EJERCICIO 1

b) **(2.5 puntos)** La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28. Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener el máximo beneficio económico?

Llamamos "x" al número de pañuelos que se confeccionan, "y" al número de corbatas confeccionadas.

Hacemos una tabla para organizar la información proporcionada.

	Nº horas	Beneficio
Número de pañuelos (x)	2x	4x
Número de corbatas (y)	3y	6y
TOTALES	$2x+3y$	$4x+6y$

La función que queremos maximizar es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=4x+6y$.

Las restricciones son las siguientes.

El taller solo dispone de 60 horas semanales → $2x+3y\leq 60$

El número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28 → $y+2x\geq 28$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\leq 60 \\ y+2x\geq 28 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible que contiene la solución del problema.

$2x+3y=60$

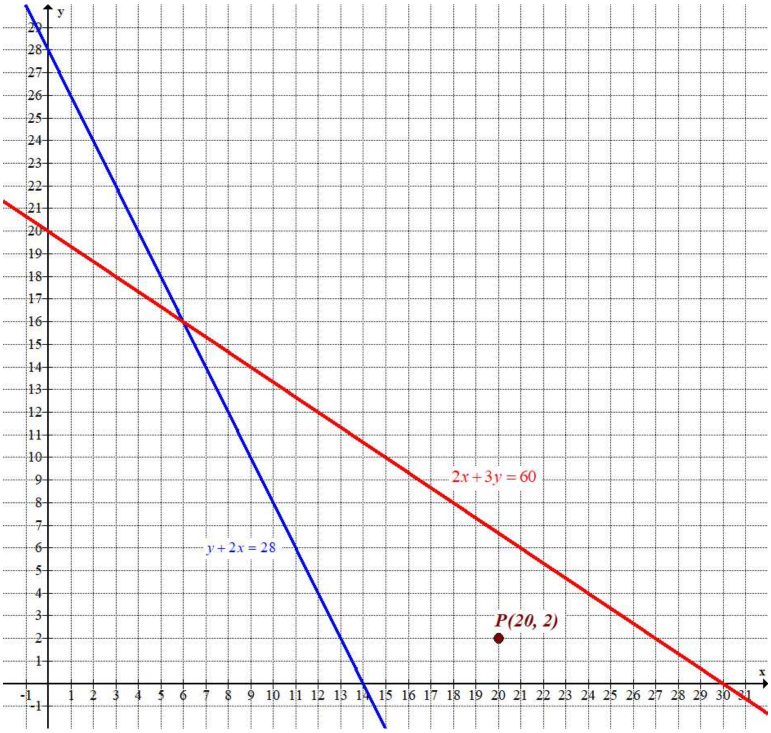
x	$y=\dfrac{60-2x}{3}$
0	20
6	16
30	0

$y+2x=28$

x	$y=28-2x$
0	28
6	16
14	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

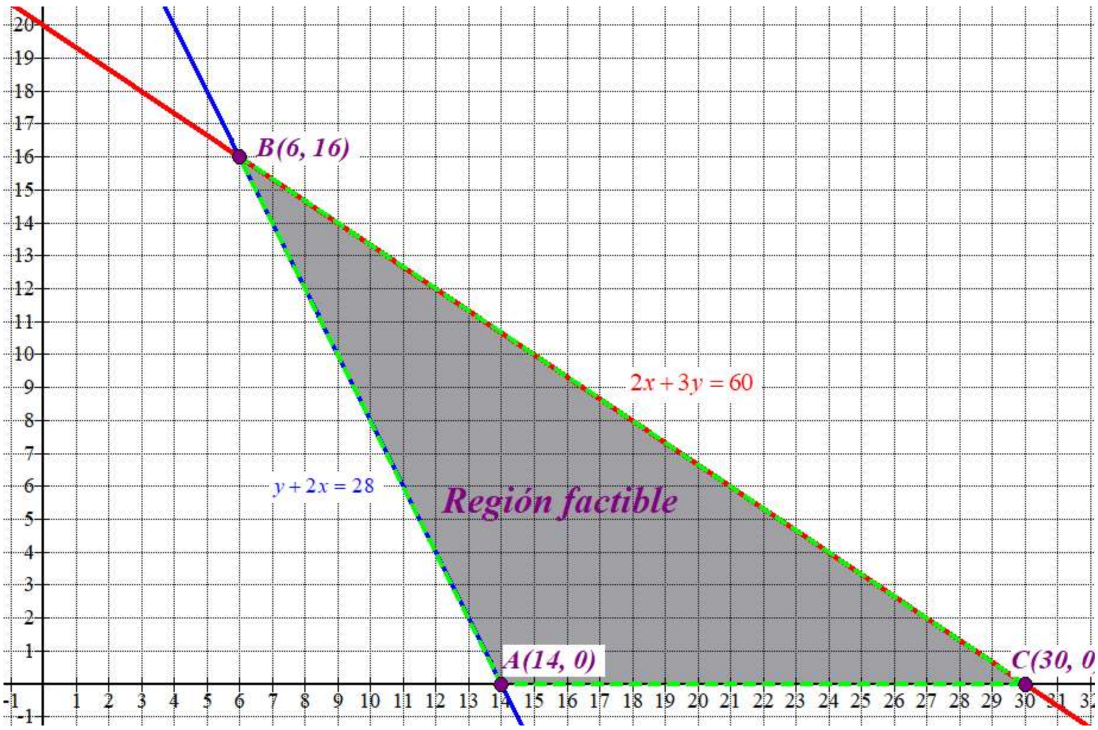
Primer cuadrante



La región factible está situada en el primer cuadrante por encima de la recta azul y por debajo de la recta roja. Comprobamos que el punto P(20, 2) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 20+3\cdot 2\leq 60 \\ 2+2\cdot 20\geq 28 \\ 20\geq 0;\ 2\geq 0 \end{array}\right\}\ \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=4x+6y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(14, 0) → $B(14,0)=4\cdot14+6\cdot0=56$

B(6, 16) → $B(6,16)=4\cdot6+6\cdot16=120$ ¡*Máximo*!

C(30, 0) → $B(30,0)=4\cdot30+6\cdot0=120$ ¡*Máximo*!

El valor máximo es 120 € y se alcanza en los vértices B y C. Se consigue el beneficio máximo de 120 € en cualquier punto con coordenadas enteras del segmento BC: B(6, 16), (9, 14), (12, 12), (18, 8), (21, 6), (24, 4), (27, 2) o C(30, 0).
Se puede conseguir el máximo beneficio de 120 € cumpliendo las restricciones de muchas formas: confeccionado 6 pañuelos y 16 corbatas, o bien con 9 pañuelos y 14 corbatas, ….., o bien 30 pañuelos y 0 corbatas.

4.1 Canarias experimenta un aumento de los turistas que visitan las islas por lo que, para maximizar sus beneficios, una empresa quiere ampliar su flota de vehículos de alquiler. La empresa tiene previsto adquirir un máximo de 150 vehículos. Además, la experiencia indica que debe comprar un mínimo de 20 vehículos de gama alta y, como máximo, 120 de gama media. Asimismo, los vehículos de gama media deben ser, al menos, el doble que los de gama alta.
Si se espera obtener un beneficio anual de 2000€ por cada vehículo de gama media y 3000€ por cada uno de gama alta:
a) (0,75 puntos) Formular el correspondiente problema de programación lineal.
b) (1.5 puntos) ¿Cuántos vehículos de cada tipo deben adquirir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio máximo?
c) (0.75 puntos) Debido a los requisitos de limitación de emisiones contaminantes, la empresa finalmente decide adquirir 35 vehículos de gama alta y 110 de gama media, lo que le permite acogerse a una subvención de 150€ adicionales de beneficio por cada coche de gama media. ¿Cumple esta elección los requisitos del problema? ¿Compensa la subvención los beneficios que dejan de generarse por no elegir la solución óptima del apartado b?

a) Llamamos x = número de coches de gama alta e y = número de coches de gama media.
La función que deseamos maximizar son los beneficios anuales $B(x,y)=3000x+2000y$ sometida a las restricciones siguientes.

La empresa tiene previsto adquirir un máximo de 150 vehículos → $x+y\leq 150$
Debe comprar un mínimo de 20 vehículos de gama alta y, como máximo, 120 de gama media → $x\geq 20;\ y\leq 120$
Los vehículos de gama media deben ser, al menos, el doble que los de gama alta → $y\geq 2x$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 150 \\ x\geq 20 \\ y\leq 120 \\ y\geq 2x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$x+y=150$

x	$y=150-x$
20	130
50	100
120	30

$x=20$

$x=20$	y
20	40
20	100
20	120

$y=120$

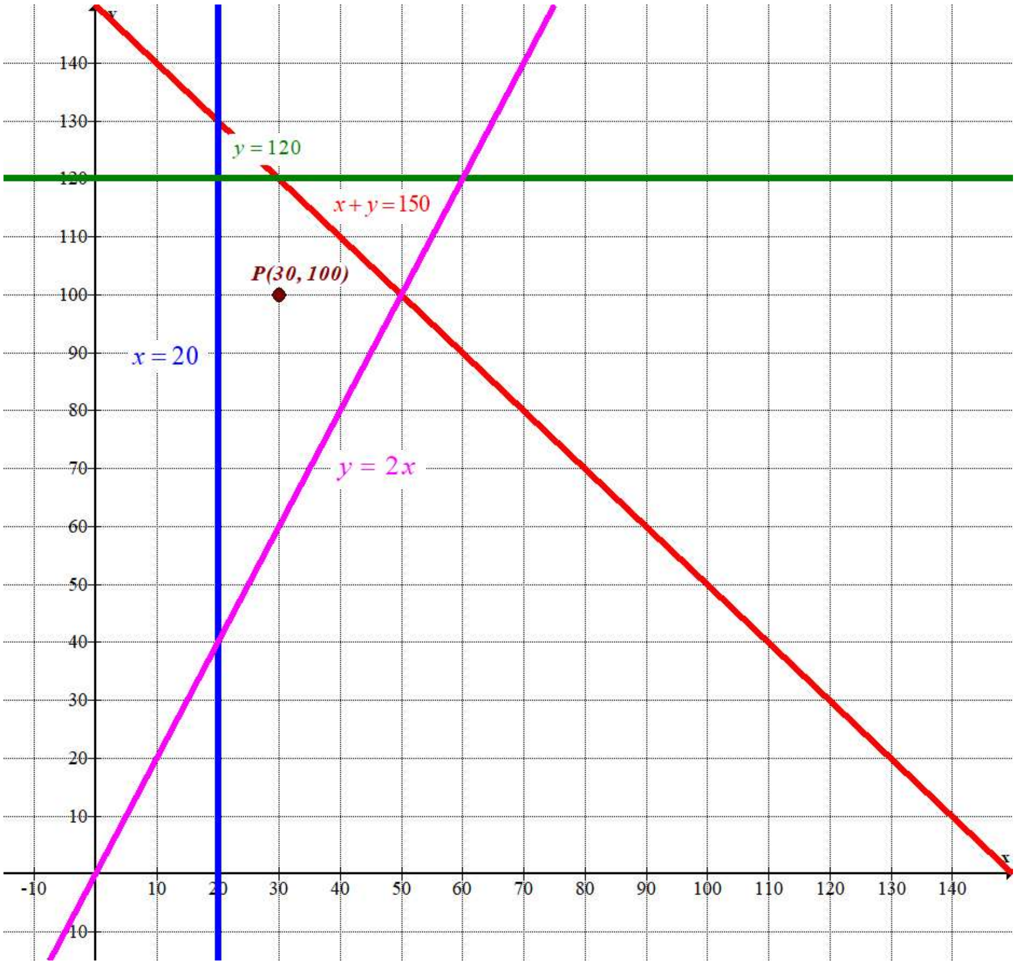
x	$y=120$
20	120
30	120
100	120

$y=2x$

x	$y=2x$
20	40
50	100
120	240

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer *cuadrante*

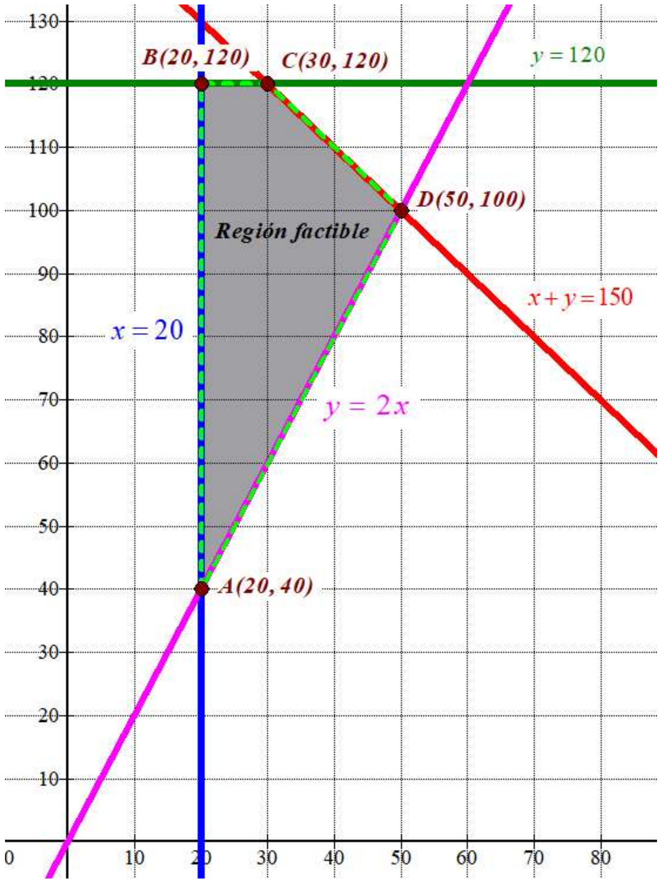


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y \leq 150 \\ x \geq 20 \\ y \leq 120 \\ y \geq 2x \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta horizontal verde y la recta oblicua roja, por encima de la recta rosa y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto P(30, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+100 \leq 150 \\ 30 \geq 20 \\ 100 \leq 120 \\ 100 \geq 2 \cdot 30 \\ 30 \geq 0;\ \ 100 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gis la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=3000x+2000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 40) → $B(20,40)=3000\cdot 20+2000\cdot 40=140000$
B(20, 120) → $B(20,120)=3000\cdot 20+2000\cdot 120=300000$
C(30, 120) → $B(30,120)=3000\cdot 30+2000\cdot 120=330000$
D(50, 100) → $B(50,100)=3000\cdot 50+2000\cdot 100=350000$ Máximo

El beneficio máximo es de 350 000 € y se consigue en el vértice C(50, 100), que significa comprar 50 coches de alta gama y 100 de gama media.

c) Comprobamos si adquirir 35 vehículos de gama alta y 110 de gama media cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 35+110\leq 150 \\ 35\geq 20 \\ 110\leq 120 \\ 110\geq 2\cdot 35 \\ 35\geq 0;\ 110\geq 0 \end{array}\right\}\text{¡Se cumplen todas!}$$

Esta elección cumple los requisitos del problema.
La subvención de 150 € por coche de gama media supone unos ingresos adicionales por valor de 150 · 110 = 16500 €. Con 35 vehículos de gama alta y 110 de gama media se consiguen unos beneficios de $B(35,110)=3000\cdot 35+2000\cdot 110=325000$. El total de beneficios con esta compra es de 325000 + 16500 = 341 500 €. La subvención no compensa la no elección de la solución óptima que nos proporcionaba 350 000 €.

Ejercicio 4.- Apartado a) Una cooperativa manchega vende vino que presenta en envases de dos tamaños: botellas de 0.75 litros y botellas de 1 litro. La capacidad del almacén donde están guardadas no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 200 botellas pequeñas y 100 botellas de litro. La demanda de envases de 0.75 litros es igual o mayor que la de envases de litro. El coste por almacenaje es de 20 céntimos de euro para cada envase de tres cuartos y de 10 céntimos para cada envase de litro.

a.1) Expresa la función objetivo para minimizar el coste del almacenaje. **(0.5 puntos)**

a.2) Obtenga las restricciones del problema planteado y dibuje la región factible. **(1 punto)**

a.3) Determina cuántas botellas de cada tipo debe almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo y calcula ese gasto mínimo. **(1 punto)**

a.1) Llamamos "x" al número de botellas de 0.75 litros, "y" al número de botellas de 1 litro. Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Coste de almacenaje
Nº botellas de 0.75 litros (x)	0.20 · x
Nº botellas de 1 litro (y)	0.10 · y
TOTALES	$0.2x+0.1y$

La función objetivo es el coste del almacenaje que viene expresado como $C(x,y)=0.2x+0.1y$. Deseamos minimizar dicho coste.

a.2) Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

"La capacidad del almacén donde están guardadas no le permite almacenar más de 1000 envases en total" → $x+y\le 1000$.

"Debe mantener un stock mínimo de 200 botellas pequeñas y 100 botellas de litro" → $x\ge 200;\ y\ge 100$.

"La demanda de envases de 0.75 litros es igual o mayor que la de envases de litro" → $x\ge y$.

