

ANÁLISIS MATEMÁTICO

TEMA 4: FUNCIONES ELEMENTALES Y GRÁFICAS

CONCEPTOS BÁSICOS

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Una función es una correspondencia entre dos conjuntos (en nuestro caso sólo consideramos el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$) que a cada número del primer conjunto le asigna UNO Y SÓLO UNO de los números del segundo conjunto, al que llamaremos *imagen*.

Un punto, por tanto, NUNCA PUEDE TENER MÁS DE UNA IMAGEN.

¿QUÉ ES EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN?

Definición en lenguaje matemático: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = f(x)\}$ (no hay que sabérselo, es sólo para que os vayáis familiarizando con este lenguaje y lo sepáis “traducir” correctamente)

En lenguaje corriente lo que dice literalmente es: “conjunto de los números reales que tienen imagen mediante f ”.

Ejemplo:

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida para cualquier nº real EXCEPTO para el cero, ya que $\frac{1}{0} = \pm\infty \notin \mathbb{R}$

¡Ojo! el infinito SÍ existe, pero NO ES UN NÚMERO y por tanto, **no pertenece** a $\mathbb{R}$, así que:

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Lo que en lenguaje ordinario quiere decir “todos los números reales, excepto el cero”

NOTA: Es importante que distingáis entre el símbolo $\nexists$ que significa “NO EXISTE” y el símbolo $\notin$ que significa “NO PERTENECE”. Sé que los símbolos se parecen y para un disléxico sería fácil confundirlos pero significan cosas completamente diferentes y es importante no confundirlos nunca.

¿QUÉ ES EL RECORRIDO O RANGO DE UNA FUNCIÓN?

Es el conjunto de las imágenes, el conjunto de los números que son imagen de otro.

Lo mismo, escrito en lenguaje matemático: $Img(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$

¿QUÉ ES LA ECUACIÓN DE UNA FUNCIÓN?

Es la relación que indica, en lenguaje matemático, las operaciones que hay que hacer para transformar x en y

Ejemplo:

La función “Sumar 3” se escribe en matemáticas $f(x) = x + 3$

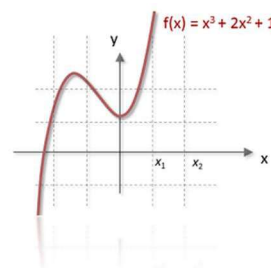
GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: REPRESENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN

Llamamos GRÁFICA de la función, al dibujo o representación sobre un plano que resulta de dibujar sobre un par de ejes cartesianos (X e Y) los pares de valores $(x, f(x))$ que obtenemos de una tabla de valores.

DESCRIPCIÓN

En general, estas son las cosas que se indican cuando te piden describir la gráfica de una función:

1. Le ponemos “nombre” (función polinómica, de qué grado, racional, irracional, hipérbola, trigonométrica, a trozos, valor absoluto, etc., etc.)
2. Calculamos su **DOMINIO**
3. **CONTINUIDAD**, en caso de discontinuidad tipo de discontinuidad (por ahora no lo hemos dado)
4. **DERIVABILIDAD** mientras no demos derivadas nos limitamos a ver: que sea continua (**DONDE NO ES CONTINUA TAMPOCO ES DERIVABLE**) y si tiene “esquinas”
5. **PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES**:
 - a. Con el eje X
 - b. Con el eje Y
6. **SIMETRÍA** (cuando proceda)
7. **CURVATURA**: si es cóncava o convexa, intervalos de curvatura (cuando proceda)
8. **CRECIMIENTO** e intervalos de crecimiento (cuando proceda)
9. **MÁXIMOS Y MÍNIMOS** (cuando proceda)
10. **PUNTOS DE INFLEXIÓN** (cuando proceda)
11. **ASÍNTOTAS Y RAMAS PARABÓLICAS** (*por ahora y mientras no demos límites, lo hacemos mirando la gráfica, en cualquier caso, sólo se dan en curvas, no en rectas*)
12. **IMAGEN**, rango o recorrido (*por ahora mirando la gráfica*)
13. **PERIODICIDAD** (cuando proceda)
14. A continuación se dibuja su gráfica sobre un par de ejes coordenados, teniendo en cuenta las características que acabamos de describir.



