

TEMA 5: LÍMITES

CONCEPTOS BÁSICOS

Límite LATERAL de una función por la IZQDA.

 $\lim_{x\to a^-} f(x)$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero **MENORES** que a

Límite de una función

 $\lim_{x\to a} f(x)$

Es el valor al que tiende la función cuando toma valores de x muy próximos a a

Límite LATERAL de una función por la DRCHA.

 $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero MAYORES que a

Para que el límite de f(x) exista, deben existir los límites laterales en a y ser iguales

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Para calcular el valor del límite sustituimos x por el valor que nos den y operamos.

 $\verb|!!OJO||$ la expresión $\lim_{x \to a}$ la arrastramos todo el ejercicio HASTA QUE SUSTITUÍMOS x por su valor

TABLA DE INDETERMINACIONES (SON 7)

$$\infty-\infty$$
 $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ $0\cdot\infty$ 0^0 $1^{\pm\infty}$



NO SON INDETERMINACIONES

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \ (+\infty)^{-\infty} = 0$$

 $(+\infty)^k = +\infty, \ (k > 0)$
 $(+\infty)^k = 0, \ (k < 0)$
 $k^{+\infty} = +\infty, \ (k > 1)$
 $k^{-\infty} = 0, \ (k > 1)$
 $k^{+\infty} = +\infty, \ (0 < k < 1)$
 $k^{-\infty} = +\infty, \ (0 < k < 1)$

$$-(+\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$k \cdot (+\infty) = -\infty, \quad (k < 0)$$

$$k \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (k < 0)$$

$$k \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (k < 0)$$

$$\frac{k}{+\infty} = 0 \qquad \frac{k}{-\infty} = 0$$

$$\frac{k}{0} = \pm \infty \qquad \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$

$$\frac{-\infty}{k} = -\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \ (+\infty)^{-\infty} = 0$$

$$(+\infty)^k = +\infty, \ (k > 0)$$

$$(+\infty)^k = 0, \quad (k < 0)$$

$$k^{+\infty} = +\infty, \ (k > 1)$$

$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$

$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$

$$k^{-\infty} = +\infty, \ (0 < k < 1)$$



LÍMITES CLASIFICADOS POR INDETERMINACIONES

LÍMITES	S EN UN PUNTO											
	T	10.5										
TIPO	Delinémies	1º Factorizamos (Ruffini con el punto del límite, las veces que sea necesario)										
	Polinómicas	2º Simplificamos 3º Recalculamos el límite										
0	Con raíces	 1º Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz 2º Factorizamos y simplificamos 										
0	Contraices	3º Recalculamos el límite										
	Otras	L'Hopital , fórmula: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$										
TIPO	1º Calculamos límites laterales por separado, serán $+\infty$ ó $-\infty$											
$\frac{k}{}$	2º Para el signo cogemos números próximos por la derecha y por la Izqda.											
0	3º Si los límites laterales son iguales entonces existe el límite y será igual a ellos. En otro caso											
TIPO	1º Transformamos el producto en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones											
TIPO	2º Obtenemos $\frac{\infty}{m}$											
0. ∞	3º Aplicamos L´Hopital											
3- Apricanios E nopical												
LÍMITES	SENEL +∞											
		Grado del numerador MAYOR	∞ ó -∞	El signo del cociente de los coeficientes principales								
	Polinómicas	Grado del numerador MENOR Lim = 0										
TIPO		Grado numerador y denominador IGUAL Lim = cociente de los coeficientes principales										
<u>∞</u>												
∞	Con raíces	Como en polinomios pero ¡¡OJO!! Debemos de tener en cuenta la influencia de la raíz										
		para calcular el "grado" del numerador y denominador										
	Otras	L'Hopital $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$										
TIPO	Sin raíces		n una división de polinomios reduciéndolo al caso $\frac{\infty}{\infty}$									
$\infty - \infty$	Con raíces Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz											
	1º Transforma	amos el producto de funciones en u	na fracción,	dividiendo por la inversa de una de las								
TIPO	funciones	m										
	2º Obtenemo	$s\frac{\omega}{\infty}$										
0.∞	3º Aplicamos	L´Hopital										
LÍMITES	S EN EL −∞											
Transfor	mamos en $x \to +\infty$ ca	ambiando x por - x y recalculamos	el límite									
CASO E	SPECIAL:, TANTO P	ARA LÍMITES EN UN PUNTO CO	OMO PARA	LÍMITES EN EL INFINITO								
TIPO 1^{∞}		$\lim[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim[f(x)-1] \cdot g(x)}$										
LÍMITES	CON PARÁMETRO	S										
Ver caso	'er casos prácticos en la ficha de límites											
	- 1											