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+y\le 1000 \\ x\ge 200 \\ y\ge 100 \\ x\ge y \end{array}\right\}$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x+y=1000$

x	$y=1000-x$
200	800
500	500
1000	0

$x=200$

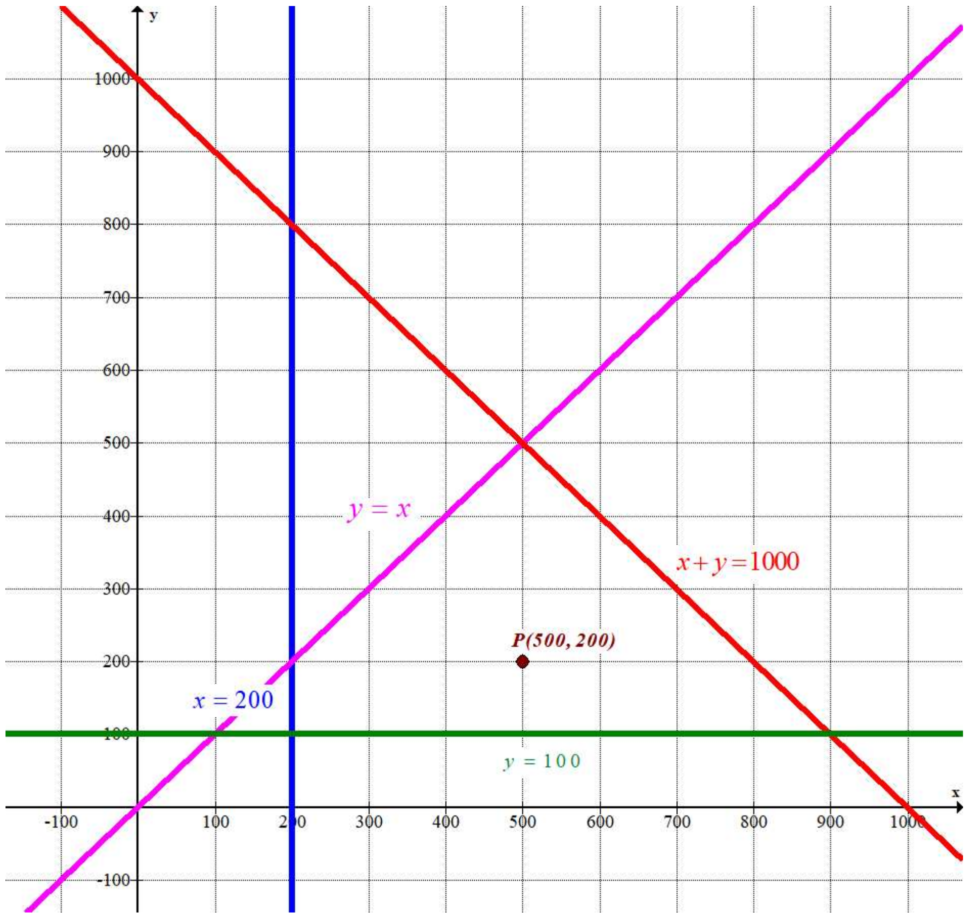
$x=200$	y
200	100
200	200
200	300

$y=100$

x	$y=100$
200	100
300	100
500	100

$y=x$

x	$y=x$
100	100
150	150
200	200

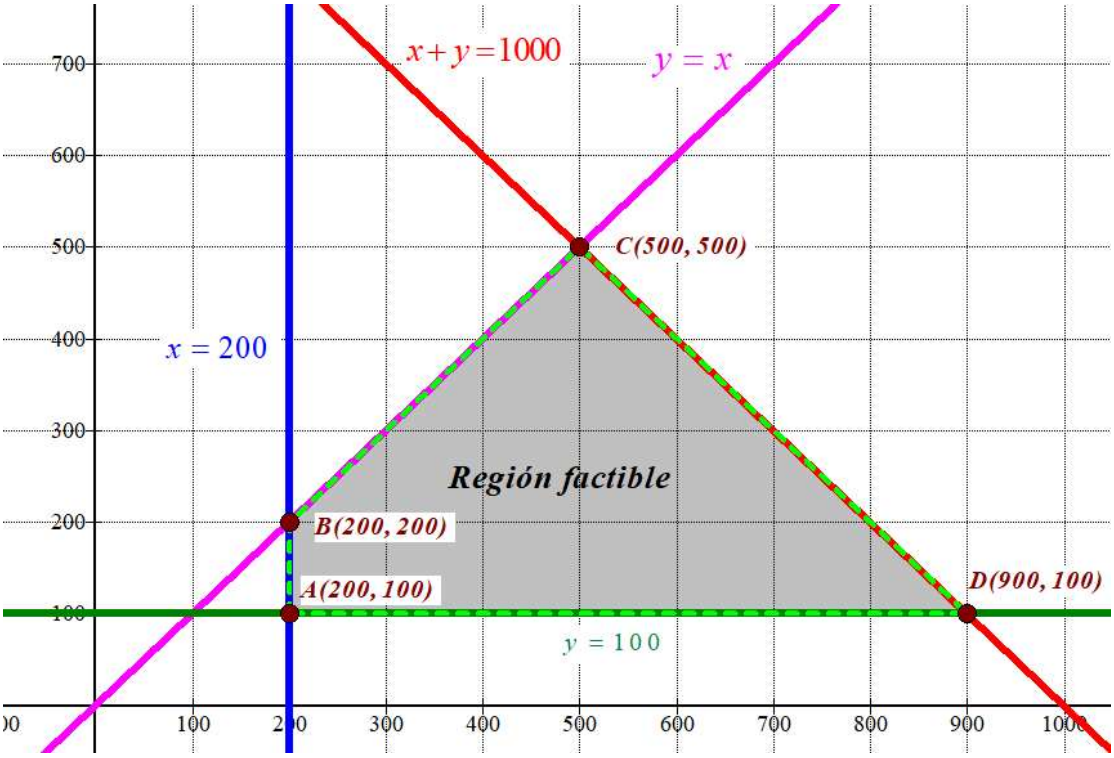


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y \le 1000 \\ x \ge 200 \\ y \ge 100 \\ x \ge y \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas oblicuas rosa y roja, por encima de la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto P(500, 200) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 500+200 \le 1000 \\ 500 \ge 200 \\ 200 \ge 100 \\ 500 \ge 200 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el dibujo siguiente.



a.2) Valoramos la función coste $C(x,y)=0.2x+0.1y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(200, 100) → $C(200,100)=0.2\cdot 200+0.1\cdot 100=$ 50 Mínimo

B(200, 200) → $C(200,200)=0.2\cdot 200+0.1\cdot 200=60$

C(500, 500) → $C(500,500)=0.2\cdot 500+0.1\cdot 500=150$

D(900, 100) → $C(900,100)=0.2\cdot 900+0.1\cdot 100=190$

El mínimo coste se alcanza en el vértice A(200, 100) con un valor de 50 euros.
Se deben almacenar 200 botellas de 0.75 litros y 100 botellas de 1 litro para obtener un coste de almacenaje mínimo cumpliendo con las restricciones planteadas.
Este coste mínimo tiene un valor de 50 €.

SOLUCIONES

Probabilidad y Estadística 40%	Álgebra 30 %	Análisis 30%

Pregunta 1. (Obligatoria - 3 puntos) Álgebra.
Pregunta 2. (Con optatividad – 3 puntos) Análisis.
Pregunta 3. (Con optatividad – 4 puntos) Probabilidad y Estadística.

1. Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima? **[3 puntos]**

Llamamos "x" al número de camiones de agua potable e "y" al número de camiones de medicinas.
Expresamos las restricciones en forma de inecuaciones.

"*Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones*" → $x+y\le 27$

"*Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones*" → $x\ge 12$

"*Para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua*" → $y\ge \frac{x}{2}$

"*Las cifras de camiones deben ser positivas*" → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 27 \\ x\ge 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2} \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo es el coste, que deseamos minimizar:

"*Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros*" → $C(x,y)=9000x+6000y$

Dibujamos la región factible. Empiezo dibujando las rectas que delimitan la región.

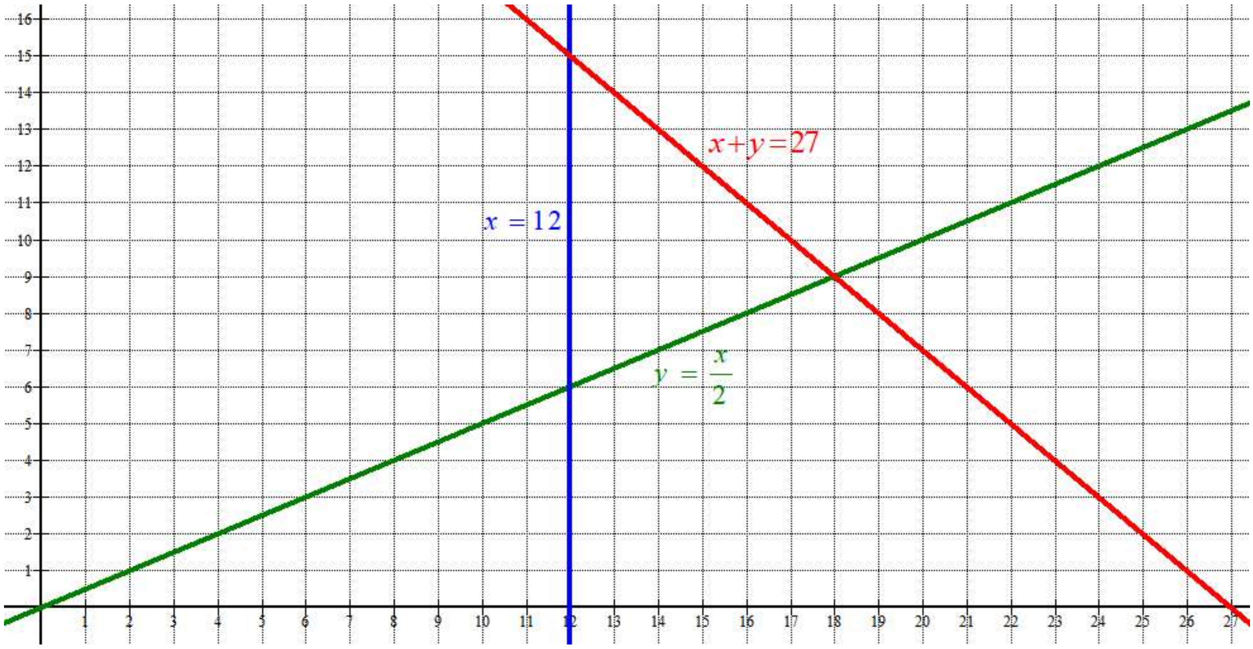
$x+y=27$ $\quad$ $x=12$ $\quad$ $y=\frac{x}{2}$ $\quad$ $x\geq 0;\ y\geq 0$

x	$y=27-x$
0	27
18	9
27	0

Recta vertical

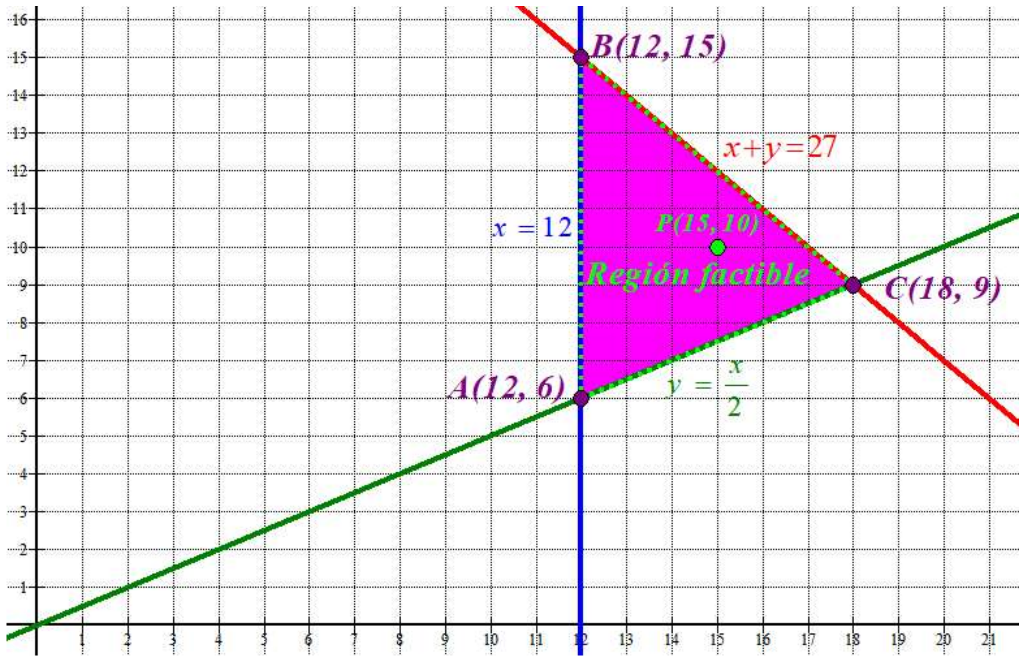
x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
18	9
20	10

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 27 \\ x\geq 12 \\ y\geq \frac{x}{2} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible está por debajo de la recta roja, a la derecha de la recta azul y por encima de la recta verde.

Coloreo de rosa la región factible y determino las coordenadas de sus vértices



Compruebo que el punto P(15, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 15+10 \leq 27 \\ 15 \geq 12 \\ 10 \geq \dfrac{15}{2} \\ 15 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas las restricciones! La región factible es correcta.

Valoro la función $C(x,y)=9000x+6000y$ en los vértices para determinar su valor mínimo.

A(12, 6) → $C(12,6)=108000+36000=144000$

B(12, 15) → $C(12,15)=108000+90000=198000$

C(18, 6) → $C(18,6)=154000+36000=190000$

El menor coste se produce en el punto A(12, 6). Significa que se minimiza el coste con 12 camiones de agua y 6 de medicinas, cumpliendo todas las restricciones. Ese mínimo coste es de 144000 €.

SOLUCIONES

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.

b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.

c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.

d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

a) Llamamos “x” al número de joyas A producidas e “y” al número de joyas B. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Beneficio
número de joyas A (x)	2x	4x	60x
número de joyas B (y)	4y	2y	80y
TOTAL	$2x+4y$	$4x+2y$	$60x+80y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=60x+80y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata → $2x+4y \leq 420;\ 4x+2y \leq 350$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+4y \leq 420 \\ 4x+2y \leq 360 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 210 \\ 2x+y \leq 180 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$

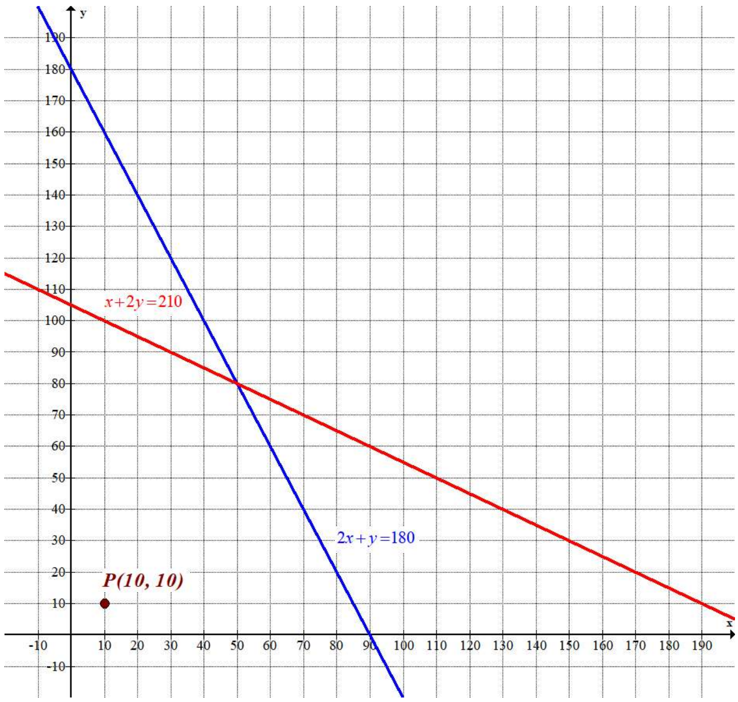
El primer cuadrante

$x+2y=210$

x	$y=\dfrac{210-x}{2}$
0	105
50	80
210	0

$2x+y=180$

x	$y=180-2x$
0	180
50	80
90	0

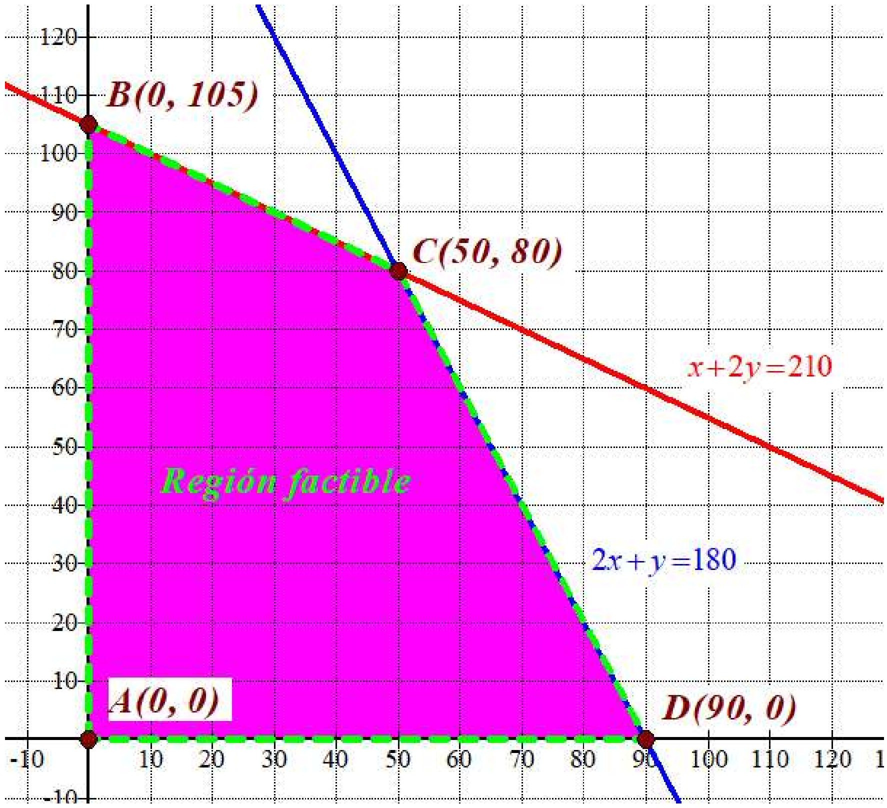


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 210 \\ 2x+y \leq 180 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \\ 10+20 \leq 210 \\ 20+10 \leq 180 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 105), C(50, 80) y D(90, 0).

d) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=60x+80y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 105) → $B(0,105)=60\cdot 0+80\cdot 105=8400$
C(50, 80) → $B(50,80)=60\cdot 50+80\cdot 80=9400$ *Máximo*
D(90, 0) → $B(90,0)=60\cdot 90+80\cdot 0=5400$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(50, 80).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación de 50 joyas tipo A y 80 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 9400 €.

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6,\ y \geq 0,\ -x + y \leq 8,\ x + 4y \leq 12,\ x + y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

2.2.a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región S.