FUNCIONES POLINÓMICAS

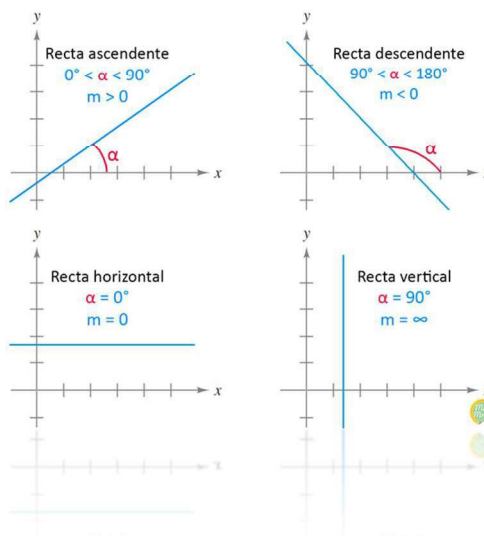
RECTAS (FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 1)

En general, una recta es la **gráfica de una función polinómica de grado uno**.

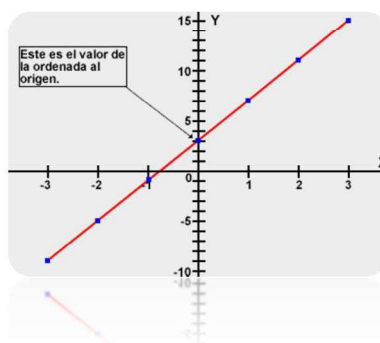
Se expresa mediante la ecuación $y = mx + n$ siendo:

- **m** pendiente o grado de inclinación de la recta. Se calcula como la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje positivo del eje X o eje de abscisas: $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Obvio que cuando $m > 0$ la recta es creciente y cuando $m < 0$ la recta es decreciente



- **n** ordenada en el origen, es decir lo que vale “ y ” cuando la “ x ” vale 0



Para dibujar cualquier recta **son necesarios y suficientes dos puntos**.

Casos especiales:

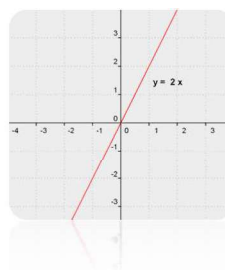
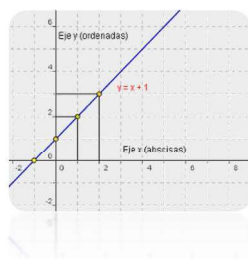
- Las rectas paralelas al eje X o **funciones constantes**, tienen pendiente 0, son constantes y su ecuación es de la forma: $y = n$
- Las rectas paralelas al eje Y, **NO SON FUNCIONES (es la única excepción)** y vienen dadas por una ecuación del tipo $x = k$, en este caso la pendiente es ∞ (forman un ángulo de 90° con el eje X)
- Las rectas que pasan por el origen de coordenadas o punto (0,0) se llaman **funciones lineales** y su gráfica es de la forma $y = mx$

- Las demás rectas se llaman **funciones afines** y su ecuación es la ya indicada: $y = mx + n$

Descripción

- Le ponemos "nombre":
 - si pasa por el $(0,0)$, *función lineal*
 - si no, *función afín*
 - y si es el caso especial de una recta paralela al eje X, se llama *función constante*
- Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
- Además por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
- También por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
- Puntos de corte con los ejes:**
 - El punto de corte con el eje X es $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$
 - El punto de corte con el eje Y es $(0, n)$
- Simetría:** cualquier recta es simétrica con respecto a cualquiera de sus puntos. ¿Qué quiere decir esto? Dibuja una recta cualquiera, elige un punto de la recta y márcalo bien, traza una cruz que tenga su centro en ese punto, ahora hazle dos dobles al folio justo por esa cruz: fíjate bien los tramos de la recta se han superpuesto uno a otro.
- Curvatura** (no procede en este caso por ser una recta)
- Crecimiento:** (calculamos m , su pendiente)
 - Si $m > 0 \Rightarrow$ es creciente
 - Si $m < 0 \Rightarrow$ es decreciente
 - Si $m = 0$ escribimos $\Rightarrow$ es constante y paralela al eje X
- No tienen máximos, ni mínimos
- Puntos de inflexión (no procede en este caso por ser una recta)
- Asíntotas y ramas parabólicas** (no procede en este caso por ser una recta)
- $Img(f) = \mathbb{R}$
- Periodicidad:** no tiene
- A continuación se dibuja su gráfica. Pasos para representar o dibujar la GRÁFICA de una recta:
 - Calculada su pendiente m
 - Calculada su ordenada en el origen n
 - Calculado el punto de corte con el eje X.
 - Dibujamos esos valores en un par de ejes coordenados y los unimos trazando una línea recta con una regla