FICHA LÍMITES

EJERCICIOS TEÓRICOS

Demuestra las siguientes igualdades, justificando razonadamente cada paso:

1)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \ donde \ n \in \mathbb{N}$$

2)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \ donde \ k \in \mathbb{R} \ con \ k \neq 0$$

3)
$$\lim_{x\to\infty}a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=\lim_{x\to\infty}a_nx^n\ donde\ a_n,\ldots,a_1,a_0\ \in\mathbb{R}\ y\ n\in\mathbb{N}$$

4)
$$\lim_{x \to \infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } a_n > 0 \\ -\infty \text{ si } a_n < 0 \end{cases} \text{ donde } a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

5) Si
$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$
 y $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ son polinomios reales de variable real, de grados respectivamente n y $m \Rightarrow$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

$$\sin x \to 0$$

LÍMITES DE POLINOMIOS Y DE COCIENTES DE POLINOMIOS EN EL ∞ Y -∞

Calcula:

1.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$2. \quad \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{3-x}$$

3.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x^2 - 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x^3}$$

$$5. \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x + 2}$$

$$6. \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x}$$

7.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - 3x}{x + 3}$$

8.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x}$$

9.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 4x + 8}{2x^3 + 9}$$

10.
$$\lim_{x \to \infty} x^3 - 3x^2 + 25x$$

11.
$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x^2 + 25x$$

12.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2 + 5}$$

$$13. \quad \lim_{x \to \infty} \frac{5 - x}{x - 5}$$

14.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2}$$

15.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3}$$



16.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^2 + x^5}$$

17.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2 + 5}$$

$$18. \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{5-x}{x-5}$$

19.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2}$$

$$20. \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3}$$

21.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^5 + x^2}$$

$$22. \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{5-x}{x+5}$$

$$23. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x - 1} - x \right)$$

$$24. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4x}{x - 2} - x \right)$$

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO, INDETERMINACIONES DEL TIPO $\frac{0}{0}$

$$1. \quad \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$$

2.
$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$$

3.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

4.
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$$

5.
$$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$$

6.
$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$$

7.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

8.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$$

9.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x^2}$$

10.
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2}{x^2 + 2x}$$

11.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4 - 10x^2}$$

12.
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3}$$

13.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

14.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$$

15.
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$$

16.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

17.
$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$$

18.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$$

19.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$$

$$20. \quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

21.
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

24.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$



LÍMITES DE FUNCIONES IRRACIONALES (RAÍCES)

Calcula:

$$1. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}$$

$$2. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$$

$$3. \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

4.
$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x-3}$$

5.
$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

6.
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{4 + 3x^2} - 2}$$

7.
$$\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

8.
$$\lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

9.
$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x+1}$$

10.
$$\lim_{x \to 16} \frac{x - 16}{4 - \sqrt{x}}$$

11.
$$\lim_{x \to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4}$$

12.
$$\lim_{x \to 16} \frac{x + \sqrt{x} - 20}{\sqrt{x} - 4}$$

13.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

14.
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

15.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1}{x}$$

16.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2 - x + 2}}$$

17.
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{x + 5}$$

$$18. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+5} - x \right)$$

19.
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 2}}$$

$$20. \quad \lim_{x \to 5} \frac{2x - 10}{\sqrt{x + 4} - 3}$$

21.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

22.
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 1}{x^2 + x + 2}}$$

$$23. \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 2x} - x$$

24.
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 - x}$$

25.
$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$$

LÍMITES DE SUCESIONES. FRACCIONES ALGEBEBRAICAS

Calcula:

1.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)$$

$$2. \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4 + 3} \right)$$



$$3. \quad \lim_{n \to \infty} \ln \left(\frac{n^2 + 7}{2n} \right)$$

4.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n-1} + \frac{n-1}{n+1} \right)$$

5.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^3 (1-n)}{2n^2 - n - 1} + \frac{4}{n^2} \right)$$

6.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^4 + 1}{2n^4 + 1} + \frac{-n^3}{3n^2 + n + 1} \right)$$

$$7. \quad \lim_{n \to \infty} \ln \left(\frac{2n^3 + 1}{2n^3 + n} \right)$$

8.
$$\lim_{n \to \infty} \ln \left(\frac{2}{n} \right) \frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)^2}$$

9.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^5 - n^2}{2n^6 + 1} - \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)$$

10.
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-1}{n^3} \cdot \frac{4n^4}{2n^4+3} \right)$$

LÍMITES EXPONENCIALES

Calcula:

$$1. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{4x} \right)^{3x}$$

$$2. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 - 2} \right)^{-2x + 3}$$