$x = -6$

$x = -6$	y
-6	0
-6	2
-6	3

$y = 0$

x	$y = 0$
-6	0
0	0
6	0

$-x + y = 8$

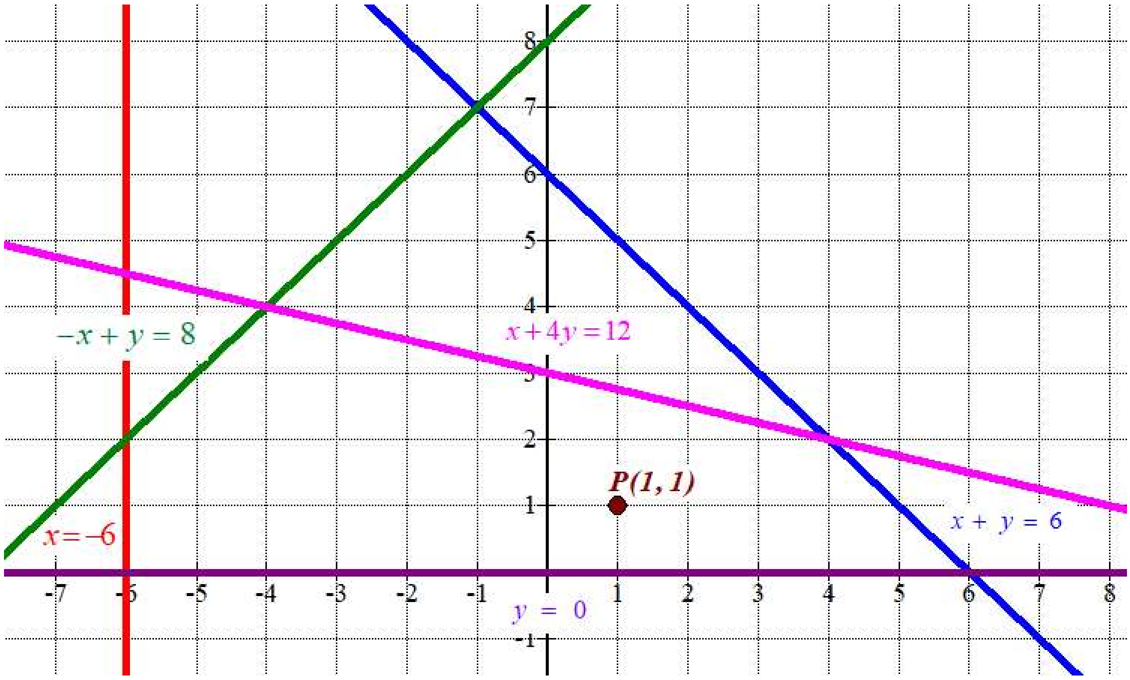
x	$y = 8 + x$
-8	0
-6	2
-4	4

$x + 4y = 12$

x	$y = \frac{12 - x}{4}$
-4	4
0	3
4	2

$x + y = 6$

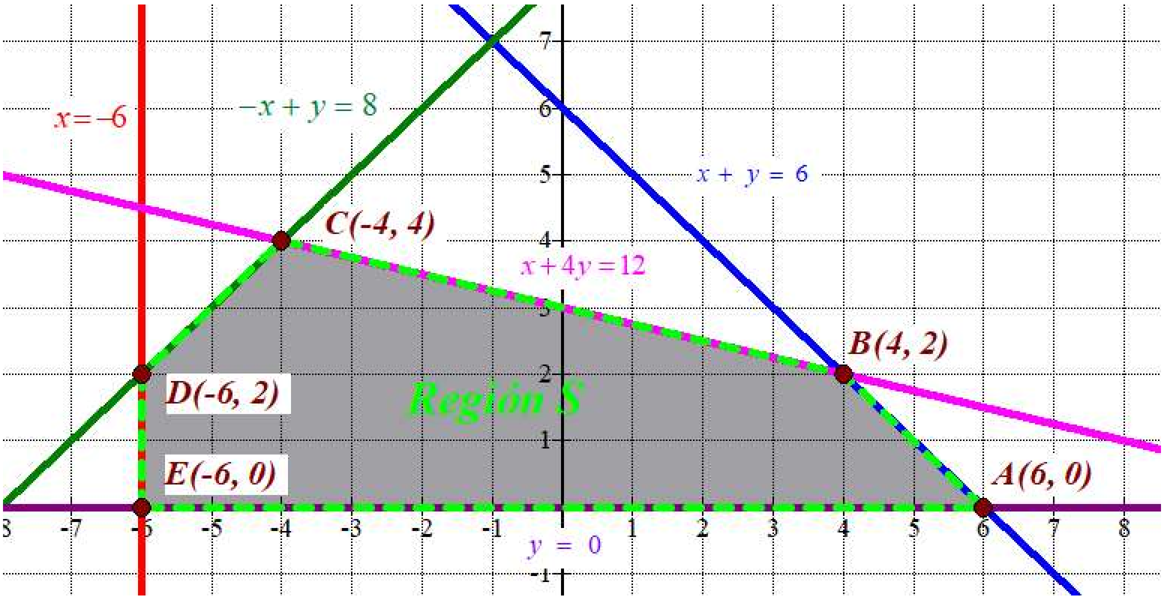
x	$y = 6 - x$
0	6
4	2
6	0



Como las restricciones son $x \geq -6,\ y \geq 0,\ -x + y \leq 8,\ x + 4y \leq 12,\ x + y \leq 6$ la región S está por debajo de las rectas verde, azul y rosa, por encima de la recta horizontal que coincide con el eje de abscisas y a la derecha de la recta vertical roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$1 \geq -6,\ 1 \geq 0,\ -1 + 1 \leq 8,\ 1 + 4 \leq 12,\ 1 + 1 \leq 6 \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región S en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de la región S.



Los vértices de la región S son A(6, 0), B(4, 2), C(–4, 4), D(–6, 2) y E(–6, 0).

2.2.b) Valoramos la función $f(x,y)=2y-3x$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(6, 0) → $f(6,0)=2\cdot 0-3\cdot 6=-18$
B(4, 2) → $f(4,2)=2\cdot 2-3\cdot 4=-10$
C(–4, 4) → $f(-4,4)=2\cdot 4-3(-4)=20$
D(–6, 2) → $f(-6,2)=2\cdot 2-3(-6)=$ 22 Máximo
E(–6, 0) → $f(-6,0)=2\cdot 0-3(-6)=18$

El valor máximo que alcanza la función en la región S es 22 y se consigue en el vértice D(–6, 2).

CUESTIÓN 2:
[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:
a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

a) Llamamos x = número de videos de TikTok, y = número de videos de YouTube.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas planificación	Horas grabación	Horas edición	Ingresos
TikTok (x)	4x	x	x	40x
YouTube (y)	y	2y	y	20y
TOTAL	$4x+y$	$x+2y$	$x+y$	$40x+20y$

La función objetivo son los ingresos semanales que deseamos maximizar: $I(x,y)=40x+20y$.
Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. → $4x+y\leq 36$
Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar → $x+2y\leq 20$
puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición → $x+y\leq 12$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}4x+y\leq 36\\ x+2y\leq 20\\ x+y\leq 12\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+y=36$

x	$y=36-4x$
0	36
8	4
9	0

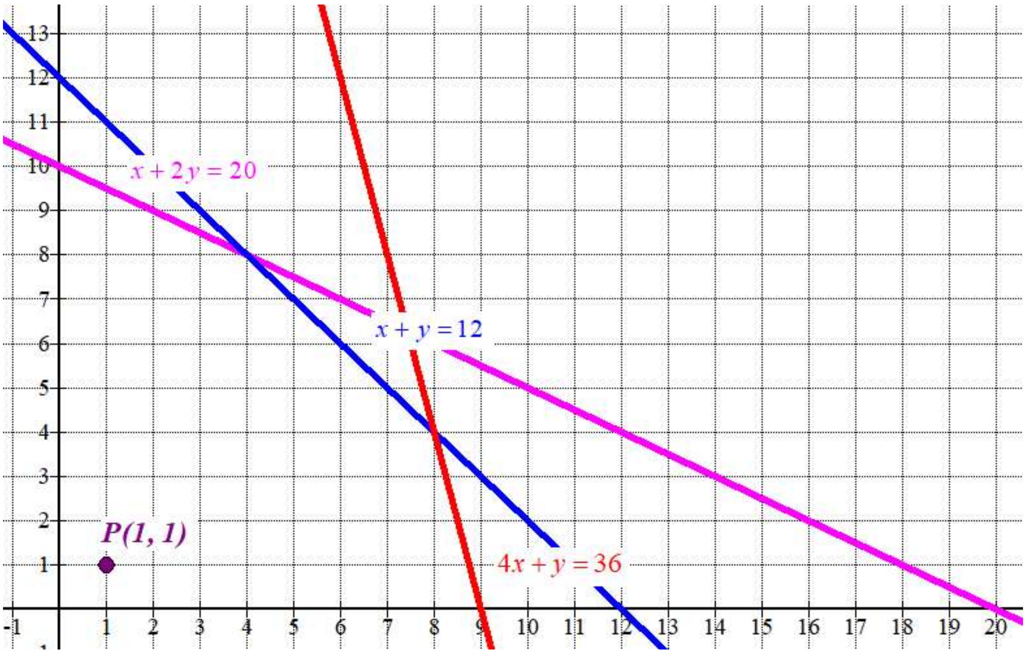
$x+2y=20$

x	$y=\dfrac{20-x}{2}$
0	10
4	8
20	0

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
4	8
8	4

$x\geq 0;\ y\geq 0$
Primer cuadrante

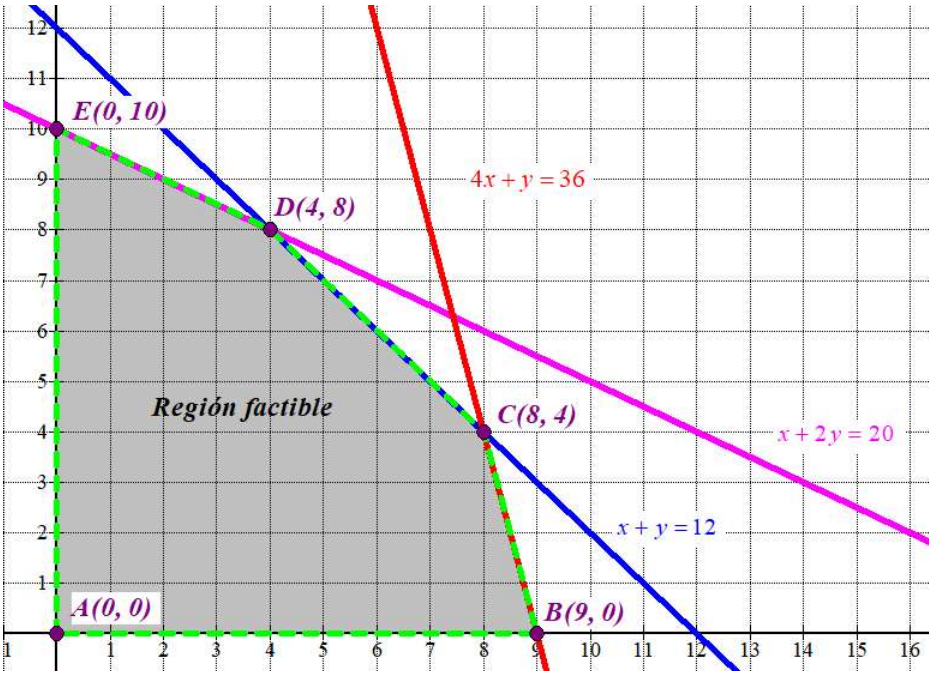


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 4x+y\leq 36 \\ x+2y\leq 20 \\ x+y\leq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas rosa, azul y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4+1\leq 36 \\ 1+2\leq 20 \\ 1+1\leq 12 \\ 1\geq 0;\ 1\geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(9,0), C(8, 4), D(4, 8) y E(0, 10)

d) Valoramos la función objetivo $I(x,y)=40x+20y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(9, 0) → $I(9,0)=40\cdot 9+20\cdot 0=360$

C(8, 4) → $I(8,4)=40\cdot 8+20\cdot 4=400$ *Máximo*

D(4, 8) → $I(4,8)=40\cdot 4+20\cdot 8=320$

E(0, 10) → $I(0,10)=40\cdot 0+20\cdot 10=200$

Los ingresos máximos se obtienen en el punto C(8, 4). Significa que se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos.

e) Los ingresos máximos semanales que se puede conseguir son de 400 euros.

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

a) Llamamos x = número de notebooks que se producen, y = número de gaming.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas fase 1	Horas fase 2	Horas fase 3	Beneficio
Notebooks (x)	2x	x	x	400x
Gaming (y)	y	4y	2y	500y
TOTAL	$2x+y$	$x+4y$	$x+2y$	$400x+500y$

La función objetivo es el beneficio diario que deseamos maximizar: $B(x,y)=400x+500y$.
Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. →
$2x+y\le 14;\ x+4y\le 16;\ x+2y\le 10$

Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 14 \\ x+4y\le 16 \\ x+2y\le 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=14$

x	$y=14-2x$
0	14
6	2
7	0

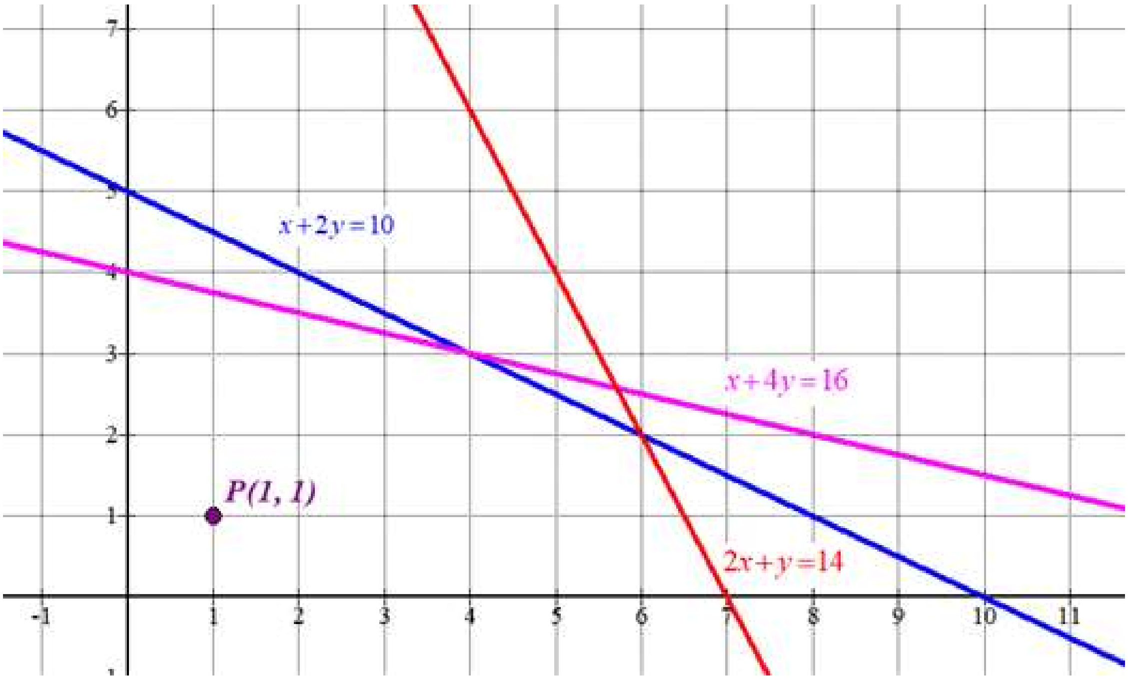
$x+4y=16$

x	$y=\dfrac{16-x}{4}$
0	4
4	3
16	0

$x+2y=10$

x	$y=\dfrac{10-x}{2}$
0	5
4	3
6	2
10	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer cuadrante

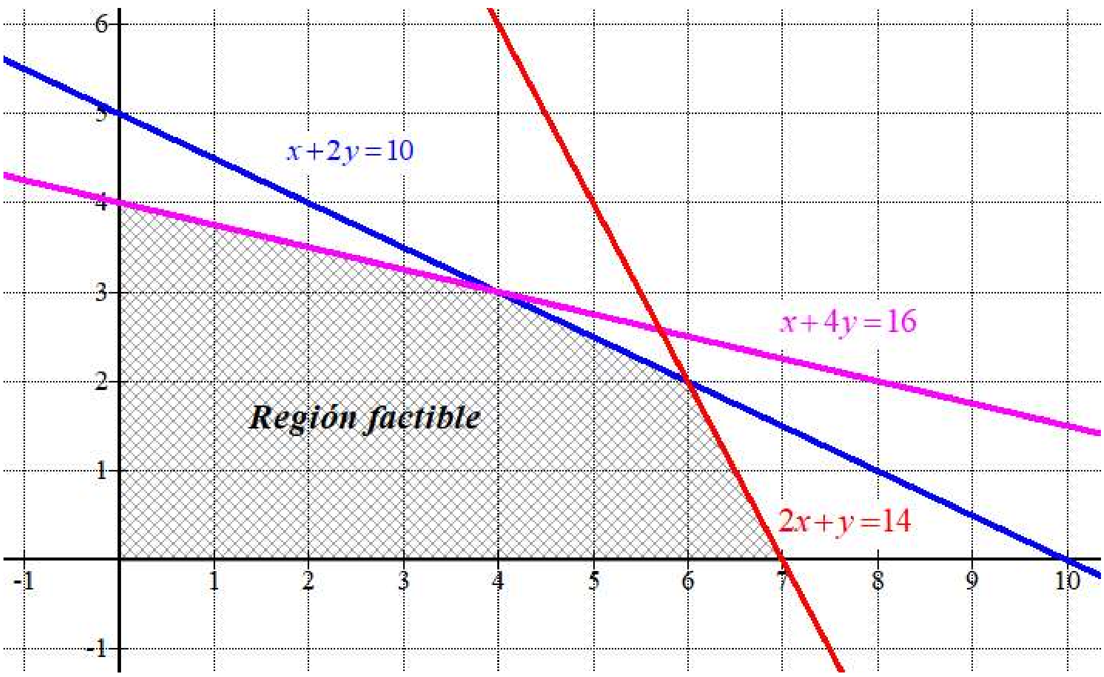


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 14 \\ x+4y\le 16 \\ x+2y\le 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas oblicuas (rosa, azul y roja).

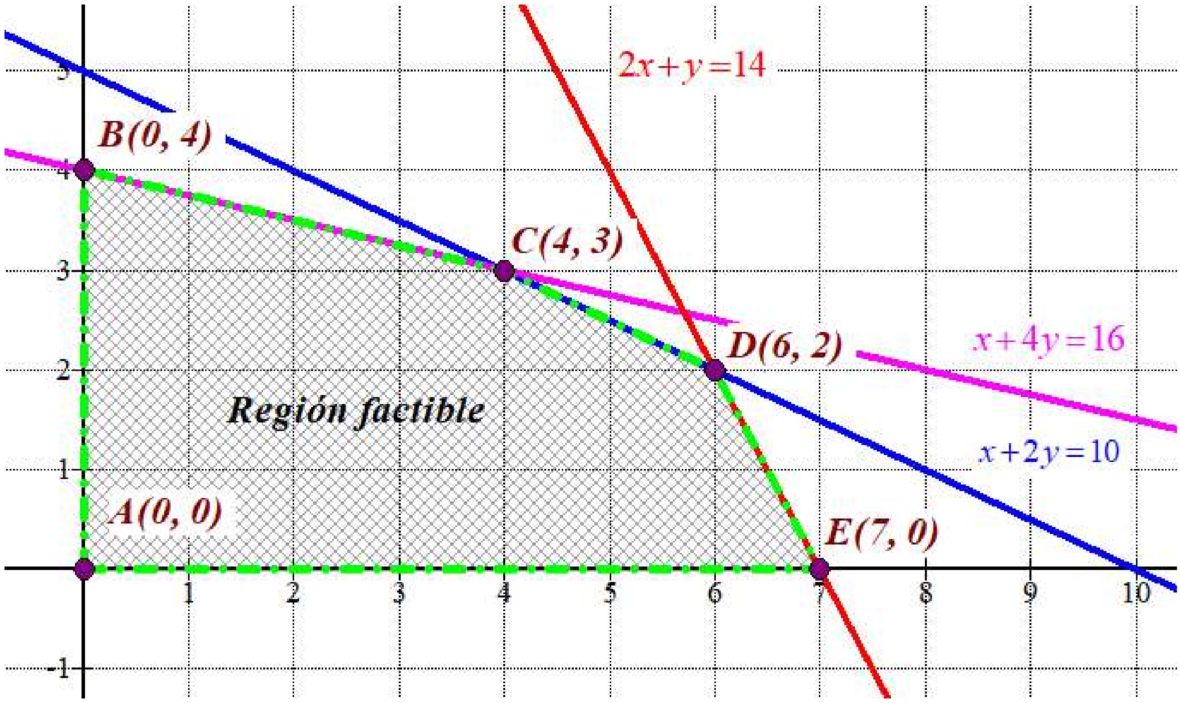
Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 2+1\le 14 \\ 1+4\le 16 \\ 1+2\le 10 \\ 1\ge 0;\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(0,4), C(4, 3), D(6, 2) y E(7, 0)



d) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=400x+500y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 4) → $B(0,4)=400\cdot 0+500\cdot 4=2000\,€$

C(4, 3) → $B(4,3)=400\cdot 4+500\cdot 3=3100\,€$

D(6, 2) → $B(6,2)=400\cdot 6+500\cdot 2=3400\,€$ *Máximo*

E(7, 0) → $B(7,0)=400\cdot 7+500\cdot 0=2800\,€$

El beneficio máximo se obtiene en el punto D(6, 2). Significa que se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos.

e) El beneficio máximo diario que se puede conseguir es de 3400 euros.

