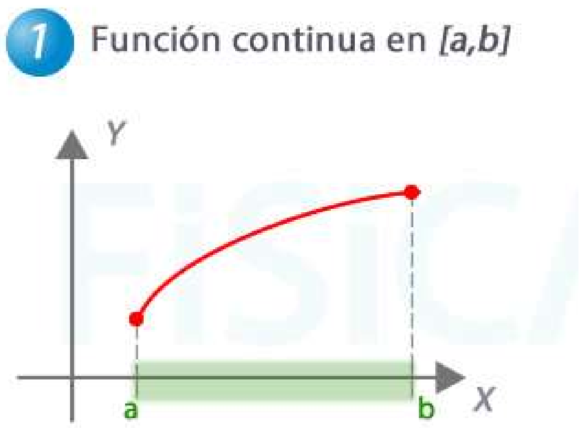
Cálculo de áreas mediante integrales

Caso 1. Cálculo del área comprendida entre la curso y eje OX

Sea f una función continua en el intervalo $[a|b]$, que **no cambia de signo** en dicho intervalo.



En este caso, el área limitada por la gráfica de f, el eje X y los extremos del intervalo, se calcula utilizando la integral definida de la función entre los extremos a y b de la siguiente forma:

1. Si la función está por encima del eje $\boldsymbol{X}$:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

El resultado será un área positiva.

2. Si la función está por debajo del eje $\boldsymbol{X}$:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

El signo negativo corrige la integral, que sería negativa, y obtenemos igualmente un área positiva.

Cálculo del área sin necesidad de dibujar

Para evitar distinguir ambos casos (por encima o por debajo del eje X), utilizamos:

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

El valor absoluto permite calcular siempre el área correctamente, sin necesidad de representar la función.

¿Cómo saber si la función no cambia de signo?

Aplicamos el Teorema de Bolzano:

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe algún $c \in (a, b)$tal que $f(c) = 0$.

Por tanto, para estudiar el signo bastará con localizar los puntos de corte con el eje $\boldsymbol{X}$.

Ejemplo 1

Calcular el área limitada por la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, y el eje X.

1. Calculamos los puntos de corte

$$f(x) = x(x-1)(x-2) = 0$$

Esto nos da los puntos:

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2.$$

En cada intervalo comprendido entre dos ceros consecutivos, la función no puede cambiar de signo (por Bolzano). Por tanto, analizamos los tramos: $[0,1], [1,2]$.

Por tanto, el área queda dividida en dos tramos:

$$A = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^2 f(x)\,dx\right| = A_1 + A_2$$

2. Cálculo de la primitiva

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2.$$

3. Cálculo de cada área parcial

Primer tramo:

$$A_1 = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right|$$

Evaluamos:

$$A_1 = \left|\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - 0\right| = \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

Segundo tramo: $\boldsymbol{A}_2$

$$A_2 = \left| \int_1^2 f(x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \right|$$

Evaluamos:

$$F(2) = \frac{16}{4} - 8 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$$

$$F(1) = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

Entonces:

$$A_2 = \left| 0 - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

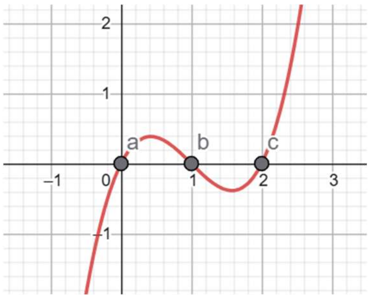
Área total

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Nota importante

Si hubiéramos integrado directamente de 0 a 2:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$



el resultado sería erróneo porque las zonas positiva y negativa se cancelan.

Por eso es imprescindible dividir por tramos usando los puntos de corte, y después tomar valor absoluto.

RESUMEN

1º Buscar los puntos de corte con el eje $\boldsymbol{X}$.

Son los ceros o raíces de la función y determinan los tramos donde no cambia de signo.

2º Calcular la primitiva.

3º Dividir la integral en los tramos marcados por los puntos de corte y tomar valor absoluto en cada uno.

