} = -2$$

Luego, la asíntota oblicua es: $y = mx+n = x-2$

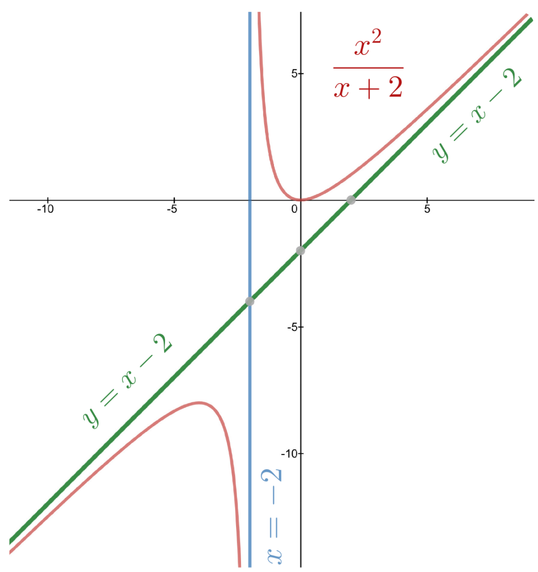
Asíntota horizontal:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} = \infty$, luego no tiene.

Asíntota vertical: El denominador se anula cuando $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

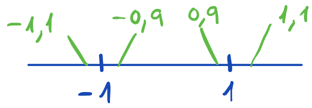
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty \\ \lim_{x\to-2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty \end{array}\right\}$$

La asíntota vertical es $x=-2$



Nota: Sabemos que una función tiene asíntotas verticales si tiene ceros (raíces) en el denominador.
Tiene una asíntota horizontal si el grado del numerador es igual o inferior al del denominador.
Tiene una asíntota oblicua si el grado del numerador es exactamente uno más que el denominador.

Ejemplo: $y = \dfrac{1}{x^2-1}$, Estudia el dominio y las asíntotas



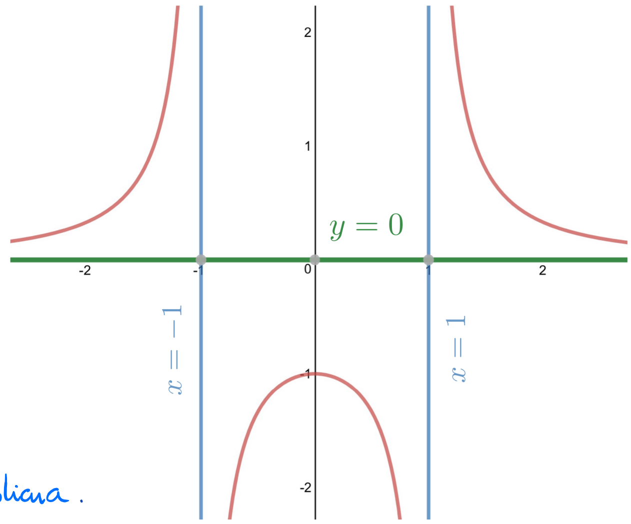
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ $\quad D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \end{array}\right\}$$

$x = -1 \quad x = 1$ Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2-1} = 0 \Rightarrow y = 0$ Es una asíntota horizontal

$m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x^2-1)\cdot x} = 0$ No hay asíntota oblicua.



Continuidad

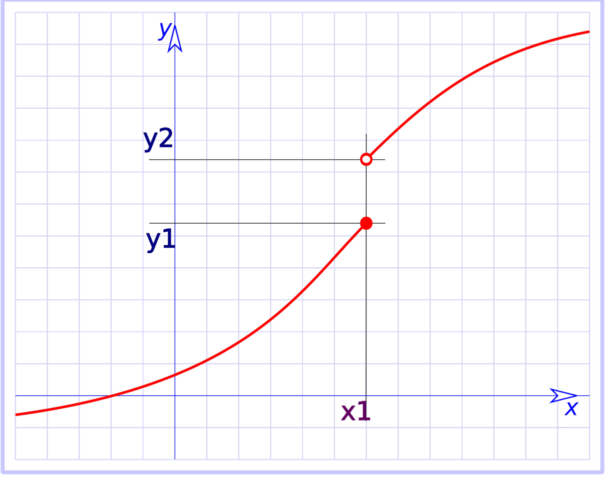
Una función f es continua en el punto $x=a$ si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