3.
$$\lim_{n \to \infty} 9^{\frac{2n^2 - 1}{n^2 - 1}}$$

4.
$$\lim_{n \to \infty} 0.1^{\frac{n+1}{n^2}}$$

5.
$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2} \right)^{\frac{n+1}{n^2}}$$

6.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{2x^2 + 3} \right)^{x^2 - 2}$$

7.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1} \right)^{x^2 - 3}$$

$$8. \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x}$$

9.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right)^{2x}$$

10.
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-5} \right)^{6x-2}$$

LÍMITES CON PARÁMETROS

1. Calcula
$$k$$
 para $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+kx+5} - \sqrt{x^2-3x}\right) = 4$

2. Calcula
$$a$$
 para $\lim_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1}\right) = 1$



TEMA 6: CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

De forma intuitiva podríamos decir que una función es continua si podemos "dibujarla sin levantar el lápiz". Ahora daremos una definición formal.

CONTINUIDAD EN UN PUNTO

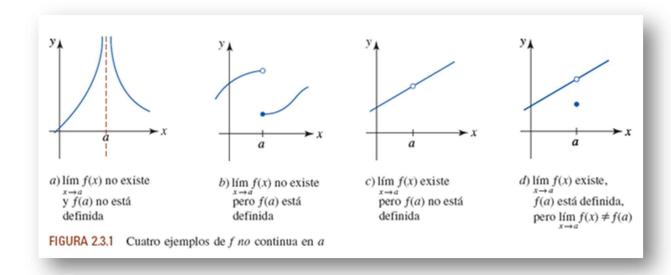
f(x) es continua en un punto x=a si existe el valor de la función en ese punto y coincide con el límite $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$

La función SIEMPRE es discontinua en los puntos que NO pertenecen al dominio.

f(x) es continua si lo es en todos los puntos de su DOMINIO

TIPOS DE DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

- I. **SALTO INFINITO**. En este caso alguno de los límites laterales es infinito (obviamente el punto NO pertenece al dominio)
- II. SALTO FINITO. En este caso los límites laterales son finitos pero distintos (a la diferencia entre ambos se le llama magnitud del salto)
- **III. FALTA EL PUNTO**. Discontinuidad de tipo "evitable", en este caso existen ambos límites laterales y son finitos pero la función no está definida en ese punto.
- **IV. PUNTO DESPLAZADO**. Discontinuidad de tipo "evitable", en este caso existen ambos límites laterales y son finitos pero no coinciden con el valor de la función en ese punto.





CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Todas las funciones elementales (ver tema 1) son continuas en su DOMINIO

ESTUDIO DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

En las funciones definidas a trozos estudiamos por separado la continuidad de cada una de las funciones que la componen, después estudiamos la continuidad de la función en los puntos de unión de esos trozos, calculando los límites laterales en los mismos, teniendo en cuenta que a la derecha e izquierda la función es diferente.

ESTUDIO DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN CON VALOR ABSOLUTO

Primero tenemos que definir la función a trozos y luego hacemos lo mismo que en el caso anterior.

FICHA CONTINUIDAD

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

1)
$$\frac{x-2}{-15x^4 + 3x^6 + 18x^2 - x^5 + 5x^3 - 6x}$$

$$2) \quad \frac{x}{x^2 + 4}$$

3)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

4)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + 5 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

5)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

6)
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$$

7)
$$f(x) = |x - 2| + 1$$

8)
$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & si \ x < 0 \\ -2 & si \ x = 0 \\ \frac{x}{x+2} & si \ x > 0 \end{cases}$$

9) halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R} $f(x) = \begin{cases} -x^2+2 & \text{si } x \leq -2 \\ kx & \text{si } x > -2 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \le -2\\ kx & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

10) halla el valor de a y b para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb R$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ ax^2 + bx & \text{si } -2 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

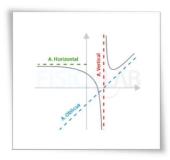
11) halla el valor de a para que la siguiente función sea continua en todo
$$\mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



TEMA 7: ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas de una función son líneas imaginarias hacia donde tiende la función pero sin llegar a tocarla. No siempre una función tiene asíntotas. La posición de la gráfica con respecto a las asíntotas es muy valiosa a la hora de dibujar la función.



