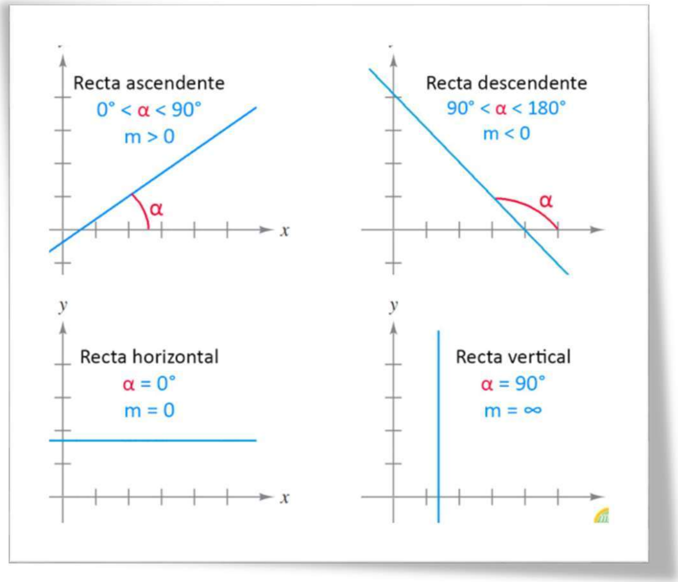
TEMA 11: APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

1. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

PENDIENTE DE UNA RECTA

Es el grado de inclinación de la recta sobre el eje X, se puede calcular como $m = \operatorname{tg} \alpha$ donde α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo OX.

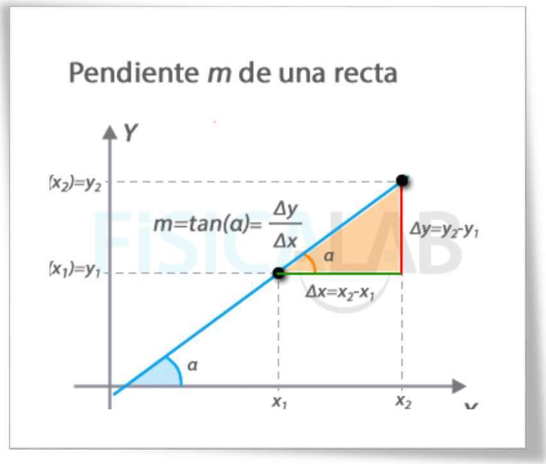


ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE DE UNA RECTA

Sea $\boldsymbol{r}$ una recta que pasa por un punto $P(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ y tenga de pendiente $\boldsymbol{m}$. La ecuación de la recta viene dada por la fórmula:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

PENDIENTE DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS



Si consideramos una recta cualquiera que pase por dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ basta con aplicar la definición de tangente de un ángulo para obtener la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES (O NORMALES)

Sean dos rectas r y s con pendientes m y m' Entonces se cumple:

$$r \parallel s \iff m = m'$$
$$r \perp s \iff m = -\frac{1}{m'}$$

RELACIÓN ENTRE PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA Y DERIVADA

La pendiente de la recta tangente a una curva f en un punto a es

$$m = f'(a)$$

ECUACIONES DE RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad \textit{recta tangente}$$
$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \qquad \textit{recta normal}$$

FICHA RECTA TANGENTE Y NORMAL

BÁSICOS

1. Dada la curva de ecuación $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ halla las coordenadas de los puntos de dicha curva en los que la tangente forma con el eje OX un ángulo de 45°.

2. Dada la parábola $f(x) = x^2$ hallar los puntos en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Encuentra la ecuación de la recta tangente y normal en dichos puntos.

3. ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (1, 0) y (e, 1)?

4. Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, hallar el ángulo que forma su recta tangente en el origen, con el eje de abscisas.

5. Calcular los puntos en que la tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.

6. Se ha trazado una recta tangente a la curva $f(x) = x^3$ cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0,-2). Hallar el punto de tangencia.

7. Buscar los puntos de la curva$f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$ para los cuales la tangente forma un ángulo de 45° con el semieje 0X.