Se cumple que:

$$\begin{cases} \exists \lim_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) & \text{Límites laterales iguales} \\ \exists f(a) & \text{Existe la función en el punto} \\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a) & \text{El límite es igual al valor de la función en el punto} \end{cases}$$

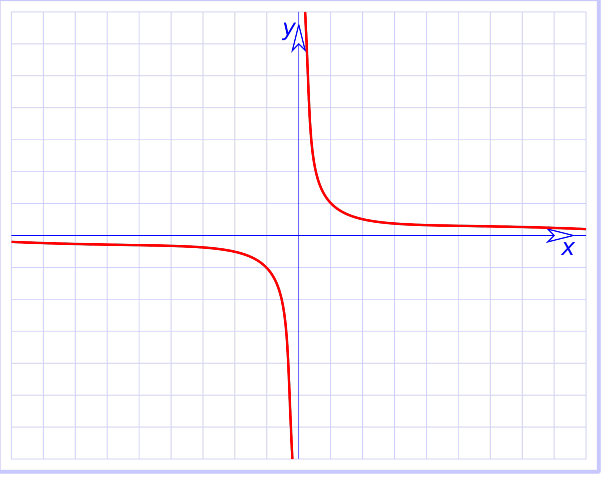
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

Tipos de discontinuidad



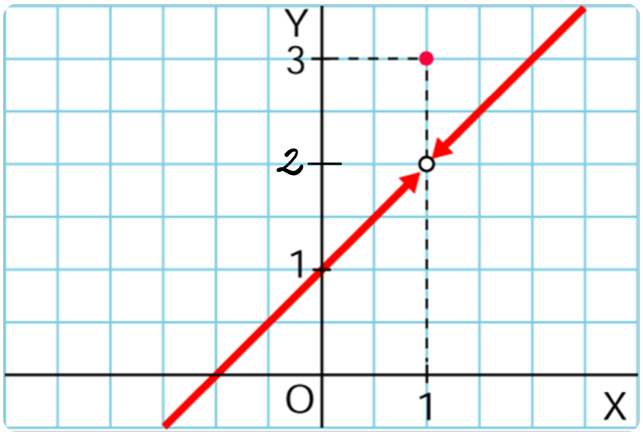
Discontinuidad de salto finito

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \pm\infty$$



Discontinuidad de salto infinito

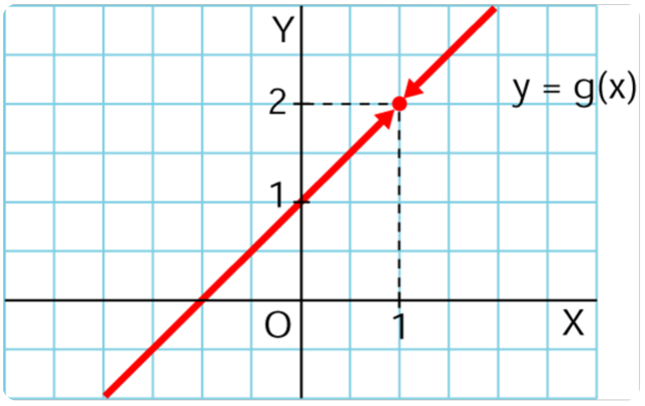
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ o } \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ son } \pm\infty$$