SOLUCIONES

PREGUNTA 1:
Una empresa produce dos modelos de cristales, C1 y C2. Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente. La siguiente tabla recoge, para cada modelo de cristal, la cantidad de materia prima de cada tipo necesaria para su fabricación y el tiempo de fabricación.

	Materia prima M1 (kg/m^2)	Materia prima M2 (kg/m^2)	Tiempo de fabricación (minutos/m^2)
C1	3	2	22
C2	6	1	14

Sabiendo que la empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m^2 de cristal, determine la cantidad diaria que se deberá fabricar de cada modelo de cristal si la empresa desea minimizar el tiempo de fabricación.
i) Plantee el problema. (1.25 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

i) Llamamos "x" al número de metros cuadrados fabricados del cristal C1, "y" al número de metros cuadrados fabricados del cristal C2.

	Materia prima M1 (kg/m^2)	Materia prima M2 (kg/m^2)	Tiempo de fabricación (minutos/m^2)
M^2 de C1 (x)	3x	2x	22x
M^2 de C2 (y)	6y	y	14y
TOTALES	$3x+6y$	$2x+y$	$22x+14y$

La función a minimizar es el tiempo de fabricación: $T(x,y)=22x+14y$.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

"La empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m^2 de cristal" → $x+y\geq 20$.
"Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente" → $3x+6y\leq 135$; $2x+y\leq 60$.
"Las cantidades son positivas" → $x\geq 0$; $y\geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ 3x+6y\leq 135 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x+2y\leq 45 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

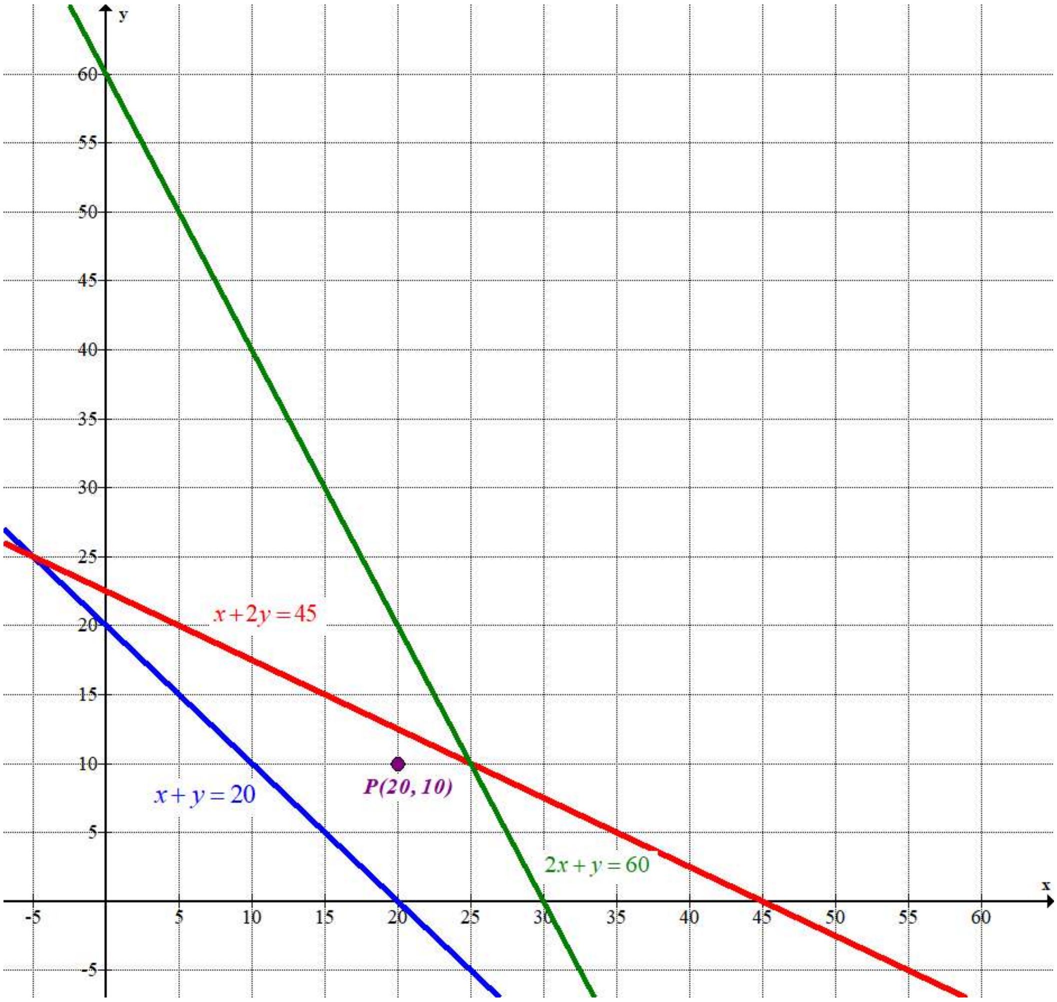
$x+y=20$ $\quad x+2y=45$ $\quad 2x+y=60$ $\quad x\geq 0;\ y\geq 0$

x	$y=20-x$
0	20
10	10
20	0

x	$y=\dfrac{45-x}{2}$
0	$45/2$
25	10
45	0

x	$y=60-2x$
0	60
25	10
30	0

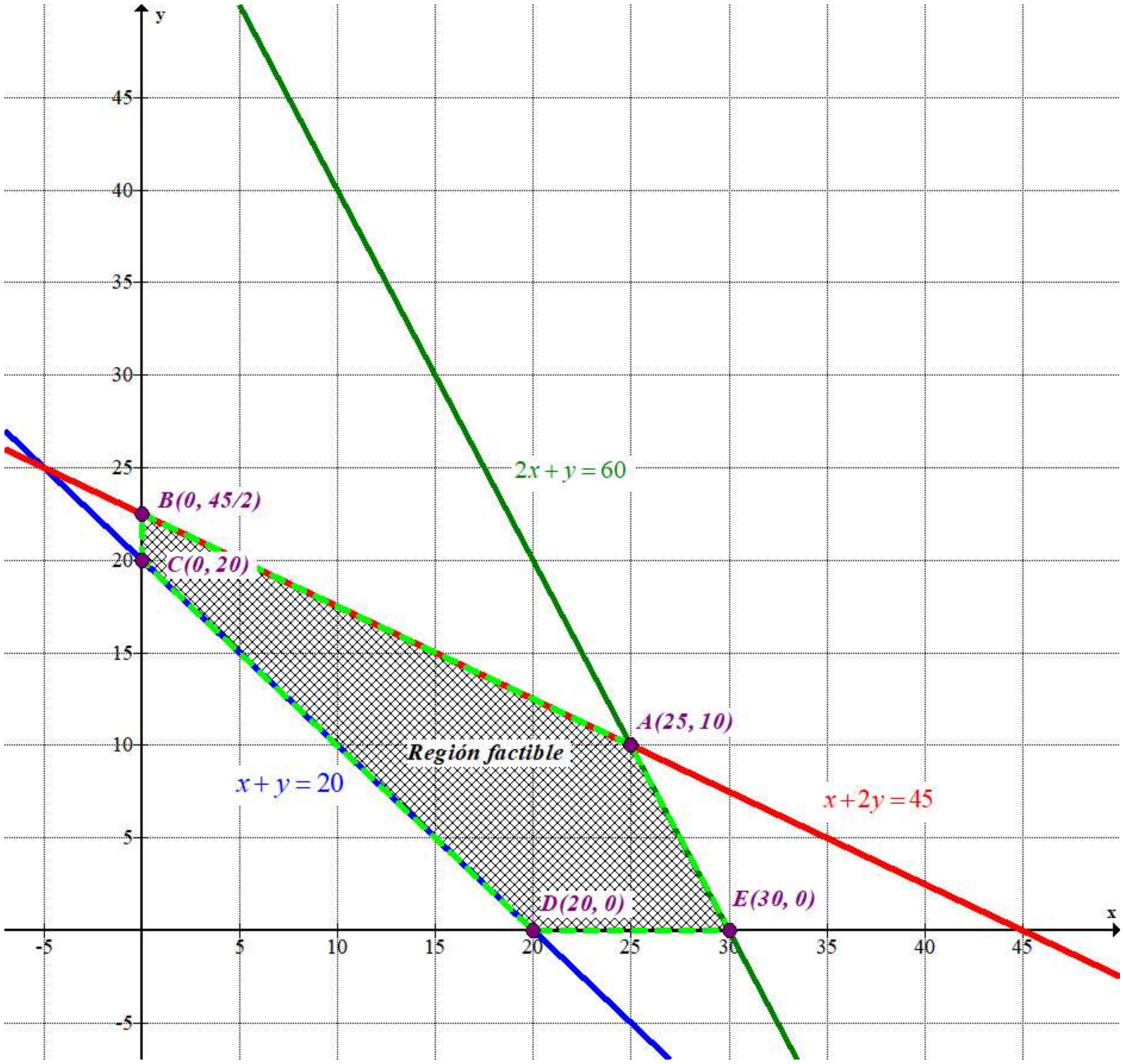
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x+2y\leq 45 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible son los puntos del primer cuadrante situados por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul. Comprobamos que el punto P(20,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20+10\geq 20 \\ 20+20\leq 45 \\ 2\cdot 20+10\leq 60 \\ 20\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función tiempo de fabricación en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(25, 10) → $T(25,10)=22\cdot 25+14\cdot 10=690$

B(0, 45/2) → $T\left(0,\frac{45}{2}\right)=22\cdot 0+14\cdot\frac{45}{2}=315$

C(0, 20) → $T(0,20)=22\cdot 0+14\cdot 20=$ 280 Mínimo

D(20, 0) → $T(20,0)=22\cdot 20+14\cdot 0=440$

E(30, 0) → $T(30,0)=22\cdot 30+14\cdot 0=660$

El tiempo mínimo de fabricación se consigue en el punto C(0, 20).
El tiempo mínimo de fabricación es de 280 minutos y se consigue con la fabricación de 0 metros cuadrados del cristal C1 y 20 metros cuadrados del cristal C2.

Soluciones

PROBLEMA 1 [[**2,5 puntos**]]
La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua.
La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel.
Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol.
A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/ L y el del perfume B es de 40 €/L.
La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

a) [[**2 puntos**]] ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?
b) [[**0, 5 puntos**]] ¿Cuál sería dicho ingreso?

a) Llamamos “x” a los litros de perfume A elaborados en un mes e “y” a los litros de perfume B.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Extracto de rosas	Alcohol	Ingresos
Litros de perfume A (x)	0.05x	0.10x	24x
Litros de perfume B (y)	0.10y	0.15y	40y
TOTALES	$0.05x+0.1y$	$0.1x+0.15y$	$24x+40y$
DISPONIBILIDAD	70 litros	120 litros	

La función a maximizar son los ingresos $I(x,y)=24x+40y$.
Las restricciones del problema que definen la región factible son:

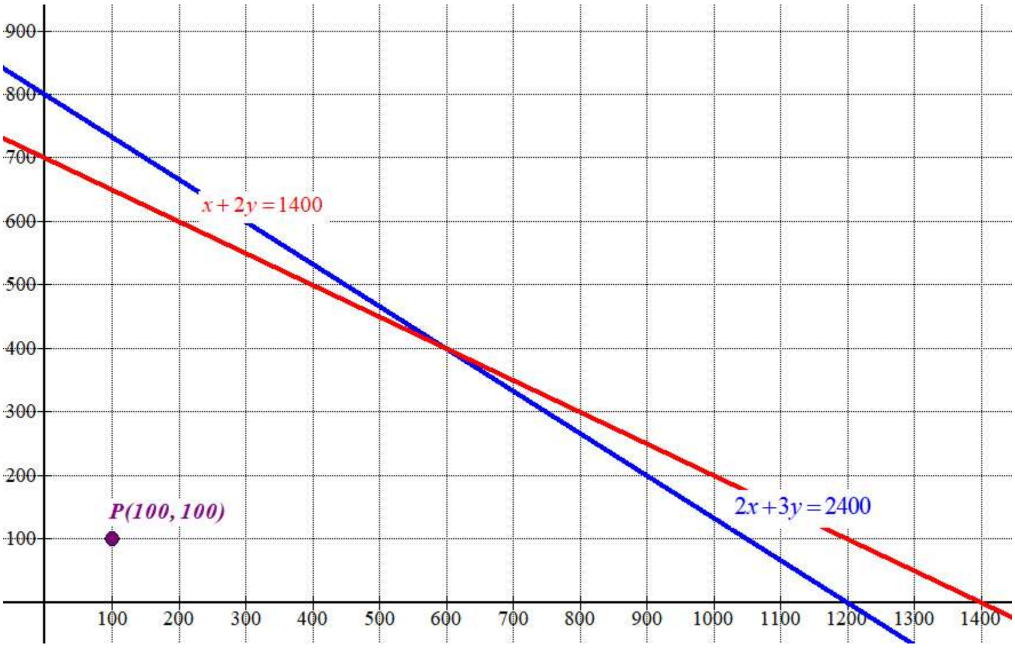
“La empresa dispone de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol” → $0.05x+0.1y\le 70$, $0.1x+0.15y\le 120$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}0.05x+0.1y\le 70\\0.1x+0.15y\le 120\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y\le 1400\\2x+3y\le 2400\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+2y=1400$		$2x+3y=2400$		$x \geq 0;\ y \geq 0$
x	$y=\dfrac{1400-x}{2}$	x	$y=\dfrac{2400-2x}{3}$	Primer cuadrante
0	700	0	800	
600	400	600	400	
1400	0	1200	0	

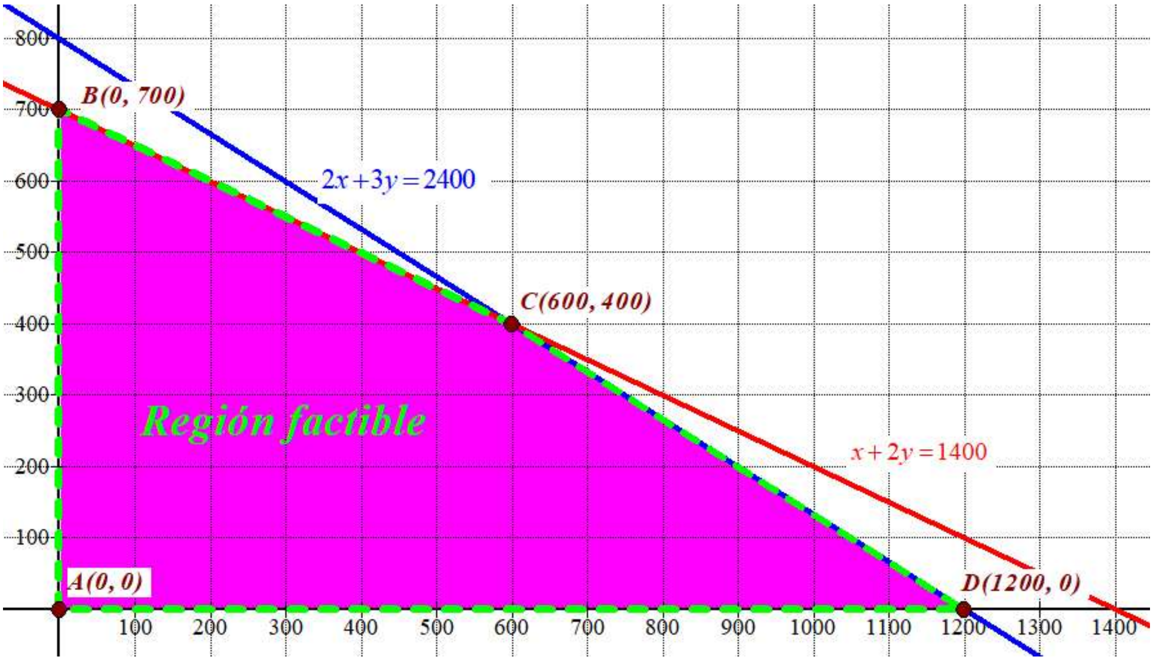


Como las restricciones son $\left.\begin{matrix} x+2y \leq 1400 \\ 2x+3y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(100,100) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{matrix} 100+200 \leq 1400 \\ 200+300 \leq 2400 \\ 100 \geq 0; 100 \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos $I(x,y)=24x+40y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$ €

B(0, 700) → $I(0,700)=24\cdot 0+40\cdot 700=28000$

C(600, 400) → $I(600,400)=24\cdot 600+40\cdot 400=$ 30400 Máximo

D(1200, 0) → $I(120,0)=24\cdot 1200+40\cdot 0=28800$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible se obtienen en el punto C(600, 400).

Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración de 600 litros de perfume A y 400 litros de perfume B.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 30 400 €.