Caso 2. Cálculo del área limitada por una función y el eje X en una región determinada

En este tipo de ejercicios, el enunciado suele indicar algo así:

"Calcula el área de la región limitada por f, el eje xy las rectas verticales $x = a$ y $x = b$".

Para resolver el área de forma sistemática y sin necesidad de dibujar, seguimos tres pasos:

1º Buscar los puntos de corte de f con el eje X en el intervalo $[a, b]$

2º Calcular la primitiva de f.

3º Dividir el cálculo del área entre los puntos de corte y los extremos a y b.

De este modo evitamos cancelaciones por cambios de signo.

En el caso que fuesen más puntos de corte, por ejemplo si los puntos de corte fueran

$-7, -3, 1, 2, 5$, entonces:

$$A = \left|\int_{-7}^{-3} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{-3}^{1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{5} f(x)\,dx\right|.$$

Ejemplo 3

Calcular el área encerrada por la función: $f(x) = x\ln\,x$

y las rectas verticales:

$$x = \frac{1}{2}, \qquad x = 4$$

El dominio es: $\mathrm{Dom}\,f = (0, +\infty)$,

y dado que el intervalo

$$\left[\frac{1}{2}\middle|4\right] \subset (0, +\infty)$$

no hay problemas de definición.

1º Punto de corte de f con el eje X en $\left[\frac{1}{2}\middle|4\right]$

Buscamos soluciones de la ecuación: $x\ln\ x = 0$

- $x = 0 \rightarrow$ no pertenece al intervalo.
- $\ln\ x = 0\ \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow$ sí pertenece al intervalo.

Por tanto, existe un punto de corte en: $x = 1$. Este punto divide la región en dos zonas.

2º calculamos la primitiva de f

$$F(x) = \int x\ln\ x dx.$$

Integramos por partes:

- $u = \ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
- $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Entonces:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\ x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln\ x - \frac{x^2}{4}$$

3º Área dividida entre los puntos $\frac{1}{2}$, 1y 4

Cálculo de A_1

Cálculo de A_2

$$A_2 = \left|\left[\frac{x^2}{2}\ln\ x - \frac{x^2}{4}\right]_1^4\right| = sustituyendo\ y\ operando = \left|16 \cdot \ln\ 2 - \frac{15}{4}\right|$$

Cálculo del área completa:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3}{16} - \frac{\ln 2}{8} + 16\ln\ 2 - \frac{15}{4}$$

Agrupando logaritmos y fracciones llegamos al resultado final:

$$A = \frac{127}{8}\ln\ 2 - \frac{57}{16}$$

Ejemplo 4

Dada la función:

$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}$$

calcular el área determinada por $f(x)$, las rectas verticales, $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$ y el eje X.

El intervalo que trabajamos es:

$$[a, b] = [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$$

1º Punto de corte de f con el eje x

Buscamos los valores donde:

$$\frac{-x}{4 - x^2} = 0$$

Esta fracción solo puede anularse cuando el numerador es cero:

$$-x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Pero: $0 \notin [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$.

Ahora comprobamos si el denominador puede anularse en el intervalo:

$$4 - x^2 = (2 + x)(2 - x)$$

Sus raíces son: $x = -2, \quad x = 2$

Pero: $\sqrt{5} > 2.23 \Rightarrow 2 \notin [\sqrt{5}, \sqrt{6}]$, por tanto el denominador tampoco se anula en el intervalo.

Resultado: $f(x)$ no tiene puntos de corte con el eje X en $[\sqrt{5}, \sqrt{6}]$,

y además no cambia de signo en todo dicho intervalo, porque ni numerador ni denominador se anulan allí.

Así que el área a calcular:

$$A = \left| \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4 - x^2} \, dx \right| = \left| F(\sqrt{6}) - F(\sqrt{5}) \right|$$

2º Cálculo de la primitiva

Queremos integrar:

$$F(x) = \int \frac{-x}{4 - x^2} \, dx$$

Hacemos el cambio:

$$t = 4 - x^2, dt = -2x dx$$

Entonces:

$$\int \frac{-x}{4-x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln\ |\,t\,| = \frac{1}{2}\ln\,(4-x^2)$$

Por tanto:

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln\,(4-x^2)$$

3º Cálculo del área

Evaluamos en los extremos:

$$F(\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}\ln 2\,,\quad F(\sqrt{5}) = 0$$

$$A = \left|-\frac{1}{2}\ln\ 2 - 0\right| = \frac{1}{2}\ln\ 2$$

Este es el área pedida.