Discontinuidad evitable

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \text{ finito}$$

o bien $\nexists f(a)$



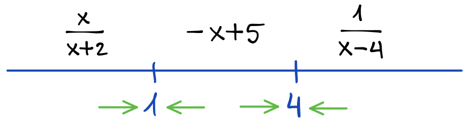
Función continua

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

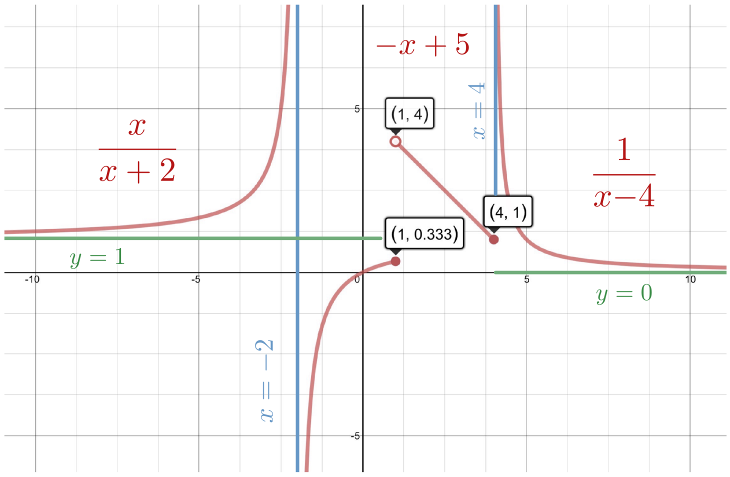
Límites en funciones definidas en trozos o intervalos

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ -x+5 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (-\infty, 1] \\ (1, 4] \\ (4, +\infty) \end{array}$$



representación lineal



Función definida en trozos o intervalos

Dominio: $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \in (-\infty, 1]$

$x-4=0 \Rightarrow x=-4 \notin (4, \infty)$

$D = \mathbb{R} - \{-2\}$, $x=4$ no tiene problema

Estudiamos los puntos críticos y los puntos de frontera (entre los intervalos).

En este caso, los puntos de frontera son $x=1$ y $x=4$.

Estudiamos los límites laterales en todos los puntos críticos (incluimos las fronteras entre intervalos).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3} = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x+5) = 4 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

Discontinuidad de salto finito

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x}{x+2} = -\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$$

Discontinuidad de salto infinito

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (-x+5) = -4+5 = 1 = f(4) \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{4-4} = \dfrac{1}{0} = +\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 4} f(x)$$

Discontinuidad de salto infinito

Asíntotas

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ IND}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Asíntota horizontal $y=1$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+2)x} = 0 \quad \nexists \text{ No hay oblicua}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x}{x+2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x}{x+2} = -\infty \end{array}\right\}$$

Asíntota vertical en $x=-2$.

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty$$

Asíntota vertical en $x=4$.

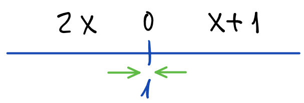
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-4} = 0$$

Asíntota horizontal $y=0$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-4)x} = 0$$

$\nexists$ No hay oblicua

Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



representación lineal

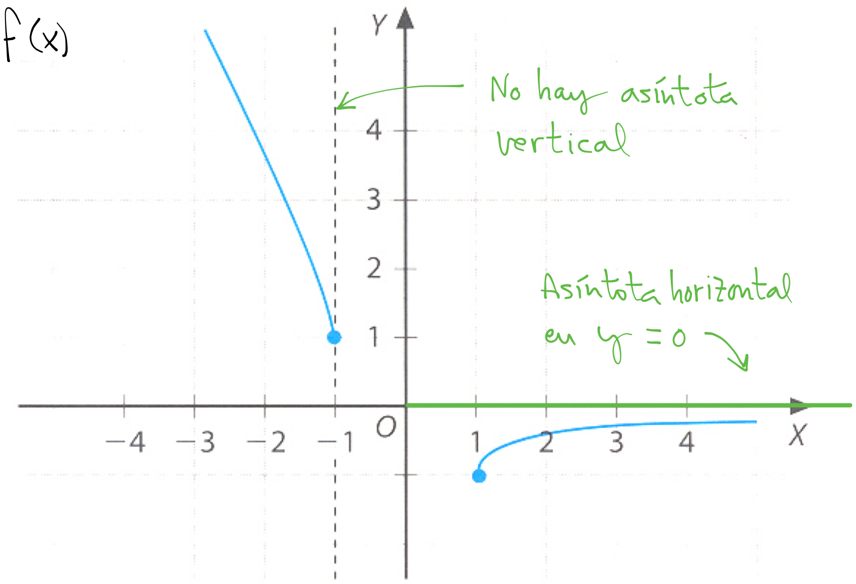
No hay puntos críticos, pero sí puntos de frontera: $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 1+1 = 2 \end{array}\right\} \text{El límite } \exists \text{ y vale } 2.$$