Soluciones

PROBLEMA 1 [[2,5 puntos]]
La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.
Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.
Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.
Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.
El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.
Si se vende todo lo que se fabrica:
a) [[**1,6 puntos**]] ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?
b) [[**0,3 puntos**]] ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
c) [[**0,6 puntos**]] ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

a) Llamamos "x" al número de metros lineales de tapiz tipo A e "y" al número de metros lineales de tapiz tipo B.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Hilo de seda	Hilo de plata	Hilo de oro	Ingresos
Metros de tapiz A (x)	100x	200x		2000x €
Metros de tapiz B (y)	200y	100y	100y	3000y €
TOTALES	$100x+200y$	$200x+100y$	$100y$	$2000x+3000y$
DISPONIBILIDAD	50 000 gr	40 000 gr	22500 gr	

La función a maximizar son los ingresos $I(x,y)=2000x+3000y$.
Las restricciones del problema que definen la región factible son:

"Un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro" → $100x+200y\le 50000$, $200x+100y\le 40000$, $100y\le 22500$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}100x+200y\le 50000\\200x+100y\le 40000\\100y\le 22500\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y\le 500\\2x+y\le 400\\y\le 225\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

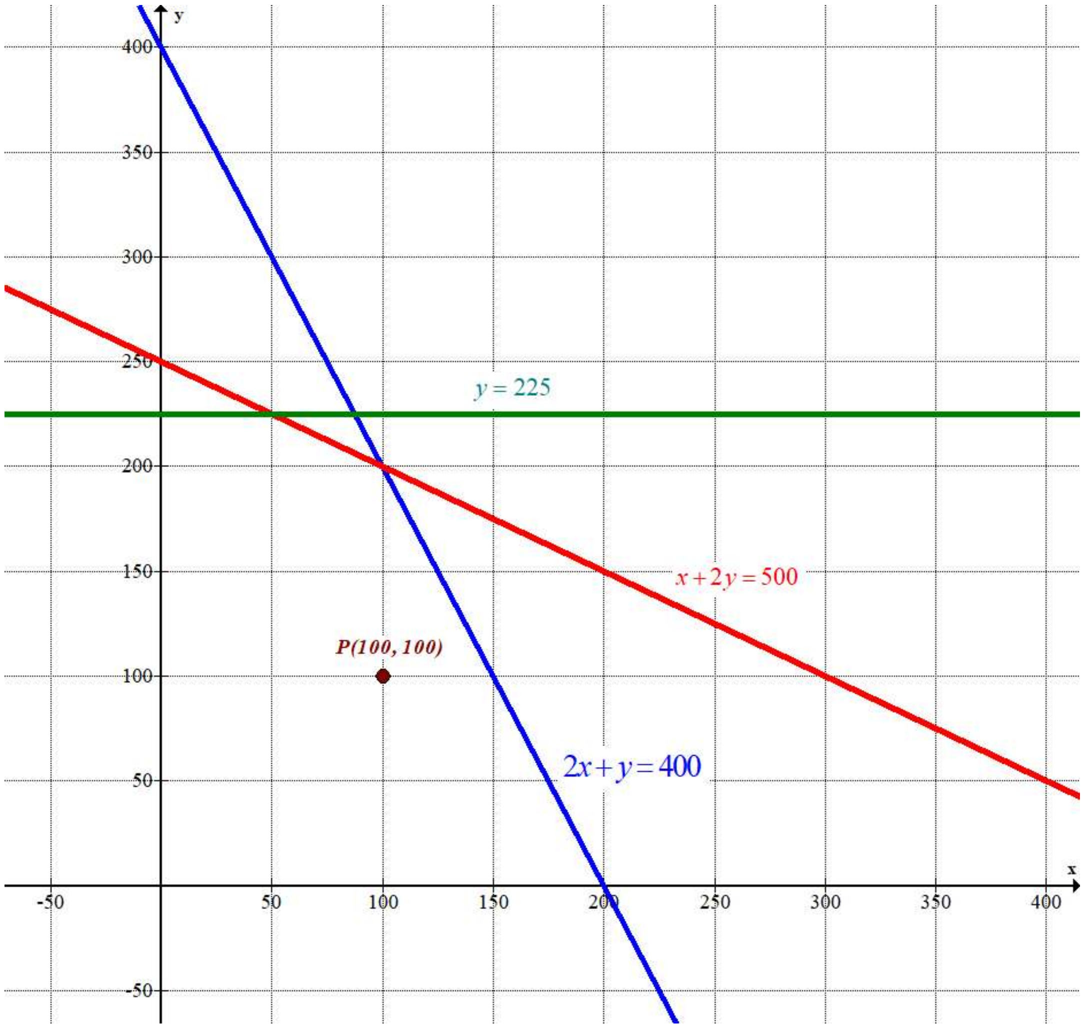
$x+2y=500$ $\quad$ $2x+y=400$ $\quad$ $y=225$ $\quad$ $x\geq 0;\ y\geq 0$

x	$y=\dfrac{500-x}{2}$
0	250
50	225
100	200
500	0

x	$y=400-2x$
0	400
100	200
150	100
200	0

x	$y=225$
0	225
50	225
100	225

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 500 \\ 2x+y\leq 400 \\ y\leq 225 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+200\leq 500 \\ 200+100\leq 400 \\ 100\leq 225 \\ 100\geq 0;100\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.

Valoramos la función ingresos $I(x,y) = 2000x + 3000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0) = 0$ €

B(0, 225) → $I(0,225) = 2000 \cdot 0 + 3000 \cdot 225 = 675\,000$

C(50, 225) → $I(50,225) = 2000 \cdot 50 + 3000 \cdot 225 = 775\,000$

D(100, 200) → $I(100,200) = 2000 \cdot 100 + 3000 \cdot 200 = 800\,000$ Máximo

E(200, 0) → $I(200,0) = 2000 \cdot 200 + 3000 \cdot 0 = 400\,000$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 800 000 € y se obtienen en el punto D(100, 200).
Los máximos ingresos se obtienen con la elaboración y venta de 100 metros lineales de tapiz tipo A y 200 metros de tapiz tipo B.

b) Los máximos ingresos que se pueden obtener tienen un valor de 800 000 €.

c) En confeccionar 100 tapices tipo A y 200 tapices tipo B se gastan:
$100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50\,000\,g$ = 50 kg de hilo de seda, $200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40000$ = 40 kg de hilo de plata y $100 \cdot 200 = 20\,000\,g$ = 20 kg de hilo de oro.
Disponemos de 50 kilos de hilo de seda y lo gastamos todo. Disponemos de 40 kilos de hilo de plata y lo gastamos todo. Disponemos de 22.5 kg de hilo de oro, nos quedan después de fabricar los tapices 22.5 – 20 = 2.5 kg de oro.

Soluciones

Problema 1. A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0,5 puntos)

a) Llamamos "x" al número de excursiones a la montaña e "y" al número de excursiones a la playa.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Autobuses	Guías	Beneficio
Excursiones a montaña (x)	2x	2x	700x €
Excursiones a playa (y)	2y	y	500y €
TOTALES	$2x+2y$	$2x+y$	$700x+500y$

La función a maximizar son los beneficios: $B(x,y)=700x+500y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

"La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones" → $2x+2y\leq 10$, $2x+y\leq 8$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{matrix} 2x+2y\leq 10 \\ 2x+y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y\leq 5 \\ 2x+y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{matrix}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+y=5$

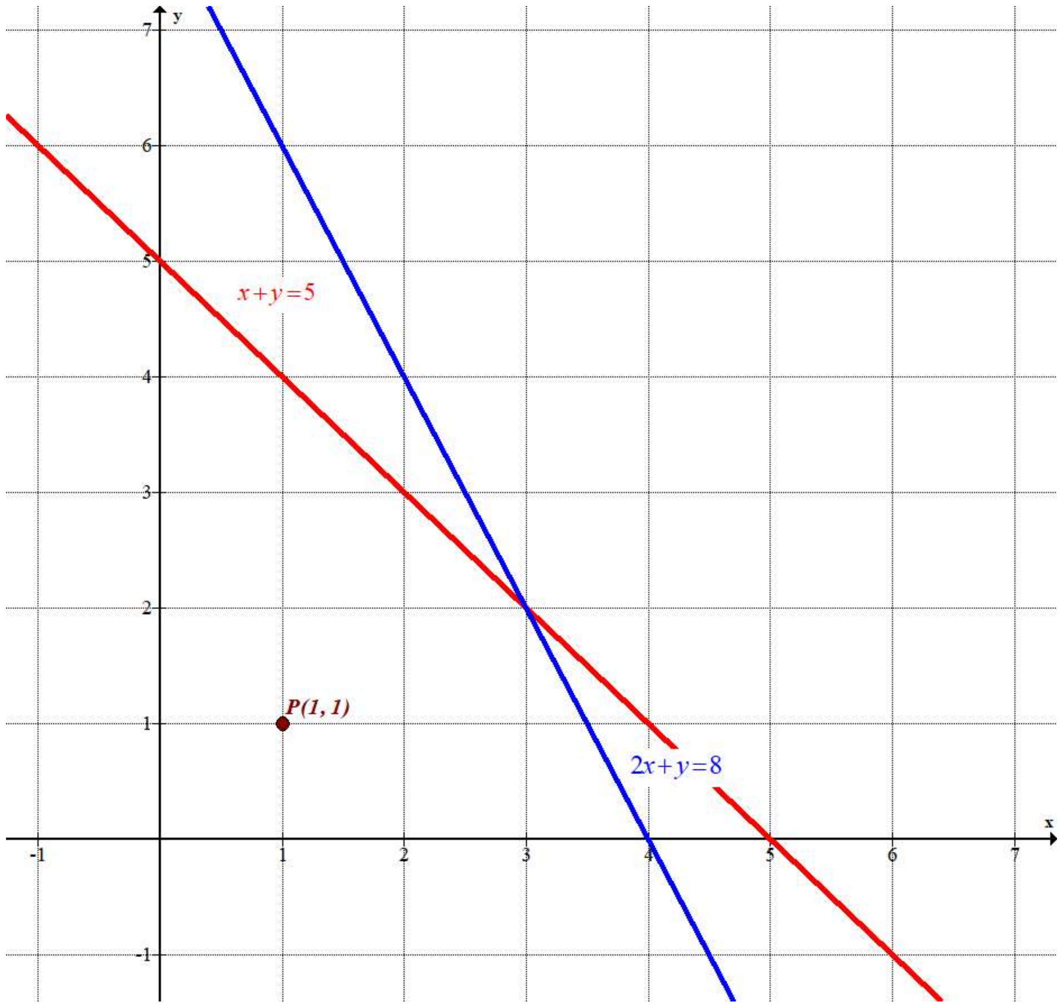
x	$y=5-x$
0	5
3	2
5	0

$2x+y=8$

x	$y=8-2x$
0	8
3	2
4	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Pr *imer cuadrante*

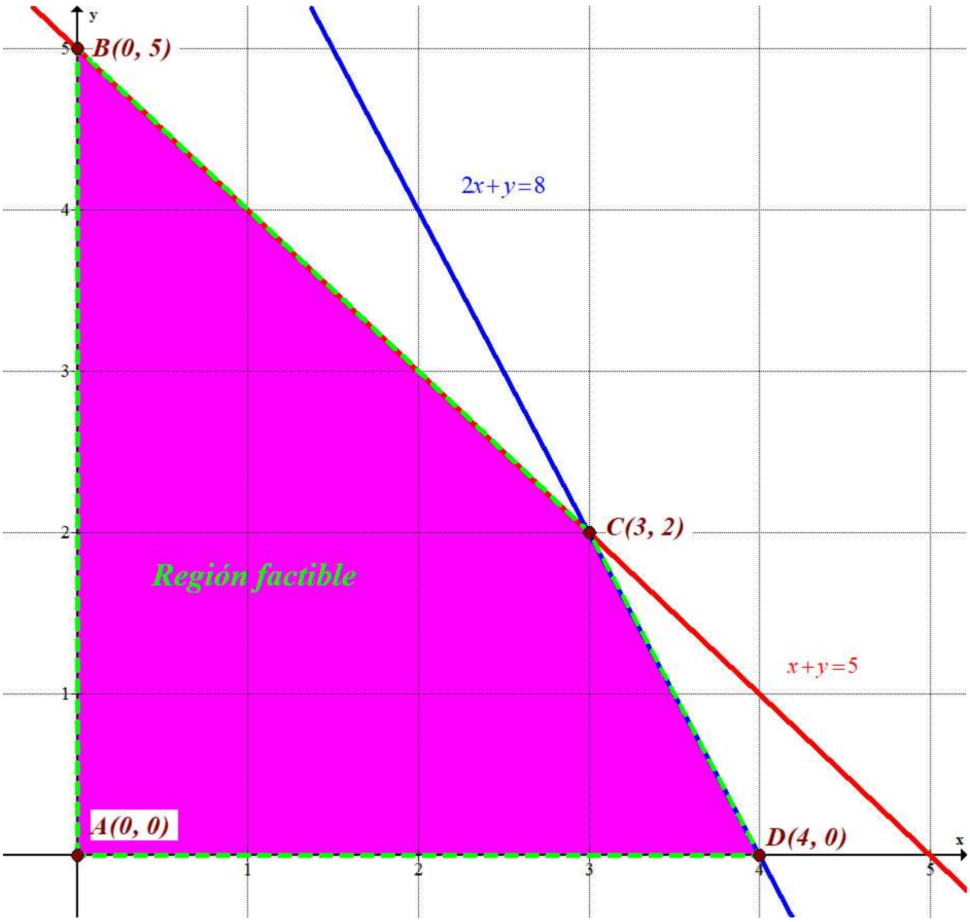


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 5 \\ 2x+y\le 8 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$.\left.\begin{array}{l} 1+1\le 5 \\ 2+1\le 8 \\ 1\ge 0; 1\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=700x+500y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 5) → $B(0,5)=700\cdot 0+500\cdot 5=2500$

C(3, 2) → $B(3,2)=700\cdot 3+500\cdot 2=$ 3100 Máximo

D(4, 0) → $B(4,0)=700\cdot 4+500\cdot 0=2800$

El valor más alto que se pueden obtener en la región factible es 3100 y se obtiene en el punto C(3, 2).
Los beneficios más altos se consiguen con 3 excursiones a la montaña y 2 a la playa.

b) Los beneficios más altos que se pueden conseguir son de 3100 euros.

Soluciones

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? (0,5 puntos)

a) Llamamos “x” al número de días de funcionamiento de la planta A e “y” al número de días de funcionamiento de la planta B.

Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Lotes P1	Lotes P2	Lotes P3	Coste (miles)
Días planta A (x)	x	2x	x	60x €
Días planta B (y)	y	y	5y	75y €
TOTALES	$x+y$	$2x+y$	$x+5y$	$60x+75y$

La función a minimizar son los costes de funcionamiento de las dos fábricas, expresados en miles de euros: $C(x,y)=60x+75y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

“En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3” → $x+y\geq 6$, $2x+y\geq 8$, $x+5y\geq 10$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 6 \\ 2x+y\geq 8 \\ x+5y\geq 10 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+y=6$

x	$y=6-x$
0	6
2	4
5	1
6	0

$2x+y=8$

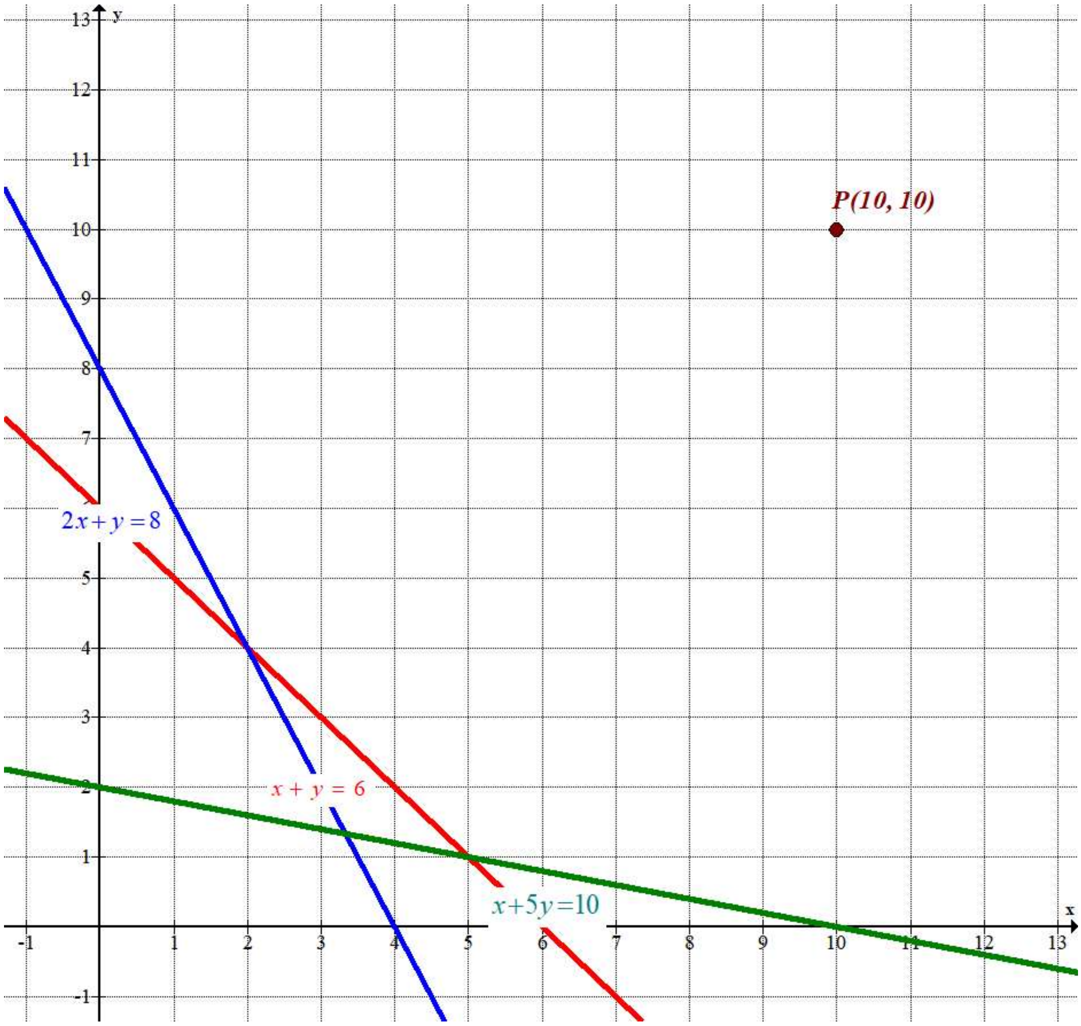
x	$y=8-2x$
0	8
2	4
3	2
4	0

$x+5y=10$

x	$y=\dfrac{10-x}{5}$
0	2
5	1
10	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