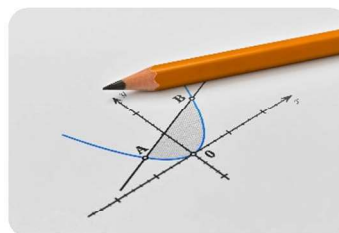
Ejemplos:



FUNCIÓN CUADRÁTICA: PARÁBOLAS (FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 2)

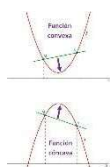
Una parábola es la gráfica de una función polinómica de grado 2, su fórmula es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R}$$



Descripción

1. Indicamos su nombre: parábola
2. Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
 - a. Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 - b. Punto de corte con el eje Y: igualando la $x = 0$ obtenemos el punto de corte: $(0, c)$
6. Simetría: calculamos su vértice $x = -\frac{b}{2a}$, todas las parábolas son simétricas con respecto a la recta vertical que pasa por su vértice.
7. Curvatura
 - a. Si $a > 0 \Rightarrow$ CONVEXA
 - b. Si $a < 0 \Rightarrow$ CÓNCAVA
8. Crecimiento: indicamos los intervalos en los que la función es creciente y decreciente
9. Máximos y mínimos:
 - a. Si la parábola es convexa $\Rightarrow$ tendrá un mínimo absoluto en su vértice
 - b. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow$ tendrá un máximo absoluto en su vértice
10. Punto de inflexión: no tiene, las parábolas no cambian de curvatura: o son cóncavas o son convexas.
11. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas
 - a. Ramas parabólicas:
 - i. Si la parábola es convexa $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 - ii. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - b. Asíntotas: no tiene
12. Calculamos su rango $Img(f)$
 - a. Si la parábola es convexa $\Rightarrow Img(f) = \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right]$
 - b. Si la parábola es cóncava $\Rightarrow Img(f) = \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
13. Periodicidad: no tiene
14. A continuación se dibuja su gráfica. Los pasos para representarla:
 - a. Calculados los puntos de corte con los ejes
 - b. Calculado el vértice
 - c. Teniendo en cuenta su curvatura, representamos esos puntos sobre los ejes coordenados y los unimos teniendo en cuenta que es una curva, no tiene "esquinas"

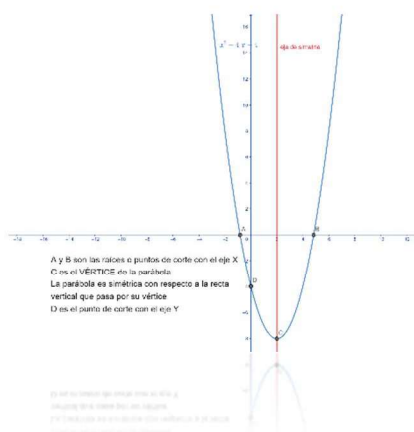


Ejemplos

1. Parábola convexa $y = x^2 - 4x - 4$
2. Parábola cóncava $y = -x^2 + 2x + 6$
3. Parábola que no corta al eje X, convexa: $y = x^2 - 4x + 7$
4. Parábola que no corta al eje X, cóncava: $y = -x^2 - 4x - 5$

