

TEMA 5: LÍMITES

CONCEPTOS BÁSICOS

Límite LATERAL de una función por la IZQDA.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero **MENORES** que a

Límite de una función

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando toma valores de x muy próximos a a

Límite LATERAL de una función por la DRCHA.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero **MAYORES** que a

Para que el límite de $f(x)$ exista, deben existir los límites laterales en a y ser iguales

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Para calcular el valor del límite sustituimos x por el valor que nos den y operamos.

!!OJO!! la expresión $\lim_{x \rightarrow a}$ la arrastramos todo el ejercicio HASTA QUE SUSTITUÍMOS x por su valor

TABLA DE INDETERMINACIONES (SON 7)

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot \infty$
0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$	

NO SON INDETERMINACIONES

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$(+\infty)^k = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^k = 0, \quad (k < 0)$$

$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$

$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$

$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$

$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

$$-(+\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$k \cdot (+\infty) = -\infty, \quad (k < 0)$$

$$k \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (k > 0)$$

$$k \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (k < 0)$$

$$\frac{k}{+\infty} = 0$$

$$\frac{k}{-\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = \pm\infty$$

$$\frac{-\infty}{0} = -\infty$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$\frac{-\infty}{k} = -\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$(+\infty)^k = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^k = 0, \quad (k < 0)$$

$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$

$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$

$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$

$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

LÍMITES CLASIFICADOS POR INDETERMINACIONES

LÍMITES EN UN PUNTO				
TIPO $\frac{0}{0}$	Polinómicas	1º Factorizamos (Ruffini con el punto del límite, las veces que sea necesario) 2º Simplificamos 3º Recalculamos el límite		
	Con raíces	1º Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz 2º Factorizamos y simplificamos 3º Recalculamos el límite		
	Otras	L'Hopital , fórmula: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$		
TIPO $\frac{k}{0}$	1º Calculamos límites laterales por separado, serán $+\infty$ ó $-\infty$ 2º Para el signo cogemos números próximos por la derecha y por la Izqda. 3º Si los límites laterales son iguales entonces existe el límite y será igual a ellos. En otro caso $\nexists \lim$			
TIPO $0 \cdot \infty$	1º Transformamos el producto en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L'Hopital			
LÍMITES EN EL $+\infty$				
TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Polinómicas	Grado del numerador MAYOR	∞ ó $-\infty$	El signo del cociente de los coeficientes principales
		Grado del numerador MENOR	Lim = 0	
		Grado numerador y denominador IGUAL	Lim = cociente de los coeficientes principales	
	Con raíces	Como en polinomios pero ¡¡OJO!! Debemos de tener en cuenta la influencia de la raíz para calcular el “grado” del numerador y denominador		
	Otras	L'Hopital $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$		
TIPO $\infty - \infty$	Sin raíces	Operamos y lo transformamos en una división de polinomios reduciéndolo al caso $\frac{\infty}{\infty}$		
	Con raíces	Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz		
TIPO $0 \cdot \infty$	1º Transformamos el producto de funciones en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L'Hopital			
LÍMITES EN EL $-\infty$				
Transformamos en $x \rightarrow +\infty$ cambiando x por $-x$ y recalculamos el límite				
CASO ESPECIAL:, TANTO PARA LÍMITES EN UN PUNTO COMO PARA LÍMITES EN EL INFINITO				
TIPO 1^∞	$\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim [f(x)-1] \cdot g(x)}$			
LÍMITES CON PARÁMETROS				
Ver casos prácticos en la ficha de límites				

FICHA LÍMITES

EJERCICIOS TEÓRICOS

Demuestra las siguientes igualdades, justificando razonadamente cada paso:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ donde $n \in \mathbb{N}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0$ donde $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$ donde $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$ donde $a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$

5) Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ son polinomios reales de variable real, de grados respectivamente n y $m \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \\ \text{si } n > m \Rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty & \text{si } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

LÍMITES DE POLINOMIOS Y DE COCIENTES DE POLINOMIOS EN EL ∞ Y $-\infty$

Calcula:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x^2-1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x^3}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x+2}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x}{x+3}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4-4x+8}{2x^3+9}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3-3x^2+25x$

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3-3x^2+25x$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2+5}$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-x}{x-5}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{7x-2}$

15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{4x^2-3}$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^2 + x^5}$

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 + 5}$

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{x-5}$

19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2}$

20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3}$

21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^5 + x^2}$

22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{x+5}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x}{x-1} - x \right)$

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4x}{x-2} - x \right)$

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO, INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{0}{0}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+x}$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2+2x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

15. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

LÍMITES DE FUNCIONES IRRACIONALES (RAÍCES)

Calcula:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4 + 3x^2} - 2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2}}{x + 1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{4 - \sqrt{x}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x + \sqrt{x} - 20}{\sqrt{x} - 4}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 5}{\sqrt{4x^2 - x} + 2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{x + 5}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 5} - x)$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 2}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{x + 4} - 3}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 2}}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 - x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$$

LÍMITES DE SUCESIONES. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Calcula:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4 + 3} \right)$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^2 + 7}{2n} \right)$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n^3 + 1}{2n^3 + n} \right)$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} + \frac{n-1}{n+1} \right)$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2}{n} \right) \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3(1-n)}{2n^2 - n - 1} + \frac{4}{n^2} \right)$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \frac{-n^3}{3n^2 + n + 1} \right)$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4 + 3} \right)$

LÍMITES EXPONENCIALES

Calcula:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{4x} \right)^{3x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 3} \right)^{x^2 - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 - 2} \right)^{-2x+3}$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{x^2 - 3}$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{2n^2 - 1}{n^2 - 1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x}$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^{\frac{n+1}{n^2}}$

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^{2x}$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2} \right)^{\frac{n+1}{n^2}}$

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-5} \right)^{6x-2}$

LÍMITES CON PARÁMETROS

1. Calcula k para $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx + 5} - \sqrt{x^2 - 3x}) = 4$

2. Calcula a para $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}) = 1$