La función en $x = 1$ vale $f(1) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, luego $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

Ejemplo: Dada la función que se ve en la gráfica, calcula los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ No hay asíntota

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ (asíntota horizontal)

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \nexists$ $f(-1) = 1$

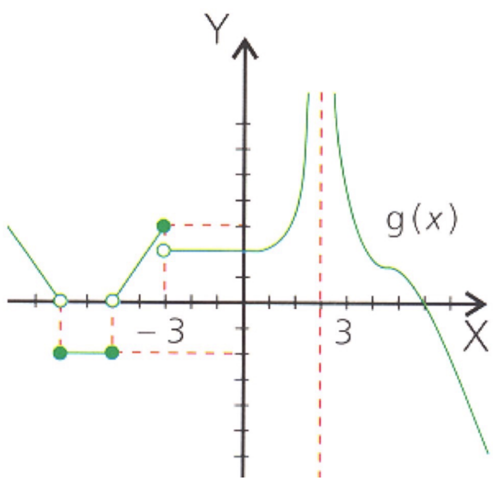
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \nexists$

$D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$\mathrm{Im} = [-1, 0) \cup [1, +\infty)$

Ejemplo: Sea $f(x)$ la función cuya gráfica es la siguiente:



a) Calcula el dominio

b) ¿Cuánto vale $f(0)$?

c) Calcula los siguientes límites e indica las asíntotas.

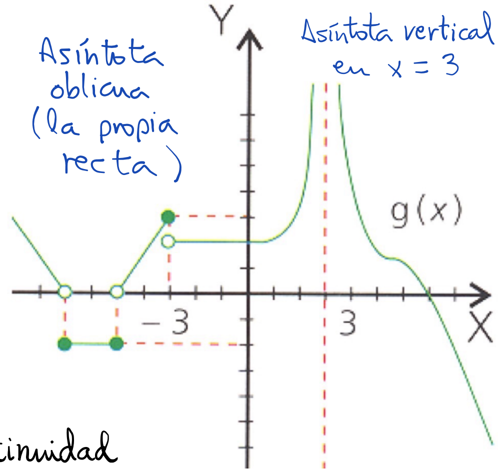
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

d) Estudia la continuidad de la función.

a) Dominio: $D = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $f(0) = 2$

c) Límites y asíntotas.



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 2 \\ f(-3) = 3 \end{array}\right\} \text{Discontinuidad de salto finito.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Discontinuidad de salto infinito.}$$

$x = 3$ es asíntota vertical

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

d) Continuidad

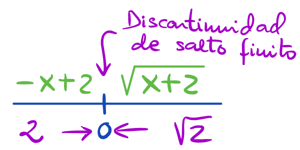
También son discontinuidades de salto finito los puntos: -7 y -5

Se comprueba con los límites laterales.

Luego: $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{-7, -5, -3, 3\}$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$,

calcula los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



$x + 2 \geq 0$
$x \geq -2$

Dominio: $+\sqrt{x+2} \Rightarrow x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, como en este intervalo $x \geq 0$ no hay problema.

Dominio: $D = \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x+2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x+2} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 0} f(x) \quad \text{Discontinuidad de salto finito.}$$

La función $f(0) = \sqrt{2}$. No es continua en $x = 0$.