COMPLETOS

8. Calcular la ecuación de la tangente, y si es posible de la normal, a la curva $f(x) = \ln(\operatorname{tg} 2x)$en el punto de abscisa:$x = \pi/2$

9. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva: $9x^2 + y^2 = 18$ que sean paralelas a la recta: $3x - y + 7 = 0$. Calcula también las ecuaciones de las rectas normales correspondientes.

10. *Muy Completo (ideal para examen final)* Hallar el área del triángulo determinado por los ejes coordenados y la tangente a la curva $xy = 1$ en el punto $x = 1$.

CON PARÁMETROS (TÍPICOS ABAU)

11. Determinar los valores del parámetro b, para qué las tangentes a la curva $f(x) = b^2x^2 + 3x + 9$ en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 2$, sean paralelas.

12. Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.

13. La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (2, 3) y (3, 13), siendo la tangente a la misma, en el punto de abscisa 1, paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor numérico de a, b, c.

14. Dada $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determina a, b, c, d sabiendo que la curva pasa por los puntos (-1, 2) y (2, 3), y que rectas tangentes en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -2$ son paralelas al eje OX.

2. CÁLCULO DE LÍMITES POR L'HOPITAL

Sean f y g dos funciones reales de variable real que cumplan las siguientes condiciones:

1º f y g deben ser continuas y derivables en un intervalo abierto al que pertenezca el punto a

2º $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

3º $g´(x) \neq 0 \; para \; cualquier \; x \; del \; intervalo$

4º Existe y es finito el $\lim_{x\to a} \frac{f´(x)}{g´(x)}$

Entonces se cumple:

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f´(x)}{g´(x)}$$

OBSERVACIONES

1º La regla de L´Hopital también se puede aplicar si $x \to \pm\infty$

2º Se puede utilizar para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

3º Si al aplicar L´Hopital una vez nos volvemos a encontrar con otra indeterminación igual, y las funciones siguen cumpliendo las condiciones, se puede volver a aplicar L´Hopital las veces que sea necesario.

4º Para resolver las indeterminaciones $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$, también se puede utilizar L´Hopital pero primero habrá que transformar las funciones hasta conseguir una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y luego aplicar L´Hopital

5º El resto de indeterminaciones ∞^0, 0^0 , $\frac{0}{0}$ se pueden acabar de resolver por L´Hopital si previamente hacemos el logaritmo del límite y tenemos en cuenta que $\lim \ln f(x) = \ln \lim f(x)$

FICHA LHOPITAL

BÁSICOS

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{3x}$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x^2-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-1}{e^{2x}}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^{x^2}}{\cos x-1}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log x}{\operatorname{cotg} x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x\cdot\operatorname{arcsen} x)$

TRANSFORMABLE

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty}[e^{-x}\cdot(x+3)]$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

18) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x\cdot\ln x)$

19) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{e}{e^x-e}\right)$

20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

21) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$

LOGARÍTMICO CON L´HOPITAL

22) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

23) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^x$

24) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\mathrm{co}}$

25) $\lim\limits_{x\to \infty}(2^x-1)^{\frac{2}{x+1}}$

CON PARÁMETROS

26) Sabiendo que el límite existe y es finito calcula el valor del parámetro a y el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\cdot\operatorname{sen} x+x\cdot\cos(3x)}{x^2}$$

27) Halla a y b sabiendo que la siguiente función es continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos x-a\cdot e^x}{x^2} & si\ x\neq 0\\ b & si\ x=0\end{cases}$$

PARA 2º DE BACH

28) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\ln(2-e^x)}$

29) $\lim\limits_{x\to \pi}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}}$

3. MONOTONÍA. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Si $f'(x) > \mathbf{0} \Rightarrow f(x)$ **CRECIENTE**

Si $f'(x) < \mathbf{0} \Rightarrow f(x)$ **DECRECIENTE**

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ f \text{ DECRECIENTE a la izqda. de } a \\ f \text{ CRECIENTE a la drcha de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÍNIMO} \text{ relativo en } a$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ f \text{ CRECIENTE a la izqda. de } a \\ f \text{ DECRECIENTE a la drcha de } a \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÁXIMO} \text{ relativo en } a$$

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ \boldsymbol{f''(a) < 0} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÁXIMO} \text{ relativo en } a$$