Caso 3 Área comprendida entre dos funciones

Para hallar el área encerrada entre dos funciones f y g, seguimos siempre estos pasos:

1º Calcular los puntos de corte de $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$

Son las soluciones de la ecuación:

$$f(x) = g(x)\ \ o\ de\ \ \ f - g = 0$$

Si además nos dan un intervalo $[a|b]$, los límites de integración serán:

- los extremos a y b
- y las soluciones de $f\ = g$ que estén comprendidas entre a y b.

2º Calcular la primitiva de $\boldsymbol{f-g}$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx$$

No importa cuál esté arriba o abajo en cada tramo, porque trabajaremos con valor absoluto al final.

3º Calcular el área

Caso A — Si nos dan un intervalo $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$

y las soluciones de $f\ = g$dentro del intervalo son

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$$

entonces:

$$A = \left|\int_a^{c_1} (f-g)\,dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} (f-g)\,dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_n}^{b} (f-g)\,dx\right|$$

Caso B — Si NO nos dan intervalo

Tomamos **todas** las soluciones de $f = g$como puntos de corte:

$$A = \left|\int_{c_1}^{c_2} (f-g)\,dx\right| + \left|\int_{c_2}^{c_3} (f-g)\,dx\right| + \cdots$$

Ejemplo 5

Sea:

$$f(x) = 6x - x^2, \qquad g(x) = x^2 - 2x$$

Calcular el área comprendida entre ambas funciones.

1º Puntos de corte

Buscamos dónde:

$$f - g = 0$$

$$6x - x^2 - (x^2 - 2x) = 0$$

$$6x - x^2 - x^2 + 2x = 0$$

$$-2x^2 + 8x = 0$$

Factorizamos:

$$-2x(x-4) = 0$$

Soluciones:

$$x = 0, x = 4$$

Estos serán nuestros límites de integración.

2º Primitiva

$$F(x) = \int (f-g)\,dx = \int (-2x^2 + 8x)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2$$

3º Área

El área encerrada entre 0y 4es:

$$A = \left| \int_0^4 (f - g)\, dx \right| = |F(4) - F(0)|$$

Calculamos extremos:

$$F(4) = -\frac{2}{3} \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 = -\frac{2}{3} \cdot 64 + 4 \cdot 16$$
$$F(4) = -\frac{128}{3} + 64 = -\frac{128}{3} + \frac{192}{3} = \frac{64}{3}.$$
$$F(0) = 0$$

Por tanto:

$$A = \frac{64}{3} \text{u}^2$$

Ejemplo 6 Hallar el área limitada entre las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2x, \qquad g(x) = 4x - 3$$

1º Punto de corte entre las dos funciones

Resolviendo:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 2x = 4x - 3$$
$$x^2 - 2x + 3 = 0.$$

No hay puntos de corte reales. Esto significa que una de las funciones está SIEMPRE por encima de la otra.

Comprobamos en un punto, por ejemplo $x = 0$:

$$f(0) = 0, \qquad g(0) = -3.$$

Entonces

$$f(x) > g(x) siempre$$

2º Área limitada por intervalos

Como no hay corte, el área debe calcularse en un intervalo dado por el enunciado. Supongamos que el ejercicio pide el área entre:

$$x = -1 \text{ y } x = 2.$$

El área es:

$$A = \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} [(x^2 + 2x) - (4x - 3)]\,dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\,dx.$$

3º Primitiva

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x.$$

4º Evaluación

$$A = F(2) - F(-1)$$

Calculamos:

$$F(2) = \frac{8}{3} - 4 + 6 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

$$F(-1) = \frac{-1}{3} - 1 - 3 = \frac{-1}{3} - 4 = \frac{-13}{3}.$$

Entonces:

$$A = \frac{14}{3} - \left(\frac{-13}{3}\right) = \frac{27}{3} = 9.$$

Resultado

$$\boxed{A = 9 \text{ unidades}^2}$$