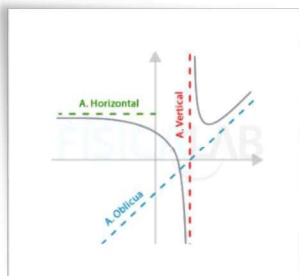


TEMA 7: ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas de una función son líneas imaginarias hacia donde tiende la función pero sin llegar a tocarla. No siempre una función tiene asíntotas. La posición de la gráfica con respecto a las asíntotas es muy valiosa a la hora de dibujar la función.



ASÍNTOTAS VERTICALES

Son rectas verticales (no son funciones) y su ecuación es $x = b$, donde b es el valor que cumple que el límite de la función $f(x)$ o alguno de sus límites laterales es $+\infty$ ó $-\infty$

Los posibles candidatos son los puntos que
NO pertenecen al dominio

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Son rectas horizontales (paralelas al eje X) tienen la forma $y = k$ donde k es un número que cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

y/o

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Una asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$ siendo m la pendiente de dicha recta y n la ordenada en el origen, se obtienen mediante las fórmulas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

TRUCOS A TENER EN CUENTA

- Si una función (que no sea por trozos) tiene asíntota horizontal, NO puede tener oblicua
- Si la función es un cociente de dos polinomios tendrá asíntota oblicua si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador
- Hay que calcular los límites para las dos ramas ($\pm\infty$) por separado, siempre dentro del dominio de la función. En el caso de cocientes de polinomios no es necesario, ya que si existe será igual para ambas ramas

POSICIÓN RELATIVA DE LA FUNCIÓN CON RESPECTO A SU ASÍNTOTA

TIPO	DESCRIPCIÓN	CONDICIONES Y CÓMO SE CALCULAN	POSICIÓN RELATIVA DE $f(x)$ Y SUS ASÍNTOTAS	PASOS A SEGUIR	EJEMPLOS
ASÍNTOTA VERTICAL $x = k$	rectas verticales ecuación $x = k$ k es nº real	1º Buscamos puntos de NO DOMINIO , puede ser $k \notin \text{Dom}(f)$ o, si es a trozos, que no pertenezca al dominio de alguna de sus ramas. 2º miramos si se cumple alguna de las condiciones: $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \pm\infty$	Miramos el signo del límite infinito a la IZQDA. y DERCHA. de k	Si $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = +\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la DRCHA. de k desde el $+\infty$ Si $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = -\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la DRCHA. de k desde el $-\infty$ Si $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = +\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la IZQDA. de k desde el $+\infty$ Si $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = -\infty$ la función se aproxima a la asíntota por la IZQDA. de k desde el $-\infty$	
ASÍNTOTA HORIZONTAL $y = k$	rectas horizontales ecuación $y = k$ k es nº real	Calculamos los límites de la función en el $\pm\infty$ y miramos si nos da un número real k $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$ y/o $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$	1º Construimos la función $g(x) = f(x) - k$ 2º comprobamos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0^- la función estará por DEBAJO de la asíntota. Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.	
ASÍNTOTA OBLICUA $y = mx + n$	Cualquier recta con $m \neq 0$	1º calculamos $m \neq 0$ $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ 2º calculamos n $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$	1º Construimos la función $g(x) = f(x) - (mx + n)$ 2º comprobamos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0^- la función estará por DEBAJO de la asíntota. Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.	

FICHA ASÍNTOTAS

Estudia las asíntotas de las siguientes funciones y la posición relativa de la función con respecto a sus asíntotas. En base a la información obtenida haz un boceto de la gráfica de la función.

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

2) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$

3) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

4) $f(x) = (x-1) \cdot e^x$ (este es para más adelante, se hace por reglas de derivadas usando L'Hopital)

5) $f(x) = \frac{x^2+4}{x-1}$

6) $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$

7) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

8) $f(x) = \frac{x^3}{4x^2-1}$

9) Halla los valores de a y b sabiendo que la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 2$ y una asíntota oblicua de pendiente 2, para la función:

$$f(x) = \frac{ax^2+3}{x+b}$$