ASÍNTOTAS VERTICALES

Son rectas verticales (no son funciones) y su ecuación es x=b, donde b es el valor que cumple que el límite de la función f(x) o alguno de sus límites laterales es $+\infty$ ó $-\infty$

Los posibles candidatos son los puntos que NO pertenecen al dominio

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Son rectas horizontales (paralelas al eje X) tienen la forma y=k donde k es un número que cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = k$$

$$y/o$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Una asíntota oblicua tiene la forma y=mx+n siendo m la pendiente de dicha recta y n la ordenada en el origen, se obtienen mediante las fórmulas:

$$m = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$$
 $n = \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) - mx]$

TRUCOS A TENER EN CUENTA

- Si una función (que no sea por trozos) tiene asíntota horizontal, NO puede tener oblicua
- Si la función es un cociente de dos polinomios tendrá asíntota oblicua si el grado del numerador es uno más que el grado del denominador
- Hay que calcular los límites para las dos ramas (±∞) por separado, siempre dentro del dominio de la función. En el caso de cocientes de polinomios no es necesario, ya que si existe será igual para ambas ramas



POSICIÓN RELATIVA DE LA FUNCIÓN CON RESPECTO A SU ASÍNTOTA

EJEMPLOS	$\lim_{x \to k} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to k} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to k} f(x) = \infty$	$\lim_{X \to \mathbf{K}^{\mathbf{T}}} f(X) = +\infty$	3 $\lim_{x \to k} f(x) = +\infty$ 4 $\lim_{x \to k^+} f(x) = -\infty$	×	$\lim_{X \to \infty} f(x) = \lim_{X \to \infty} f(x) = k$ $\lim_{X \to \infty} f(x) = k$ $\lim_{X \to \infty} f(x) = k$	$\lim_{k \to \infty} $		
PASOS A SEGUIR	Si $\lim_{x\to k^+}f(x)=+\infty$ la función se aproxima a la asintota por la DRCHA. de k desde el $+\infty$	Si $\lim_{x\to k^+}f(x)=-\infty$ la función se aproxima a la asintota por la DRCHA. de k desde el $-\infty$	Si $\lim_{x\to k^-}f(x)=+\infty$ la función se aproxima a la asintota por la IZQDA. de k desde el $+\infty$	Si $\lim_{x \to k^-} f(x) = -\infty$ la función se aproxima a la síntota por la IZQDA. de k desde el $-\infty$	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0 ⁻ la función estará por DEBAJO de la asíntota.	Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.	Si el límite tiende a 0 por valores negativos 0 [—] la función estará por DEBAJO de la asíntota.	Si el límite tiende a 0 por valores positivos 0^+ la función estará por ARRIBA de la asíntota.
POSICIÓN RELATIVA DE $f(x)$ Y SUS ASÍNTOTAS	Miramos el signo del límite infinito a la IZQDA. y DERCHA. de <i>k</i>				1º Construimos la función $g(x) = f(x) - k$ 2º comprobamos $x \to \pm \infty$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x \to \pm \infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-		1º Construimos la función $g(x) = f(x) - k$ 2º comprobamos $\lim_{x \to \pm \infty} g(x) = 0$ 3º Observamos para cada límite si $\lim_{x \to \pm \infty} g(x) = 0^+$ ó 0^-	
CONDICIONES Y CÓMO SE CALCULAN	19 Buscamos puntos de NO DOMINIO, puede ser $k \notin Dom(f)$ o, si es a trozos, que no pertenezca al dominio de alguna de sus ramas. 29 miramos si se cumple alguna de las condiciones: $\lim_{x\to k} f(x) = \pm \infty$ $\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm \infty$ $\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm \infty$ $\lim_{x\to k^-} f(x) = \pm \infty$				Calculamos los límites de la función en el $\pm \infty$ y miramos si nos da un número real k $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$ y/o $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$		1º calculamos $m \neq 0$ $m = \lim_{x \to \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$ 2º calculamos n $n = \lim_{x \to \pm \infty} [f(x) - mx]$	
DESCRIPCIÓN		rectas verticales	$x = k$ $k \text{ es } n^{9} \text{ real}$		rectas horizontale s ecuación y = k k es nº real Cualquier recta con $m \neq 0$		$m \neq 0$	
TIPO	ASÍNTOTA VERTICAL $x = k$				ASÍNTOTA HORIZONTAL $y = k$ ASÍNTOTA		ASÍNTOTA	OBLICUA $y = mx + n$



FICHA ASÍNTOTAS

Estudia las asíntotas de las siguientes funciones y la posición relativa de la función con respecto a sus asíntotas. En base a la información obtenida haz un boceto de la gráfica de la función.

$$1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$2) \quad y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

3)
$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

4)
$$f(x) = (x-1) \cdot e^x$$
 (este es para más adelante, se hace por reglas de derivadas usando L'Hopital)

5)
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 1}$$

6)
$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$7) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$8) \quad f(x) = \frac{x^3}{4x^2 - 1}$$

9) Halla los valores de a y b sabiendo que la gráfica tiene una asíntota vertical en x=2 y una asíntota oblicua de pendiente 2, para la función:

$$f(x) = \frac{ax^2 + 3}{x + b}$$