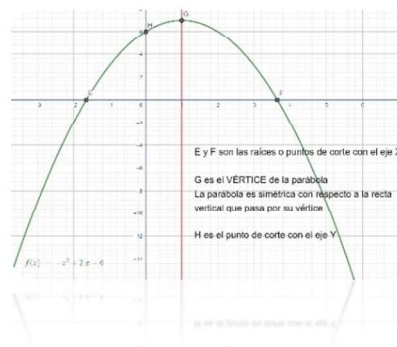
Ejemplo 1

Parábola convexa que corta al EJE X



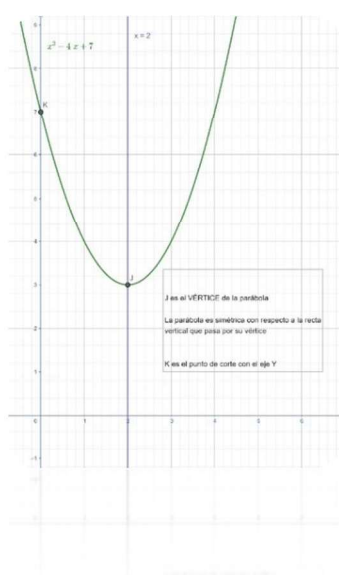
Ejemplo 2

Parábola cóncava que corta al EJE X



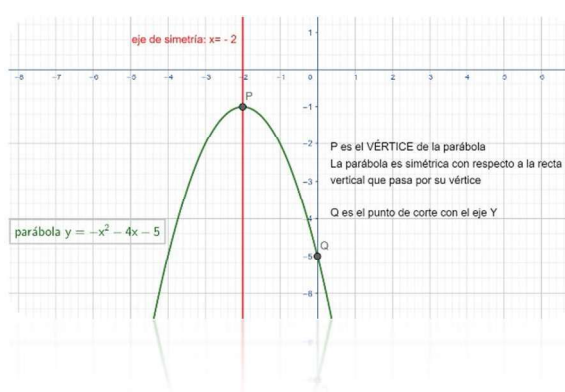
Ejemplo 3

Parábola convexa que NO corta al EJE X



Ejemplo 4

Parábola cóncava que NO corta al EJE X



FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO 3

No tienen ningún nombre “especial”. Su fórmula es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

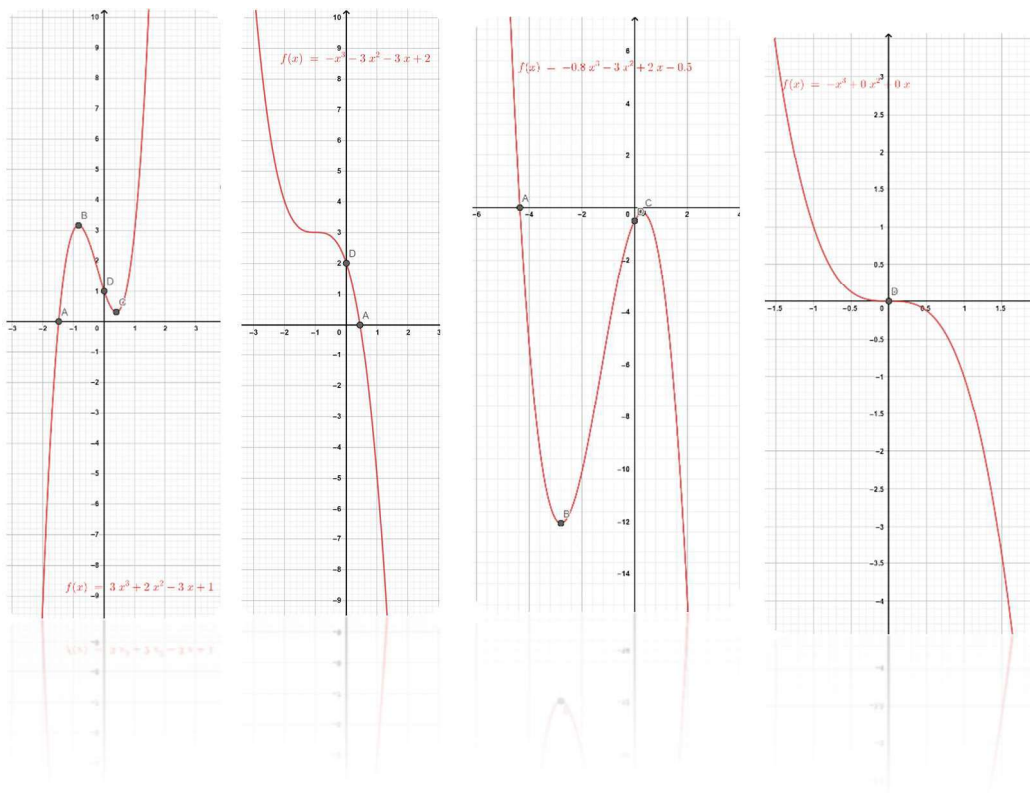
Para calcular sus puntos de corte tenemos necesariamente que aplicar al menos una vez Ruffini o sacar factor común x (en el caso de que no esté el término independiente) para poder reducirla a una ecuación de segundo grado.