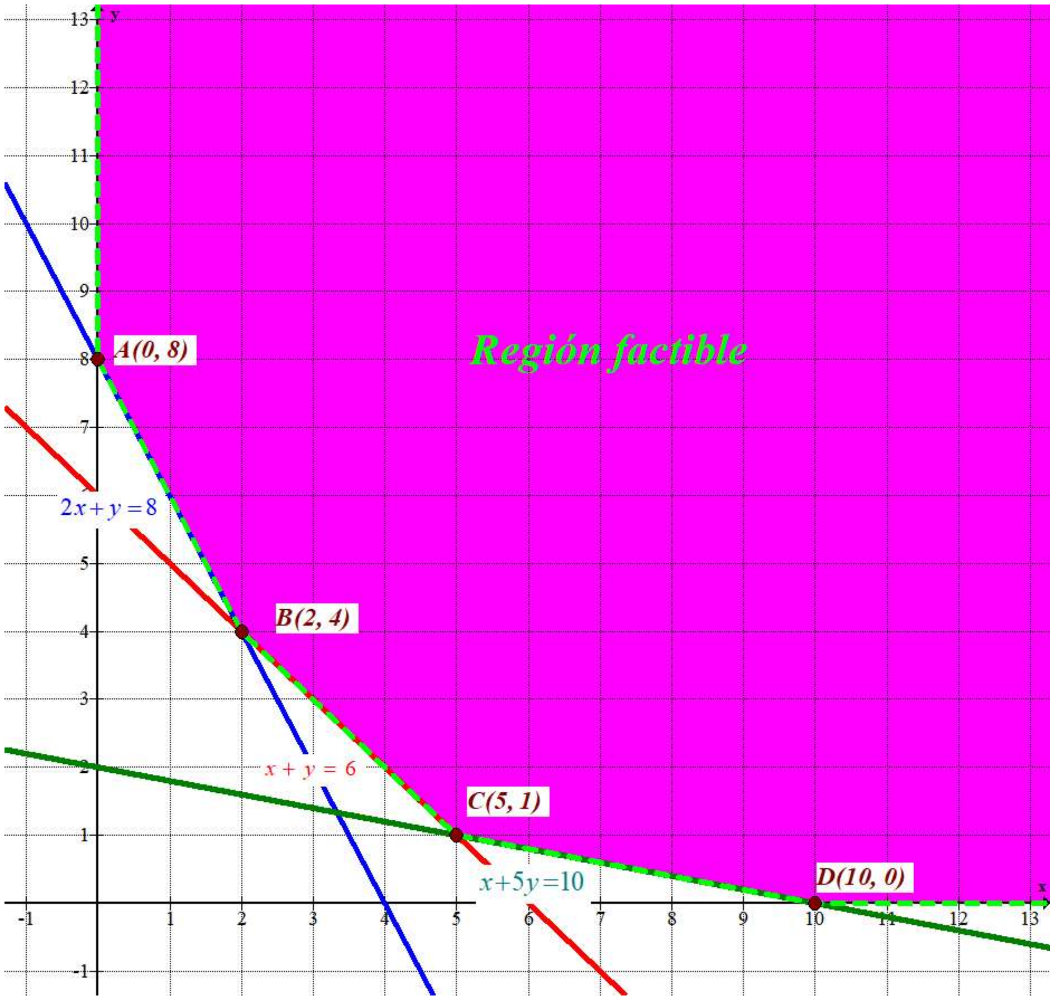


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 6 \\ 2x+y\geq 8 \\ x+5y\geq 10 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+10\geq 6 \\ 20+10\geq 8 \\ 10+50\geq 10 \\ 10\geq 0; 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función costes $C(x,y)=60x+75y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

A(0, 8) → $C(0,8)=60\cdot 0+75\cdot 8=600$

B(2, 4) → $C(2,4)=60\cdot 2+75\cdot 4=420$

C(5, 1) → $C(5,1)=60\cdot 5+75\cdot 1=375$ Mínimo

D(10, 0) → $C(10,0)=60\cdot 10+75\cdot 0=600$

Los mínimos costes que se pueden obtener en la región factible son de 375 y se obtienen en el punto C(5, 1).
Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

b) Los costes mínimos son de 375 000 euros y se consiguen con 5 días de funcionamiento de la fábrica A y 1 día de la fábrica B.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor cultiva dos tipos de lechuga: iceberg y romana. Por razones de demanda, en cada ciclo de cultivo, la cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades. Además, deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas. El cultivo de iceberg requiere 15 litros de agua por unidad, mientras que el de romana necesita 18 litros de agua por unidad. ¿Cuántas unidades de cada tipo de lechuga deben cultivarse para minimizar el consumo total de agua?

Llamemos x = "número de lechugas iceberg", y = "número de lechugas romana".

Deseamos minimizar el consumo de agua que viene expresado como $C(x,y)=15x+18y$.
Las restricciones del problema son:

"La cantidad de iceberg debe ser al menos la mitad de la de romana, pero no puede superar las 1500 unidades" → $x \geq \frac{y}{2}$; $x \leq 1500$

"Deben cultivarse en total entre 900 y 2400 lechugas" → $900 \leq x+y \leq 2400$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq \frac{y}{2} \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y=2x$

x	$y=2x$
0	0
300	600
800	1600

$x=1500$

$x=1500$	y
1500	0
1500	900
1500	1000

$x+y=900$

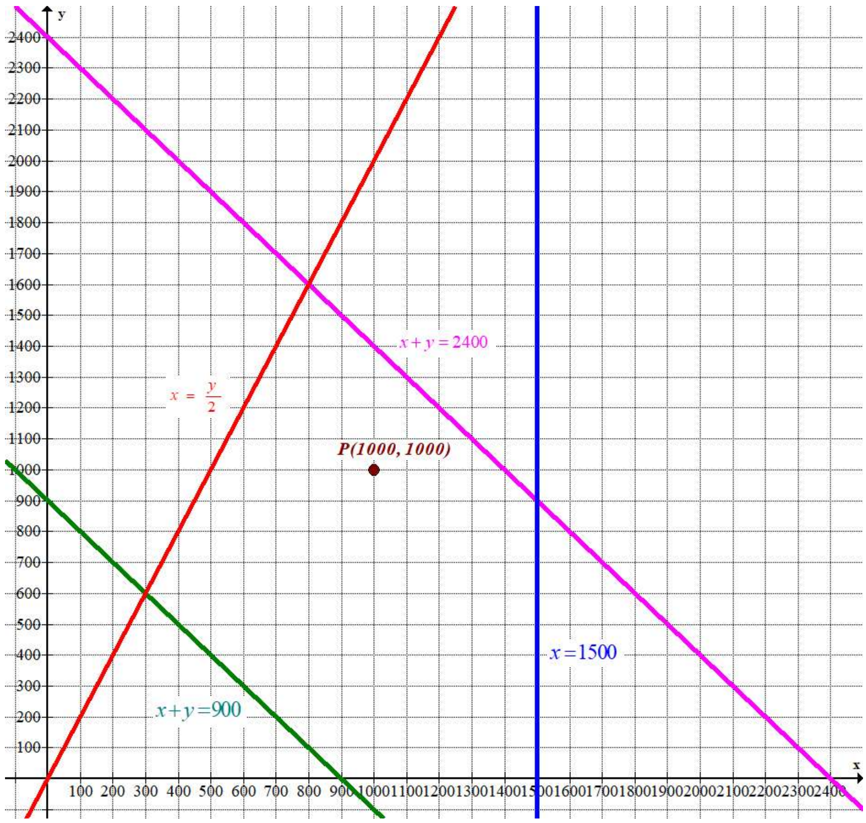
x	$y=900-x$
0	900
300	600
900	0

$x+y=2400$

x	$y=2400-x$
0	2400
800	1600
1500	900

$x \geq 0;\ y \geq 0$

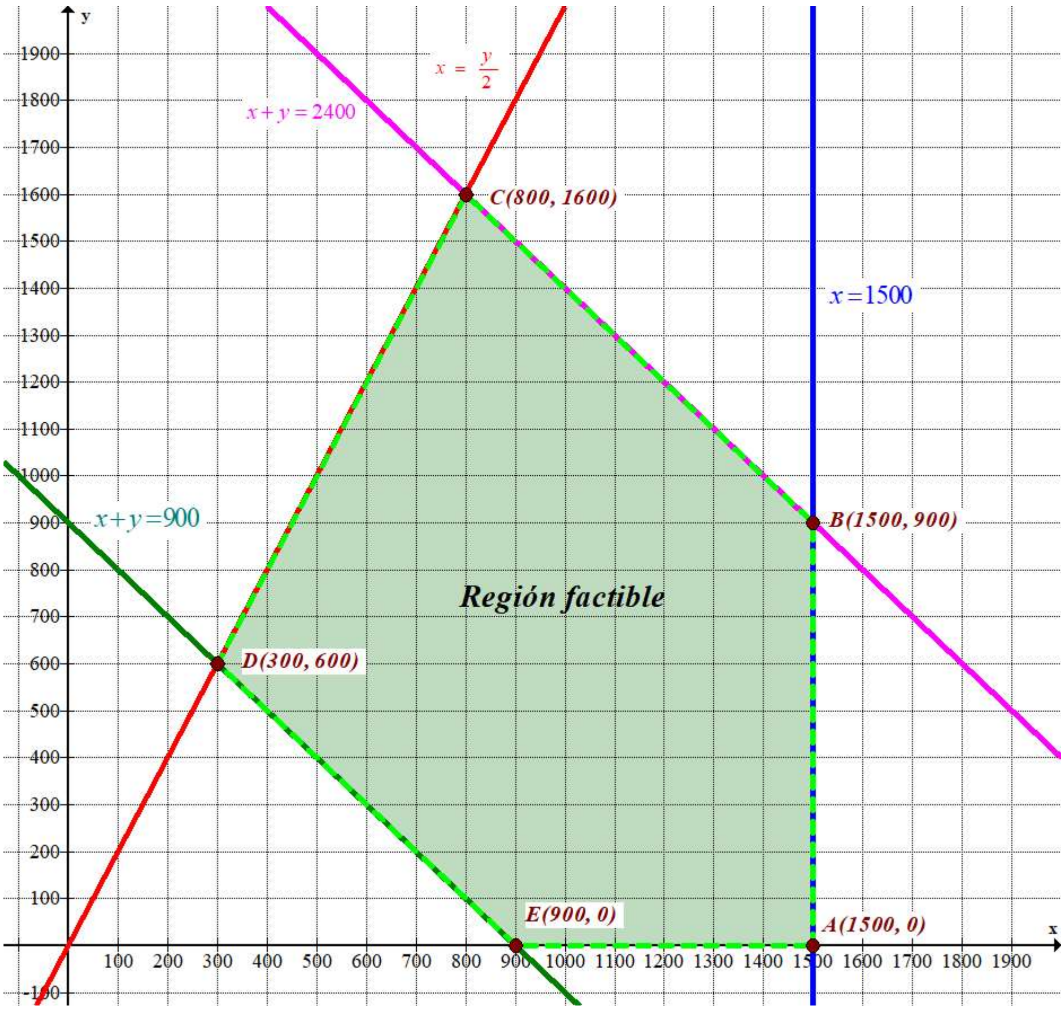
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x \geq y \\ x \leq 1500 \\ 900 \leq x+y \leq 2400 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y rosa, por encima de la recta verde y a la izquierda de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto P(1000, 1000) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3000 \geq 1000 \\ 1000 \leq 1500 \\ 900 \leq 1000+1000 \leq 2400 \\ 1000 \geq 0;\ 1000 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los ingresos $C(x, y) = 15x + 18y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(1500, 0) → $C(1500,0) = 15 \cdot 1500 + 18 \cdot 0 = 22500$

B(1500, 900) → $C(1500,0) = 15 \cdot 1500 + 18 \cdot 900 = 38700$

C(800, 1600) → $C(800,1600) = 15 \cdot 800 + 18 \cdot 1600 = 40800$

D(300, 600) → $C(300,600) = 15 \cdot 300 + 18 \cdot 600 = 15300$

E(900, 0) → $C(900,0) = 15 \cdot 900 + 18 \cdot 0 = 13500$ *Mínimo*

El mínimo es 13500 y se alcanza en el vértice E(900, 0). El gasto mínimo de agua cumpliendo con las restricciones es de 13500 litros y se consigue cultivando 900 lechugas iceberg y 0 lechugas romana

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- *(8 puntos)* Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- *(2 puntos)* Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

a.- Llamamos x = número de hectáreas sembradas de maíz, y = número de hectáreas sembradas de trigo.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Fertilizante	Beneficio
Hectáreas maíz (x)	*200x*	*800x*
Hectáreas trigo (y)	*300y*	*500y*
TOTALES	$200x+300y$	$800x+500y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x,y)=800x+500y$

Las restricciones son:

"La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg" → $200x+300y\le 6000$.

"El agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo" → $x+y\ge 10$

"La superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo" → $x\le y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 200x+300y\le 6000 \\ x+y\ge 10 \\ x\le y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 60 \\ x+y\ge 10 \\ x\le y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$2x+3y=60$

x	$y=\frac{60-2x}{3}$
0	20
12	12
30	0

$x+y=10$

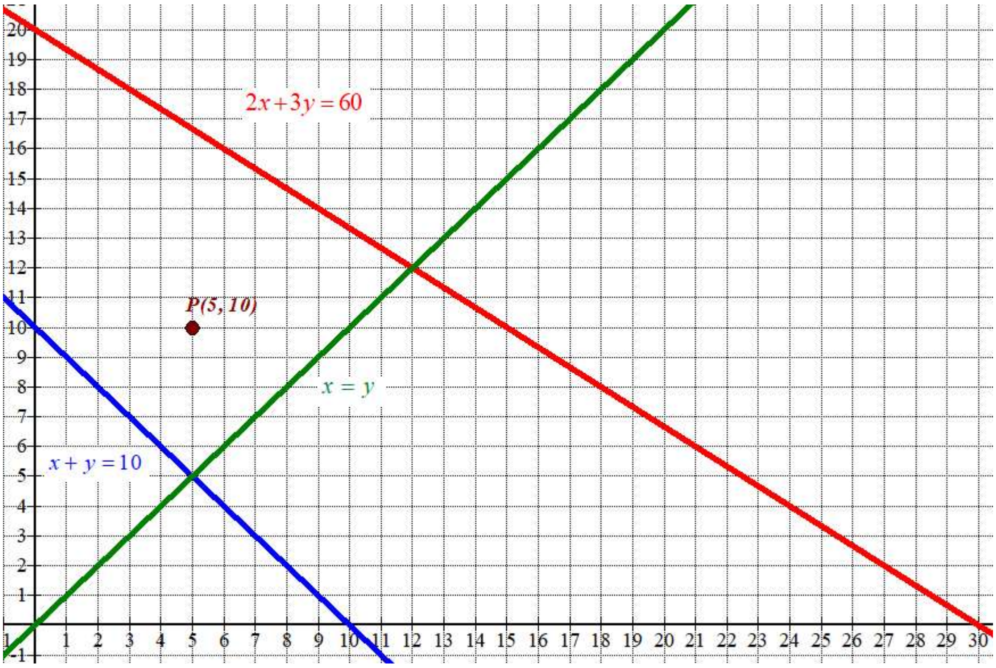
x	$y=10-x$
0	10
5	5
10	0

$x=y$

x	$y=x$
5	5
12	12

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante

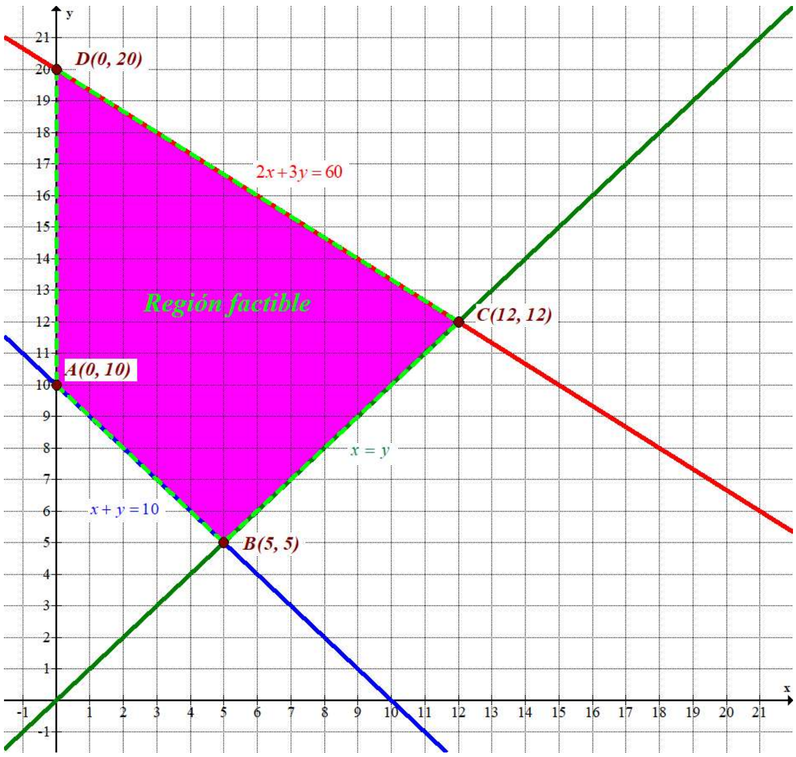


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 60 \\ x+y\ge 10 \\ x\le y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de las rectas verde y azul, y por debajo de la recta roja.

Comprobamos que el punto P(5, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 5+3\cdot 10\le 60 \\ 5+10\ge 10 \\ 5\le 10 \\ 5\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=800x+500y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(0, 10) → $B(0,10)=800\cdot 0+500\cdot 10=5000$

B(5, 5) → $B(5,5)=800\cdot 5+500\cdot 5=6500$

C(12, 12) → $B(12,12)=800\cdot 12+500\cdot 12=15600$ *Máximo*

D(0, 20) → $B(0,20)=800\cdot 0+500\cdot 20=10000$

El valor máximo es 15600 y se obtiene en el vértice C(12, 12).
Plantando 12 hectáreas de trigo y otras 12 de maíz se cumplen las restricciones y se obtienen unos beneficios máximos de 15600 €.

b.- La nueva función que nos da los beneficios es $B(x,y)=800x+1200y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

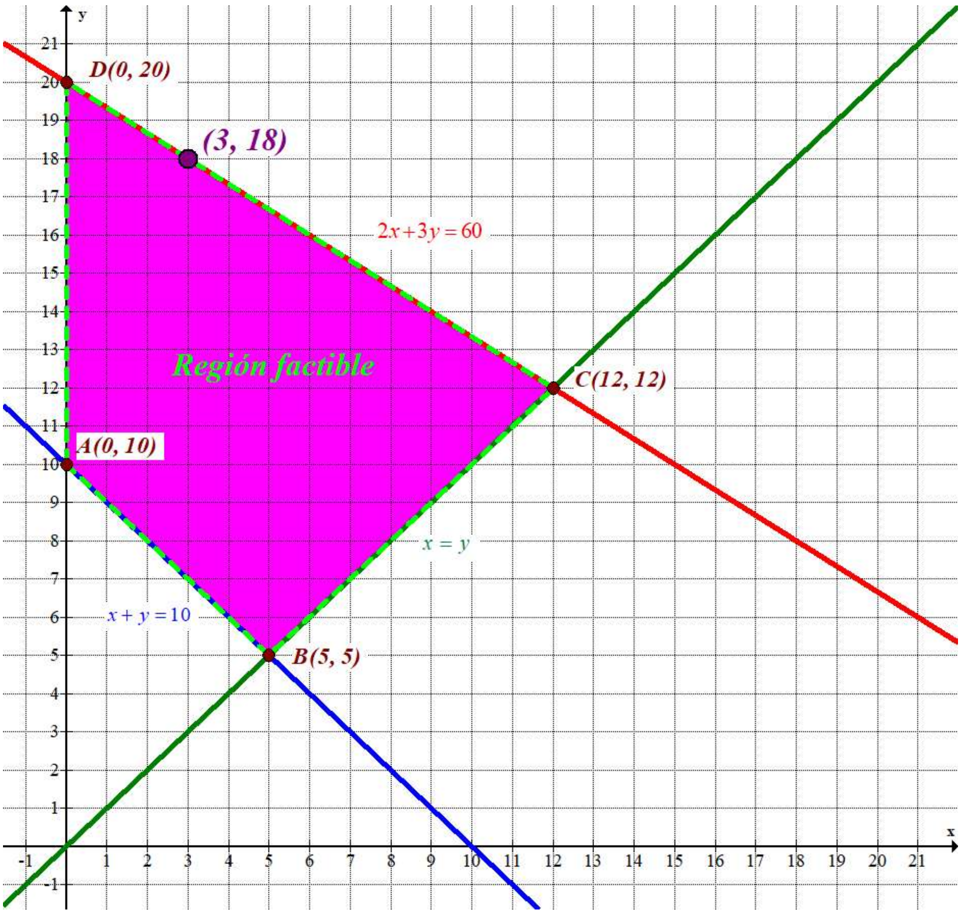
A(0, 10) → $B(0,10)=800\cdot 0+1200\cdot 10=12000$

B(5, 5) → $B(5,5)=800\cdot 5+1200\cdot 5=10000$

C(12, 12) → $B(12,12)=800\cdot 12+1200\cdot 12=24000$ *Máximo*

D(0, 20) → $B(0,20)=800\cdot 0+1200\cdot 20=24000$ *Máximo*

El valor máximo es 24000 y se obtiene en los vértices C(12, 12) y D(0, 20).
El valor máximo del beneficio se consigue en todos los puntos del segmento CD.
El punto (3, 18) pertenece al segmento CD por lo que (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.



SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barritas de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barritas: A y B. Cada barrita A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barrita B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barritas en total.

a.- *(3 puntos)* Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barritas de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- *(7 puntos)* Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo.

a.- Llamamos x = número de barritas A, y = número de barritas B.
Completamos una tabla con los datos del problema.

	Proteinas	Carbohidratos	Coste
Nº barritas A (x)	$20x$	$10x$	$1.5x$
Nº barritas B (y)	$10y$	$15y$	$1.2y$
TOTALES	$20x+10y$	$10x+15y$	$1.5x+1.2y$

Queremos minimizar los costes: $C(x,y)=1.5x+1.2y$

Las restricciones son:

"Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos" → $20x+10y\geq 600;\ 10x+15y\geq 620$.

"no puede consumir más de 100 barritas en total" → $x+y\leq 100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 20x+10y\geq 600 \\ 10x+15y\geq 620 \\ x+y\leq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 60 \\ 2x+3y\geq 124 \\ x+y\leq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b.- Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$2x+y=60$

x	$y=60-2x$
0	60
10	40
30	0

$2x+3y=124$

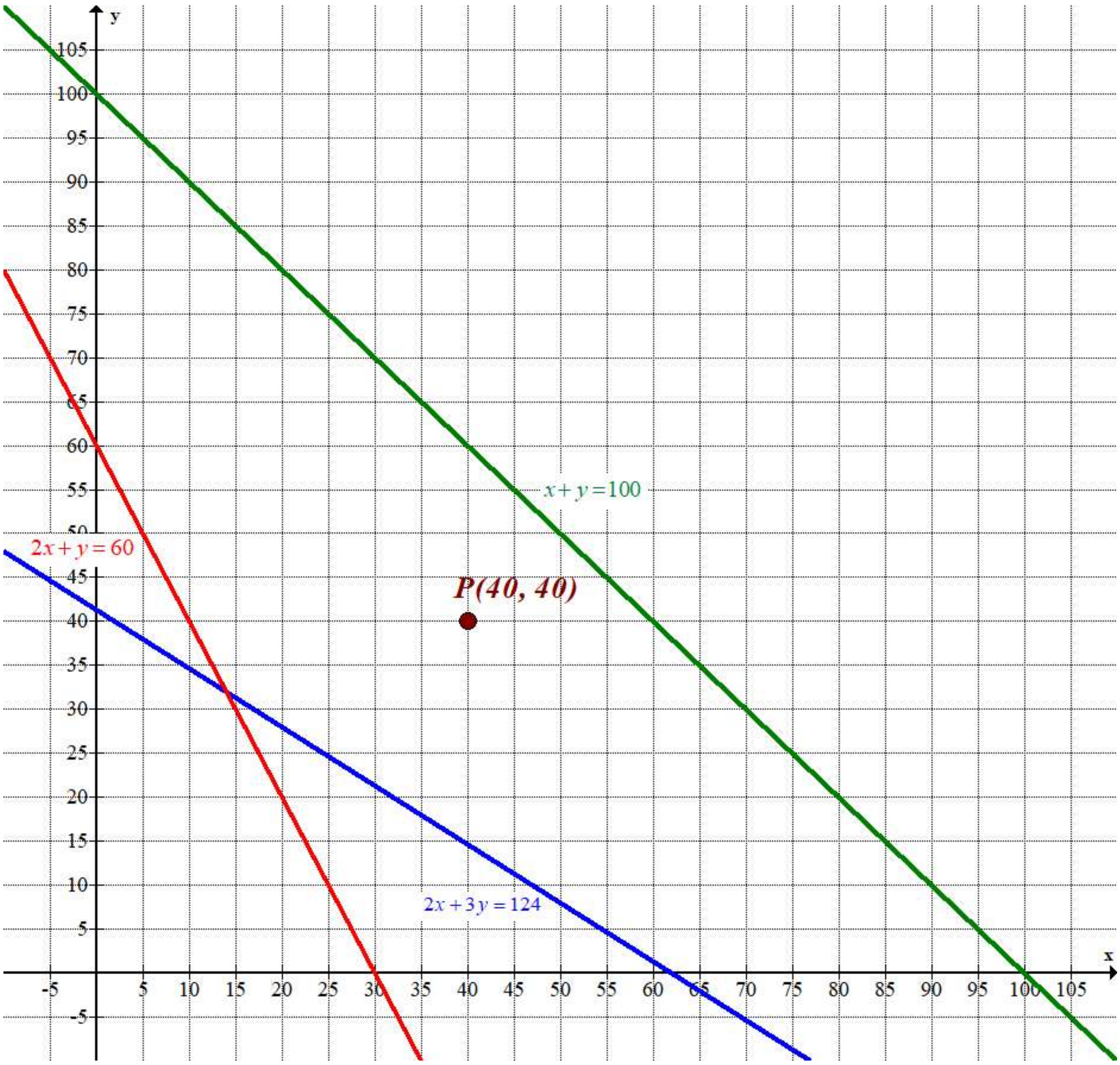
x	$y=\dfrac{124-2x}{3}$
2	40
35	18
62	0

$x+y=100$

x	$y=100-x$
0	100
100	0

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

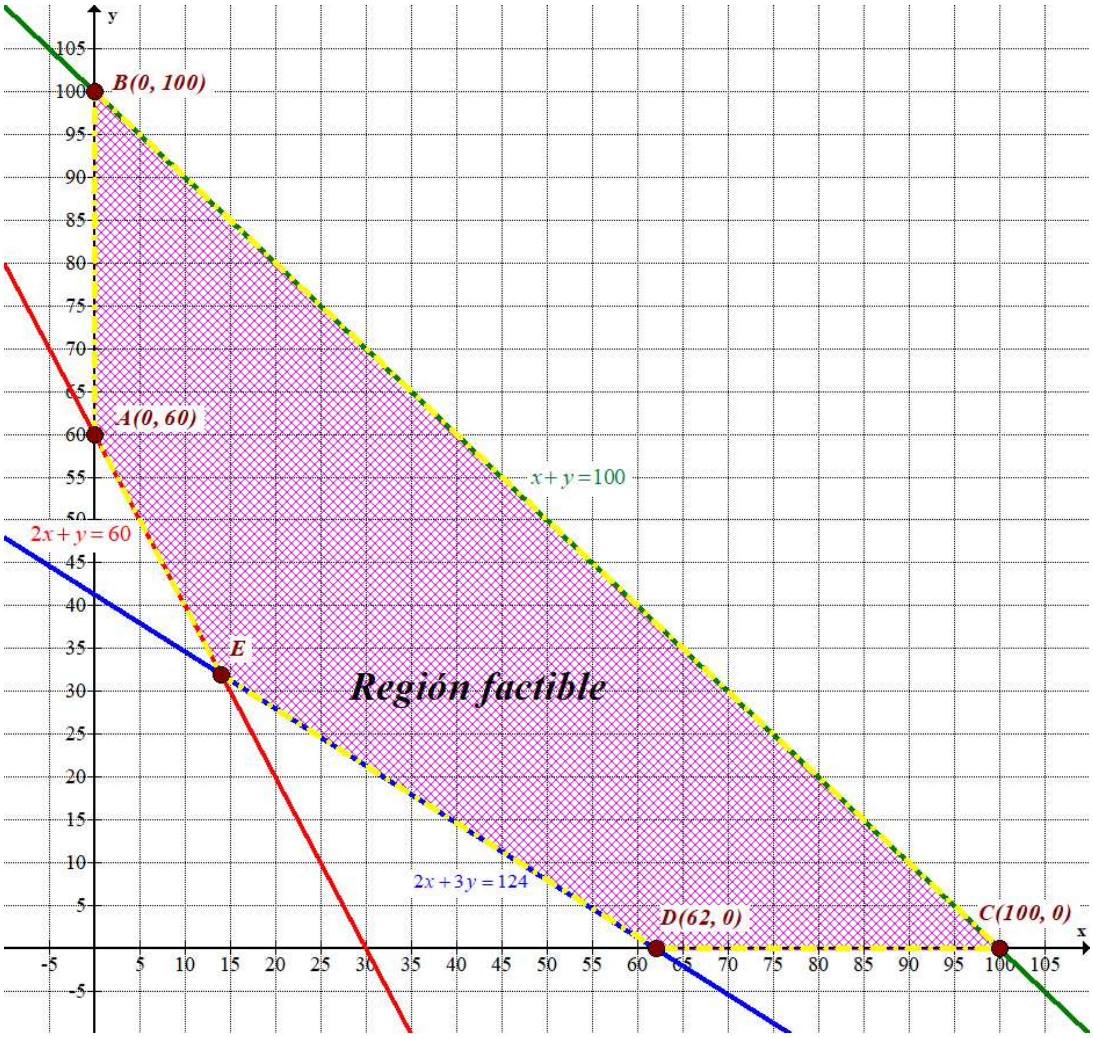


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 60 \\ 2x+3y\geq 124 \\ x+y\leq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de las rectas roja y azul, y por debajo de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(40, 40) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 40+40\geq 60 \\ 2\cdot 40+3\cdot 40\geq 124 \\ 40+40\leq 100 \\ 40\geq 0;\ 40\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 80+40\geq 60 \\ 80+120\geq 124 \\ 40+40\leq 100 \\ 40\geq 0;\ 40\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Determinamos las coordenadas del vértice E.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=60 \\ 2x+3y=124 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x=60-y \\ 2x+3y=124 \end{array}\right\} \Rightarrow 60-y+3y=124 \Rightarrow 2y=64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{64}{2}=32} \Rightarrow 2x+32=60 \Rightarrow 2x=28 \Rightarrow \boxed{x=14} \Rightarrow E(14,32)$$

Valoramos la función coste $C(x,y)=1.5x+1.2y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

A(0, 60) → $C(0,60)=1.5\cdot 0+1.2\cdot 60=72$

B(0, 100) → $C(0,100)=1.5\cdot 0+1.2\cdot 100=120$

C(100, 0) → $C(100,0)=1.5\cdot 100+1.2\cdot 0=150$

D(62, 0) → $C(62,0)=1.5\cdot 62+1.2\cdot 0=93$

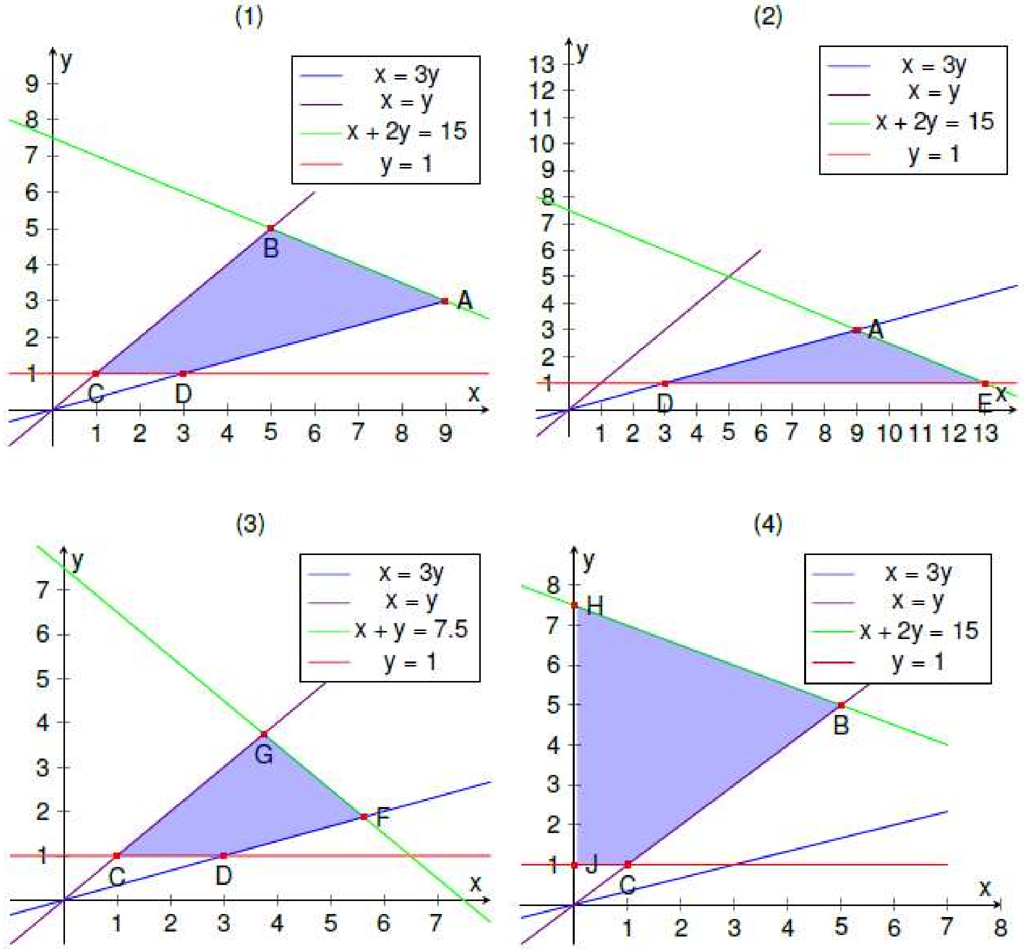
E(14, 32) → $C(14,32)=1.5\cdot 14+1.2\cdot 32=59.4$ Mínimo

El valor mínimo es 59.4 y se obtiene en E(14, 32).
Con 14 barritas A y 32 tipo B se cumplen las restricciones con un coste mínimo de 59.4 €.

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**

b) Si llamamos "x" al número de sesiones de tipo A e "y" al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta? **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

a) Con 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B necesitaría $8 \cdot 30 + 5 \cdot 60 = 540 \text{ minutos} = 9 \text{ horas}$.

Como solo dedica 7 horas y media a estas sesiones no sería posible lo planteado.

b) Llamamos "x" al número de sesiones de tipo A e "y" al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta.

Obtenemos las restricciones del problema.

"Dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos (0.5 h), y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos (1 h). En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes" → $0.5x + y \leq 7.5 \rightarrow x + 2y \leq 15$.

"Al menos una sesión al día siempre es de tipo B" → $y \geq 1$.

"Quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B" → $x \geq y$; $x \leq 3y$

Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

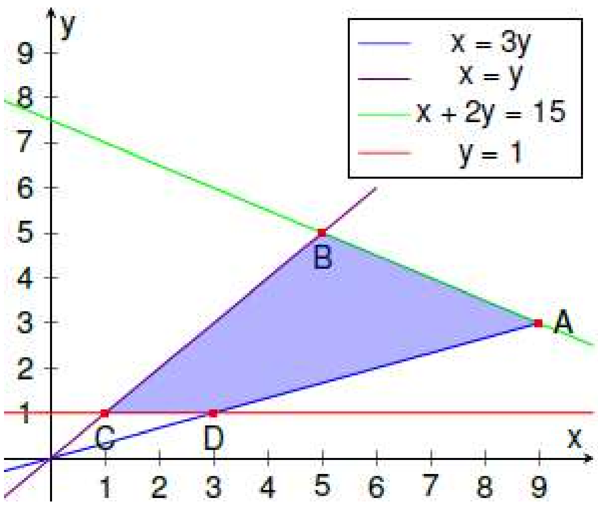
$$\left.\begin{array}{l} x+2y \leq 15 \\ y \geq 1 \\ y \leq x \\ x \leq 3y \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema de inecuaciones no se corresponde con la gráfica (3) pues la recta $x+y=7.5$ no se corresponde con ninguna restricción.

La región factible debe estar entre las rectas $y=x$ e $x=3y$, por lo que no puede ser ni la (2) ni la (4).

La región factible se corresponde con la gráfica (1).

(1)



Los vértices de la región factible son A(9,3), B(5,5), C(1,1) y D(3, 1).

c) Si llamamos p al precio de las sesiones de tipo A, entonces el precio de las de tipo B es 3p, así la función a maximizar son los beneficios que vienen expresados como $B(x,y)=px+3py$.

Queremos maximizar la función objetivo sujeta a las restricciones anteriores. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(9,3) → $B(9,3)=9p+9p=18p$

B(5,5) → $B(5,5)=5p+15p=20p$ ¡*Máximo*!

C(1,1) → $B(1,1)=p+3p=4p$

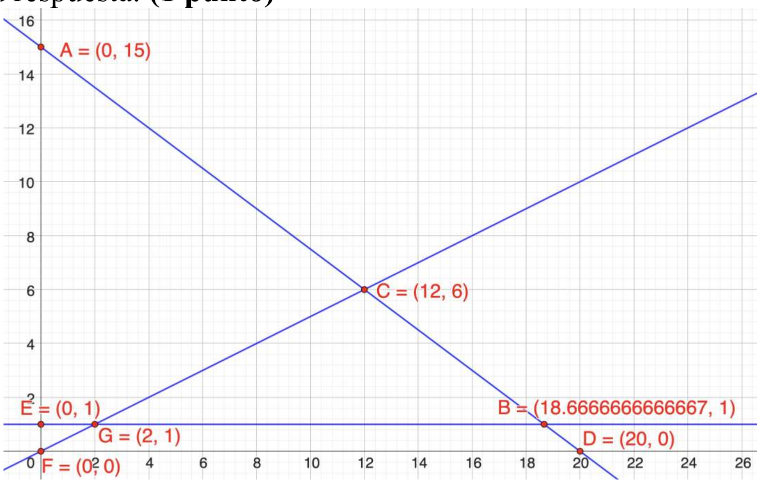
D(3, 1) → $B(3,1)=3p+3p=6p$

El beneficio máximo se alcanza si en el día planea 5 sesiones de tipo A y 5 de tipo B.