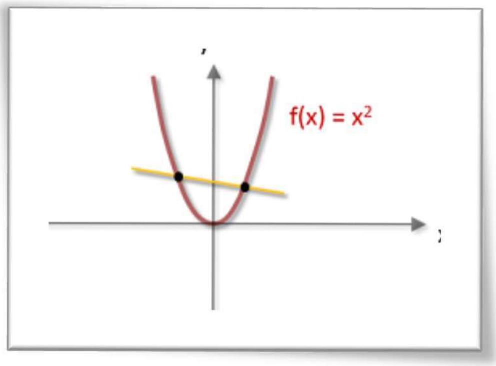
$$\left.\begin{array}{l} a \in Dom(f) \\ f'(a) = 0 \\ \boldsymbol{f''(a) > 0} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene un } \textbf{MÍNIMO} \text{ relativo en } a$$

4. CURVATURA. INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

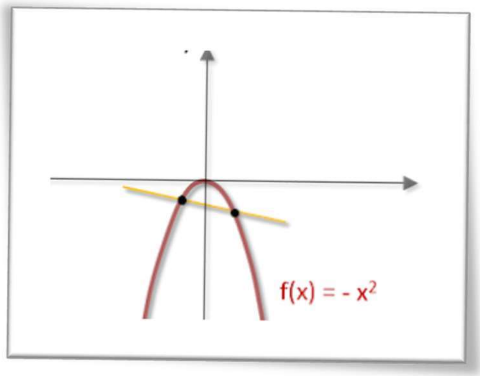
Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es CONVEXA

Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es CONCAVA

FUNCIÓN CONVEXA



FUNCIÓN CÓNCAVA



PUNTOS DE INFLEXIÓN

$$\left.\begin{array}{r} f''(a) = 0 \\ f''(a) \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow (a, f(a)) \text{ PUNTO DE INFLEXIÓN}$$

FICHA MONOTONÍA Y CURVATURA

1. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   a. Calcula el valor de los parámetros sabiendo que tiene un extremo relativo en (0,1) y un punto de inflexión en (1,-1)
   b. Calcula el valor de los parámetros sabiendo que presenta un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1,0)$ es un punto de inflexión y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3
2. Halla los valores de a, b y c sabiendo que la gráfica de la función siguiente tiene una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo relativo de abscisa x=3

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x + c}$$

FICHA APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

En las siguientes funciones estudia sus características (dominio, puntos de corte, asíntotas, máximos, mínimos, curvatura etc.) y luego haz una gráfica aproximada de su gráfica según los resultados que has obtenido:

1. $f(x) = x^5 + x^3$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{2-x^2}{x^2-1}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2+1}$
8. $f(x) = \dfrac{4x^2-5x}{2x^2+7}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-3}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$

5. OPTIMIZACIÓN

PASOS A SEGUIR:

1. Hacemos un dibujo e identificamos las incógnitas.
2. Calculamos la expresión de la **FUNCIÓN QUE QUEREMOS OPTIMIZAR** (dependerá de dos variables x e y.
3. Expresamos la **CONDICIÓN** entre las variables que nos da el problema.
4. En la **CONDICIÓN** que acabamos de escribir (3), despejamos una de las variables en función de la otra.
5. La sustituimos en la **FUNCIÓN QUE QUEREMOS OPTIMIZAR** (2)
6. Derivamos **LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR** e igualamos a cero.
7. Comprobamos, utilizando la segunda derivada, si se trata de máximo o mínimo
8. Resolvemos la otra variable en la **CONDICIÓN** y damos la solución al problema.

FICHA OPTIMIZACIÓN

1. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 5 cm. (sol:$\sqrt{50}cm$,$\sqrt{50}cm$)

2. Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40. (Sol:80/3, 40/3)

3. Averigua cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m2de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima. (sol: 60m,60m)

4. Con 1 m^2 de cartón cómo construirías una caja del mayor volumen posible. (sol: 2/3x2/3x1/6)

5. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que resulten hojas con un coste mínimo? (sol:5x10m)

6. Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50 000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio? (sol: $\approx 28 días$)

7. Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7.5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.(sol: 12´5 cént)

8. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20 euros y el tramo vertical 30 euros. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo. Determinar el coste del marco.(sol: 3m, 2m, 240€)