Su característica fundamental es que la mitad de la gráfica es convexa (o cóncava) y en la otra se invierte la curvatura, pasando de convexa a cóncava y viceversa. Son simétricas con respecto a su punto de inflexión (el punto en el que cambia su curvatura) y derivables (sin “esquinas”)

Descripción

1. Indicamos su nombre: función polinómica de grado 3
2. Como es una función polinómica se cumple que: $Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene “esquinas”) en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
 - a. Puntos de corte con el eje X: Para calcular sus puntos de corte tenemos necesariamente que aplicar al menos una vez Ruffini o sacar factor común x (en el caso de que no esté el término independiente) para poder reducirla a una ecuación de segundo grado.
 - b. Punto de corte con el eje Y: igualando la $x = 0$ obtenemos el punto de corte: $(0, d)$
6. Simetría: simétricas con respecto a su punto de inflexión (por ahora no tenéis herramientas para calcularlo así que, salvo que se vea a simple vista, os conformaréis con eso).
7. Curvatura: podemos dividir su gráfica en dos tramos, uno cóncavo y otro convexo, separados por su punto de inflexión.
8. Crecimiento: indicamos los intervalos en los que la función es creciente y decreciente
9. Máximos y mínimos:
 - a. En el tramo convexo $\Rightarrow$ podría tener un mínimo RELATIVO en su vértice (para calcularlo se necesita saber derivar así que por ahora, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así)
 - b. En el tramo cóncavo $\Rightarrow$ podría tener un máximo RELATIVO en su vértice (para calcularlo se necesita saber derivar así que por ahora, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así)
10. Punto de inflexión: tiene uno entre el tramo cóncavo y el convexo, salvo que se vea a simple vista, lo dejaréis así.
11. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas
 - a. Ramas parabólicas:
 - i. Si pasa de convexa a cóncava $\leadsto \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
 - ii. Si pasa de cóncava a convexa $\leadsto \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
 - b. Asíntotas: no tiene
12. Rango $Im(f) = \mathbb{R}$
13. Periodicidad: no tiene
14. A continuación se dibuja su gráfica. Los pasos para representarla:
 - a. Calculados los puntos de corte con los ejes
 - b. Si tenemos el punto de inflexión (por ahora no tenéis herramientas para calcularlos, así que, de pedir eso en un ejercicio o en un examen en este momento, tendría que daros yo los puntos y alguna pista sobre la curvatura o no podríais hacerlo, obviamente en el examen del lunes como mucho podréis representar la función $f(x) = x^3$)
 - c. Representamos esos puntos sobre los ejes coordenados y los unimos teniendo en cuenta que es una curva, no tiene “esquinas”

Ejemplos:

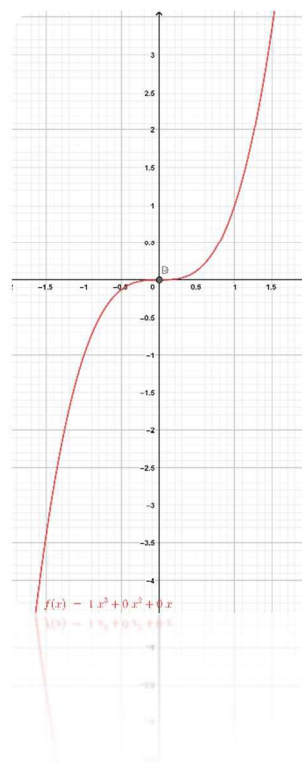


En el siguiente enlace podéis ver cómo cambia la gráfica de una función polinómica de grado tres haciendo variar los valores a, b, c, y d

<https://www.edu.xunta.gal/centros/iesafonsoxcambre/aulavirtual/mod/geogebra/view.php?id=11037>