Luego $\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{0\}$

Además $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2$ (daría lo mismo por la derecha).

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x+2) = -(-\infty) + 2 = \infty$$

Análisis para Matemáticas de CCNN. Límites en funciones definidas en trozos o intervalos

Más adelante estudiaremos el teorema de Bolzano y, por eso, es necesario justificar con un mayor detalle la continuidad de la función.

Ejemplo sencillo: Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x<0 \Rightarrow (-\infty, 0) \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \Rightarrow (0, \infty) \end{cases}$

$\boxed{\text{Dominio}}$ $\quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Continuidad en los abiertos}}$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$ por ser una función racional cuyo denominador nunca se anula.

$f(x)$ es continua en $(0, \infty)$ por ser una función polinómica.

El único punto problemático que tenemos que estudiar es $x=0$ (la frontera entre los intervalos).

$\boxed{\text{Continuidad}}$ $\quad \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; Estudiamos $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ $f(x)$ presenta en $x=0$ una discontinuidad de salto infinito.

$$f(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R} - \{0\})$$

Teorema de Weierstrass / Weierstraß (MAT CCNN)

Teorema de Weierstrass

> Una función $f(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ continua en un intervalo cerrado, alcanza un máximo M y un mínimo m en el intervalo $[a, b]$.
>
> Por tanto, la función $f(x)$ está acotada en $[a, b]$ y:
>
> $$m = f(x_{mín}) \leq f(x) \leq f(x_{máx}) = M \quad \forall x \in [a, b]$$

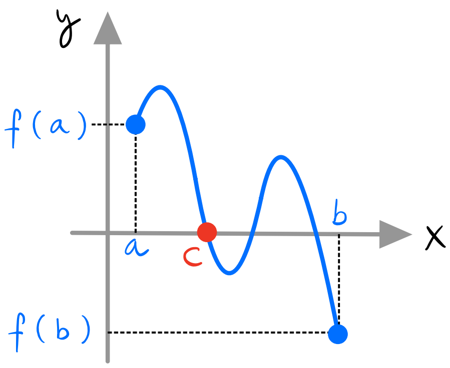
Teorema de Bolzano y su intepretación geométrica (MAT CCNN)

Teorema de Bolzano

$f(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ función continua en el intervalo cerrado.

$f(a) \cdot f(b) < 0$ imágenes de distinto signo en los bordes del intervalo.

Con estas condiciones $\Longrightarrow$ $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$, es decir, existe un punto dentro del intervalo abierto en el que la función corta al eje OX.



Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo, entonces la gráfica corta necesariamente al eje OX (abscisas) en al menos un punto c del intervalo abierto (a,b). El teorema no permite saber cuántas raíces (puntos de corte) tiene la función ni su localización.

Bernard Bolzano

Ejemplo: Utilizando el teorema de Bolzano, prueba que la función $f(x) = x^3 + 2x - 4$ corta al eje X en algún punto del intervalo $[1,2]$.

$f(x) = x^3 + 2x - 4$ es continua en el intervalo $[1,2]$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + 2 - 4 = -1 < 0 \\ f(2) = 8 + 4 - 4 = 8 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

Se cumplen las condiciones, luego $\exists\, c \in (1,2) \,/\, f(c) = 0$, es decir, corta al eje OX.

Ejemplo: Utilizando el teorema de Bolzano, prueba que la función $f(x) = 2 - x + \ln x$ con $x \in (0, +\infty)$ corta al eje X en algún punto del intervalo $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$.

$f(x) = 2 - x + \ln x$ es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ porque el argumento del logaritmo $x > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{e^2}\right) = 2 - \frac{1}{e^2} + \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2} < 0 \\ f(1) = 2 - 1 + \ln 1 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f\left(\frac{1}{e^2}\right) \cdot f(1) < 0$$

Se cumplen las condiciones, luego $\exists\, c \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right) \,/\, f(c) = 0$, es decir, corta al eje OX.