TEMA 5: LÍMITES

CONCEPTOS BÁSICOS

Límite LATERAL de una función por la IZQDA.

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a a pero **MENORES** que $\boldsymbol{a}$

Límite de una función

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando toma valores de x muy próximos a a

Límite LATERAL de una función por la DRCHA.

$$\lim_{x \to a^+} f(x)$$

Es el valor al que tiende la función cuando x toma valores muy próximos a $\boldsymbol{a}$ pero **MAYORES** que $\boldsymbol{a}$

Para que el límite de $\boldsymbol{f(x)}$ exista, deben existir los límites laterales en $\boldsymbol{a}$ y ser iguales

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Para calcular el valor del límite sustituimos x por el valor que nos den y operamos.

!!OJO¡¡ la expresión $\lim\limits_{x \to a}$ la arrastramos todo el ejercicio HASTA QUE SUSTITUÍMOS x por su valor

TABLA DE INDETERMINACIONES (SON 7)

$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0 \cdot \infty$
0^0	∞^0	$1^{\pm\infty}$	

NO SON INDETERMINACIONES

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$
$$(+\infty)^{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$(+\infty)^{k} = 0, \quad (k < 0)$$
$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$
$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$
$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$
$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

$$-(+\infty) = -\infty$$
$$-(-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$
$$k\cdot(+\infty) = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$k\cdot(+\infty) = -\infty, \quad (k < 0)$$
$$k\cdot(-\infty) = -\infty, \quad (k > 0)$$
$$k\cdot(-\infty) = +\infty, \quad (k < 0)$$

$$\frac{k}{+\infty} = 0 \qquad \frac{k}{-\infty} = 0$$
$$\frac{k}{0} = \pm\infty \qquad \frac{-\infty}{0} = -\infty$$
$$\frac{\infty}{0} = \infty \qquad \frac{+\infty}{0} = +\infty$$
$$\frac{+\infty}{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$\frac{-\infty}{k} = -\infty, \quad (k > 0)$$

$$(+\infty)^{+\infty} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\infty} = 0$$
$$(+\infty)^{k} = +\infty, \quad (k > 0)$$
$$(+\infty)^{k} = 0, \quad (k < 0)$$
$$k^{+\infty} = +\infty, \quad (k > 1)$$
$$k^{-\infty} = 0, \quad (k > 1)$$
$$k^{+\infty} = 0, \quad (0 < k < 1)$$
$$k^{-\infty} = +\infty, \quad (0 < k < 1)$$

LÍMITES CLASIFICADOS POR INDETERMINACIONES

LÍMITES EN UN PUNTO

TIPO $\frac{0}{0}$	Polinómicas	1º Factorizamos (Ruffini con el punto del límite, las veces que sea necesario) 2º Simplificamos 3º Recalculamos el límite
	Con raíces	1º Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz 2º Factorizamos y simplificamos 3º Recalculamos el límite
	Otras	L'Hopital , fórmula: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
TIPO $\frac{k}{0}$	1º Calculamos límites laterales por separado, serán $+\infty$ ó $-\infty$ 2º Para el signo cogemos números próximos por la derecha y por la Izqda. 3º Si los límites laterales son iguales entonces existe el límite y será igual a ellos. En otro caso $\nexists$lim	
TIPO $0\cdot\infty$	1º Transformamos el producto en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L´Hopital	

LÍMITES EN EL $+\infty$

TIPO $\frac{\infty}{\infty}$	Polinómicas	Grado del numerador MAYOR	∞ ó $-\infty$	El signo del cociente de los coeficientes principales
		Grado del numerador MENOR	Lim = 0	
		Grado numerador y denominador IGUAL	Lim = cociente de los coeficientes principales	
	Con raíces	Como en polinomios pero **¡¡OJO!!** Debemos de tener en cuenta la influencia de la raíz para calcular el *"grado"* del numerador y denominador		
	Otras	L´Hopital $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$		
TIPO $\infty-\infty$	Sin raíces	Operamos y lo transformamos en una división de polinomios reduciéndolo al caso $\frac{\infty}{\infty}$		
	Con raíces	Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz		
TIPO $0\cdot\infty$	1º Transformamos el producto de funciones en una fracción, dividiendo por la inversa de una de las funciones 2º Obtenemos $\frac{\infty}{\infty}$ 3º Aplicamos L´Hopital			

LÍMITES EN EL $-\infty$

Transformamos en $x \to +\infty$ cambiando x por - x y recalculamos el límite

CASO ESPECIAL:, TANTO PARA LÍMITES EN UN PUNTO COMO PARA LÍMITES EN EL INFINITO

TIPO 1^{∞}	$\lim[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}$

LÍMITES CON PARÁMETROS

Ver casos prácticos en la ficha de límites