Ejemplo práctico: Gráfica y descripción de $f(x) = x^3$

1. Función polinómica de grado 3 Por ser función polinómica $\Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R}$
3. Por ser función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Por ser función polinómica es derivable (no tiene "esquinas") en todo $\mathbb{R}$
5. Puntos de corte con los ejes:
 - a. Puntos de corte con el eje X: *igualamos* $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$; punto $(0,0)$
 - b. Punto de corte con el eje Y: *igualamos* $x = 0 \Rightarrow 0^3 = 0 \Rightarrow y = 0$; punto $(0,0)$
6. Simétrica con respecto a su punto de inflexión, se puede ver en la gráfica que es el punto $(0,0)$
 - a. Curvatura: pasa de cóncava a convexa, en $(-\infty, 0)$ es cóncava y en $(0, \infty)$ es convexa
7. Crecimiento: ver en la gráfica que es creciente en todo $\mathbb{R}$
8. Máximos y mínimos: no tiene
9. Punto de inflexión: $(0,0)$ se ve en la gráfica.
10. Ramas infinitas: Asíntotas y ramas parabólicas (se ve en la gráfica)
 - a. Ramas parabólicas: $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - b. Asíntotas: no tiene
11. Rango $Img(f) = \mathbb{R}$
12. Periodicidad: no tiene



FUNCIONES RACIONALES

Llamamos funciones racionales a aquellas cuya ecuación viene definida por fracciones algebraicas (cocientes de funciones polinómicas)

Pasos para calcular el dominio de cualquier función racional:

1. Observamos el denominador (la parte de debajo de la fracción) y buscamos los puntos conflictivos, igualándolo a 0
2. El dominio estará formado por todos los números reales excepto aquellos en los que se anula el denominador (los que calculamos antes)

HIPÉRBOLAS

Es el caso particular de funciones racionales de grado 1. Su ecuación viene definida de la forma:

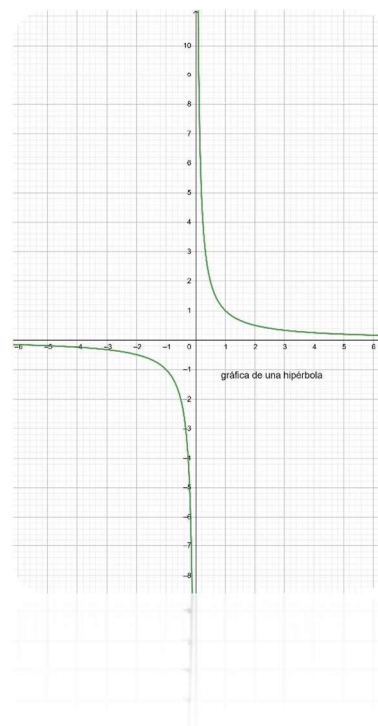
$$f(x) = \frac{a}{mx + n} + b \quad \text{donde } a, b, m, n \in \mathbb{R}$$

A continuación se puede ver cómo es su gráfica y cómo va cambiando según sus parámetros:
<https://www.geogebra.org/graphing/sswmmtxh>

Ejemplo

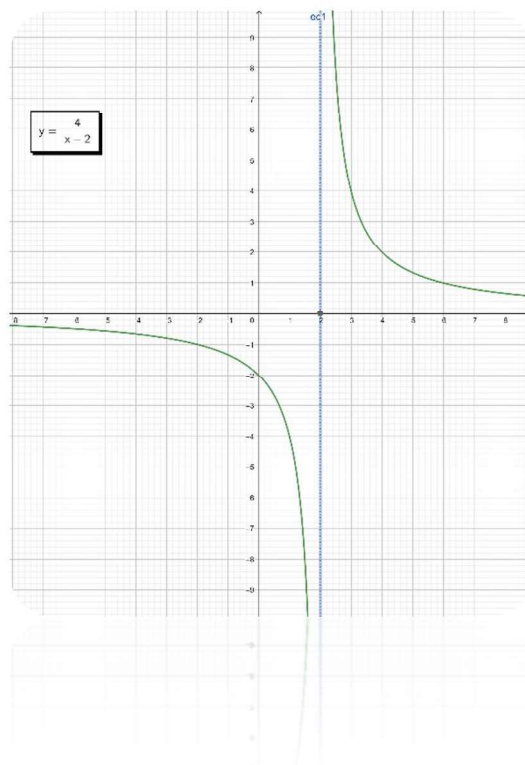
Dibuja y describe la gráfica de la función: $f(x) = \frac{1}{x}$

1. Es una hipérbola
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
3. Es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$ y discontinua en el 0, en el que presenta un salto infinito (más adelante veremos que a esto se le llama discontinuidad Tipo I, pero por ahora no hay que saberlo)
4. Es derivable en su dominio, es decir en $\mathbb{R} - \{0\}$ (mientras no demos derivadas nos limitamos a ver que no tiene "esquinas")
5. Puntos de corte con los ejes:
 - a. Con el eje X: no tiene
 - b. Con el eje Y: no tiene
6. En la gráfica podemos ver que es simétrica con respecto al punto (0,0)
 - a. La gráfica está dividida en dos ramas: En $(-\infty, 0)$ es cóncava y en $(0, \infty)$ es convexa
7. Es decreciente en todo su dominio.
8. Máximos y mínimos: no tiene
9. Puntos de inflexión: no tiene, aunque la función cambia drásticamente su curvatura en el 0, no alcanza ese punto ya que el $0 \notin \text{Dom}(f)$
10. Asíntotas
 - a. Asíntota horizontal en el eje X, esto en lenguaje matemático se escribe así
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ y además $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ (Por ahora no hay que saberlo)
 - b. Asíntota vertical en el eje Y, esto en lenguaje matemático se escribe así:
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y además $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ (Por ahora no hay que saberlo)
11. Imagen, rango o recorrido: $\text{Img}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$
12. No es periódica

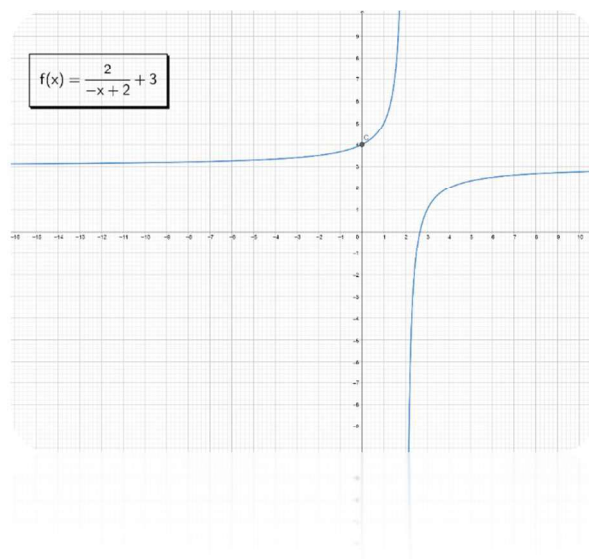


Otros ejemplos de gráficas de hipérbolas

1. Hipérbola
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
3. Continua en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
4. Derivable en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
5. Puntos de corte con los ejes (0,4) y (8/3, 0)
6. Simétrica con respecto al punto (2,3)
7. Convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, \infty)$
8. Creciente en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
9. No tiene máximos ni mínimos
10. Puntos de inflexión: no tiene
11. Asíntota horizontal en $y=3$, asíntota vertical en $x=2$
12. $\text{Img}\left(\frac{2}{-x+2} + 3\right) = \mathbb{R} - \{3\}$
13. No es periódica



1. Hipérbola
2. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
3. Continua en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
4. Derivable en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
5. Puntos de corte con los ejes: $(-2,0)$
6. Simétrica con respecto al punto $(2,0)$
7. Cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, \infty)$
8. Decreciente en $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
9. No tiene máximos ni mínimos
10. Puntos de inflexión: no tiene
11. Asíntota horizontal en $y=0$, asíntota vertical en $x=2$
12. $\text{Im}g\left(\frac{4}{x+2}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$
13. No es periódica



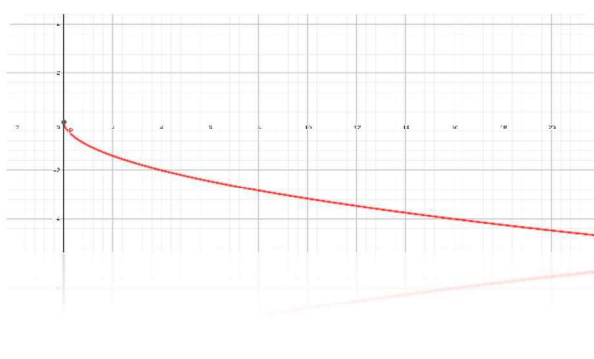
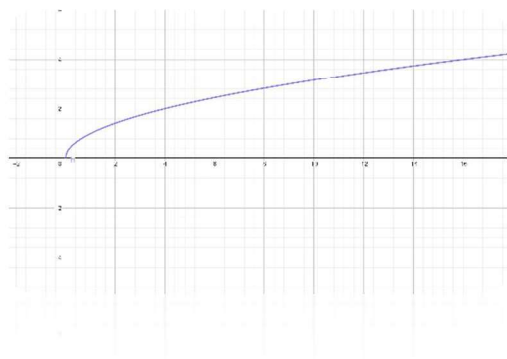
FUNCIONES RADICALES O IRRACIONALES

Funciones en las que x aparece dentro de una raíz de índice PAR

Antes de nada aclarar que $y = \pm\sqrt{x}$ NO ES UNA FUNCIÓN sino, en realidad, DOS FUNCIONES DIFERENTES:

$f(x) = +\sqrt{x}$ y la función $g(x) = -\sqrt{x}$. Pasa lo mismo para cualquier raíz de índice par.

Sus gráficas serían:



Ambas gráficas son simétricas una de la otra con respecto al eje X

1. Función radical
2. $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
3. $\text{Im}(f) = [0, \infty)$
4. Continua en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
5. Derivable en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
6. Punto de corte con los ejes: $(0,0)$
7. Simetría: no tiene
8. Cóncava en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
9. Creciente en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
10. No tiene máximos, tiene un mínimo absoluto en $(0,0)$
11. Puntos de inflexión: no tiene
12. Asíntotas: no tiene. Rama parabólica, toda ella, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$
13. No es periódica

1. Función radical
2. $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
3. $\text{Im}(f) = (-\infty, 0]$
4. Continua en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
5. Derivable en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
6. Punto de corte con los ejes: $(0,0)$
7. Simetría: no tiene
8. Convexa en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
9. Decreciente en su dominio $\text{Dom}(f) = [0, \infty)$
10. Tiene un máximo absoluto en $(0,0)$. No tiene mínimos
11. Puntos de inflexión: no tiene
12. Asíntotas: no tiene. Rama parabólica, toda ella, $\lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{x} = -\infty$
13. No es periódica

Otros ejemplos:

$$1) y = \frac{\sqrt{x-2}}{3}$$

$$4) y = -\frac{x + \sqrt{x}}{5}$$

$$2) y = \sqrt{3x-2} + 3\sqrt{2x-3}$$

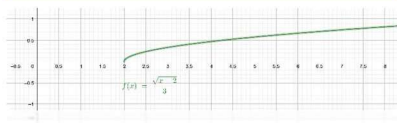
$$5) y = \sqrt{-x+2} - 5$$

$$3) y = \frac{x - \sqrt{x}}{2}$$

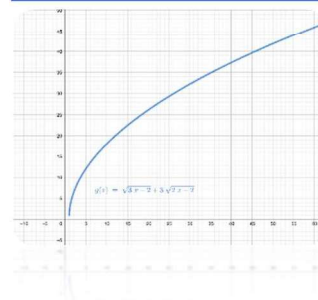
Lo que siempre hay que hacer con estas funciones es **calcular primero su dominio**: aquellos puntos en los que el radicando (lo de dentro de la raíz) es positivo, **resolviendo** para ello **la inecuación correspondiente**.

A continuación se muestran las gráficas de las 5 funciones de los ejemplos anteriores:

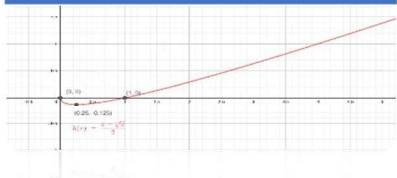
Ejemplo 1



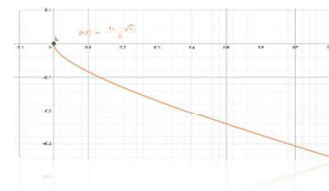
Ejemplo 2



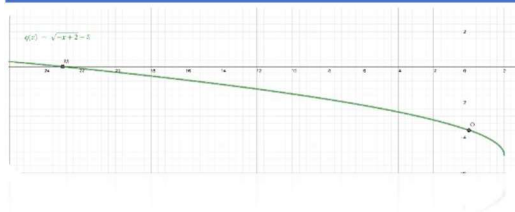
Ejemplo 3



Ejemplo 4



Ejemplo 5



Todas ellas tienen en común que son continuas en su dominio y derivables en su dominio, todas están formadas por una única rama parabólica, no hay asíntotas y pueden ser ó cóncavas ó convexas (una cosa o la otra, pero no ambas cosas), sin tener puntos de inflexión.

Pueden ser ó crecientes ó decrecientes (una cosa o la otra, pero no ambas), y pueden tener extremos relativos en su nacimiento.