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo "*x*" el número de viajes en el dragón rojo e "y*"* el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción. Señala los vértices (p. ej.: B, D, F y G) y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

a) Llamamos "x" al número de viajes en el dragón rojo e "y" al número de viajes en el gran loop.

"Le quedan 2 horas = 120 minutos" → $6x+8y\le 120$.

"Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop" → $y\ge 1;\ x\le 2y$.

Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6x+8y\le 120 \\ y\ge 1 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y\le 60 \\ y\ge 1 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop?

$$x=8\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 24+4y\le 60 \\ y\ge 1 \\ 8\le 2y \\ 8\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y\le 36 \\ y\ge 1 \\ 4\le y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\le 9 \\ y\ge 1 \\ 4\le y \end{array}\right\} \Rightarrow 4\le y\le 9$$

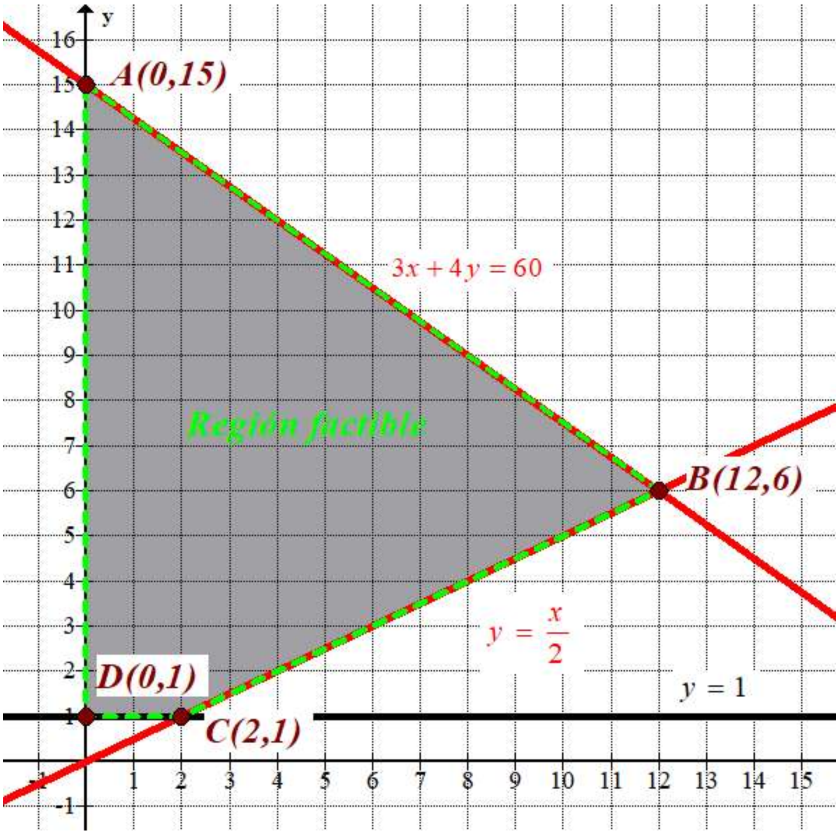
En estas circunstancias puede hacer entre 4 y 9 viajes en el gran loop.

¿Puede subir 6 veces a cada atracción?

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot 6+4\cdot 6\le 60 \\ 6\ge 1 \\ 6\le 2\cdot 6 \\ 6\ge 0;\ 6\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 18+24\le 60 \\ 6\ge 1 \\ 6\le 12 \\ 6\ge 0;\ 6\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

Si es posible, pues se cumplen todas las restricciones expresadas como inecuaciones.

b) Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+4y\le 60 \\ y\ge 1 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante ($x\ge 0;\ y\ge 0$) situada por encima de la recta horizontal ($y\ge 1$), por encima de la recta que pasa por el origen ($x\le 2y$) y por debajo de la recta decreciente ($3x+4y\le 60$).



c) La función objetivo es el coste de los viajes $C(x,y)=5x+3y$. Buscamos su valor máximo y mínimo en la región factible. Valoramos la función en cada vértice.

A(0, 15) → $C(0,15)=5\cdot 0+3\cdot 15=45$

B(12, 6) → $C(12,6)=5\cdot 12+3\cdot 6=$ 78 Máximo

C(2, 1) → $C(2,1)=5\cdot 2+3\cdot 1=13$

D(0, 1) → $C(0,1)=5\cdot 0+3\cdot 1=$ 3 Mínimo

Como máximo puede gastar 78 € haciendo 12 viajes con el dragón rojo y 6 con el gran loop.
Como mínimo puede gastar 3 € haciendo 1 viaje con el dragón rojo y 0 con el gran loop.

Problema B2. — Para organizar un evento social, queremos contratar el transporte con una empresa que nos ofrece autocares y minibuses.

– Cada autocar tiene una capacidad de 50 viajeros y tiene un precio de 100 €.
– Cada minibús tiene una capacidad de 30 viajeros y tiene un precio de 55 €.

Podemos contratar tantos autocares como queramos, y hasta 8 minibuses. Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos. Si queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas, ¿cuál es la combinación más ventajosa y su coste?
(3 pt)

Llamamos x = número de autocares que se contratan, y = número de minibuses que se contratan.

La función a minimizar es el coste de la contratación: $C(x,y)=100x+55y$.
Las restricciones son:

“queremos asegurar el transporte para al menos 450 personas” → $50x+30y\geq 450$
“podemos contratar hasta 8 minibuses” → $y\leq 8$
“Por limitaciones en el número de conductores, tan solo podemos contratar 11 vehículos” → $x+y\leq 11$.
Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 50x+30y\geq 450 \\ x+y\leq 11 \\ y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+3y\geq 45 \\ x+y\leq 11 \\ y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$5x+3y=45$

x	$y=\frac{45-5x}{3}$
0	15
6	5
9	0

$x+y=11$

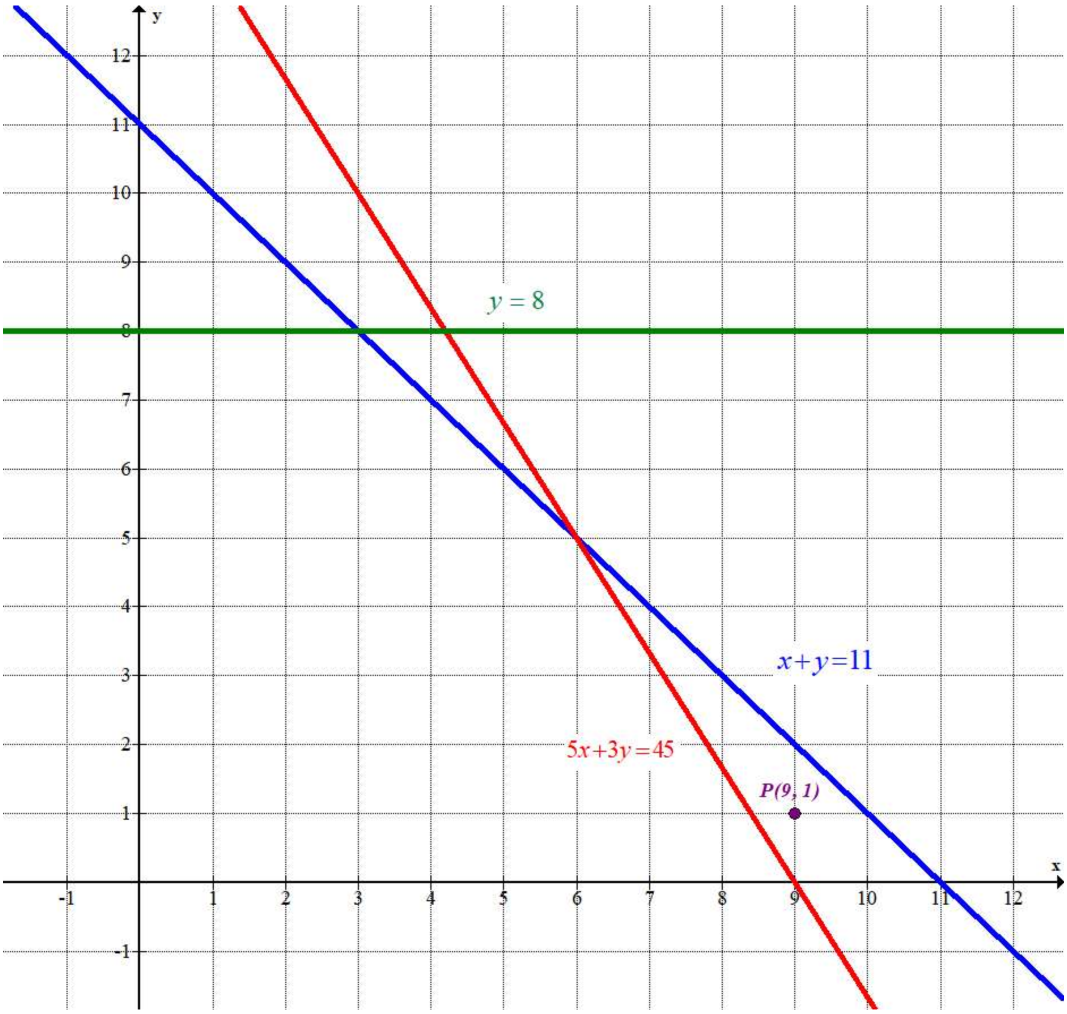
x	$y=11-x$
0	11
6	5
11	0

$y=8$

x	$y=8$
0	8
3	8

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante



La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones

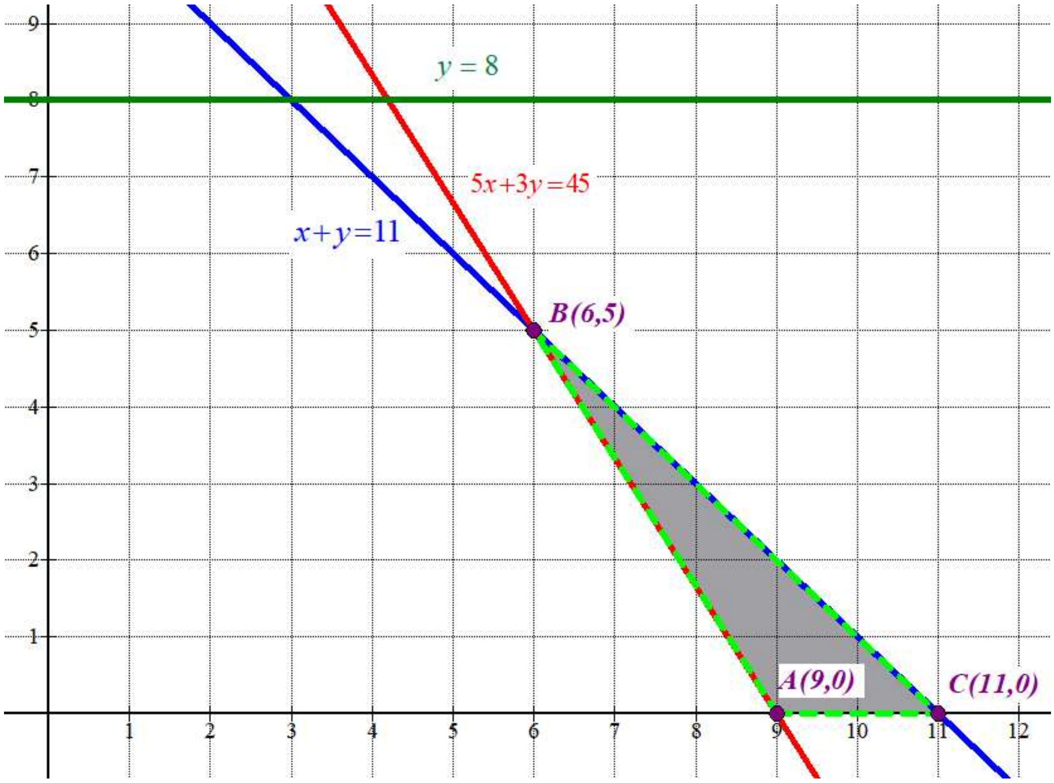
$$\left.\begin{array}{l} 5x+3y\geq 45 \\ x+y\leq 11 \\ y\leq 8 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de la recta azul, por debajo de la recta horizontal verde y por encima de la recta roja.

Comprobamos que el punto P(9, 1) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot 9+3\cdot 1\geq 45 \\ 9+1\leq 11 \\ 1\leq 8 \\ 9\geq 0;\ 1\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región es la indicada. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(9, 0), B(6, 5) y C(11, 0).
Valoramos la función coste $C(x,y)=100x+55y$ en cada uno de los vértices.

A(9, 0) → $C(9,0)=100\cdot 9+55\cdot 0=900$

B(6, 5) → $C(6,5)=100\cdot 6+55\cdot 5=875$ Mínimo

C(11, 0) → $C(11,0)=100\cdot 11+55\cdot 0=1100$

El coste mínimo se consigue con la contratación de 6 autocares y 5 minibuses siendo ese coste mínimo de un importe de 875 €.

4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

a) Llamamos x = número de aparatos A que repara e y = número de aparatos B que repara. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº componentes	Horas de trabajo	Beneficios
Nº de aparatos A (x)	3x	4x	80x
Nº de aparatos B (y)	5y	6y	130y
TOTAL	$3x+5y$	$4x+6y$	$80x+130y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=80x+130y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ \ y \geq 0$

"El taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo" → $3x+5y \leq 480;\ 4x+6y \leq 600$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+5y \leq 480 \\ 4x+6y \leq 600 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+5y \leq 480 \\ 2x+3y \leq 300 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x+5y=480$

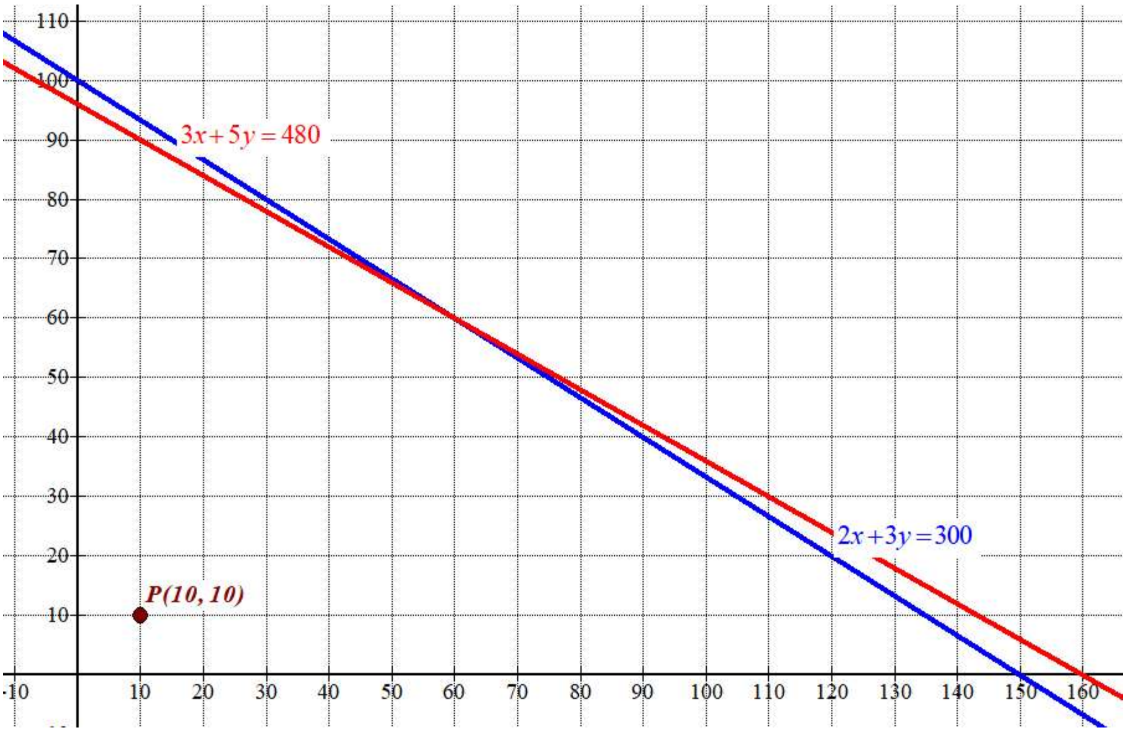
x	$y=\dfrac{480-3x}{5}$
0	96
60	60
160	0

$2x+3y=300$

x	$y=\dfrac{300-2x}{3}$
0	100
60	60
150	0

$x \geq 0;\ \ y \geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} 3x+5y\leq 480 \\ 2x+3y\leq 300 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 30+50\leq 480 \\ 20+30\leq 300 \\ 10\geq 0;\ \ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las restricciones. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 96), C(60, 60) y D(150, 0).
Las coordenadas del vértice C las obtenemos resolviendo el sistema siguiente.

$$\left.\begin{array}{l} -2\times \to 3x+5y=480 \\ 3\times \to 2x+3y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x-10y=-960 \\ 6x+9y=900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-y=-60 \Rightarrow y=60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+300=480 \Rightarrow 3x=180 \Rightarrow x=60 \Rightarrow \boxed{C(60,60)}$$

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=80x+130y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 96) → $B(0,96)=80\cdot 0+130\cdot 96=12480$
C(60, 60) → $B(60,60)=80\cdot 60+130\cdot 60=12600$ Máximo
D(150, 0) → $B(150,0)=80\cdot 150+130\cdot 0=12000$

El máximo beneficio se consigue en el vértice C(60, 60).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 12600 euros con la reparación de 60 aparatos tipo A y otros 60 del tipo B.

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.
a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**
b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

a) Llamamos x = número de discos SATA e y = número de discos SSD.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº ordenadores	Tb	Coste
Nº de discos SATA (x)	100x	9.6x	200x
Nº de discos SSD (y)	50y	1.2y	100y
TOTAL	$100x+50y$	$9.6x+1.2y$	$200x+100y$

La función que deseamos maximizar la capacidad de almacenamiento $C(x,y)=9.6x+1.2y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$
"El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€" → $200x+100y\leq 4000$.
"Deben conectarse 700 ordenadores" → $100x+50y\geq 700$.
"Será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco" → $x+y\geq 30$, $x\geq 1;\ \ y\geq 1$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}200x+100y\leq 4000\\100x+50y\geq 700\\x+y\geq 30\\x\geq 1;\ \ y\geq 1\\x\geq 0;\ \ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+y\leq 40\\2x+y\geq 14\\x+y\geq 30\\x\geq 1;\ \ y\geq 1\end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+y=40$

x	$y=40-2x$
0	40
10	20
20	0

$2x+y=14$

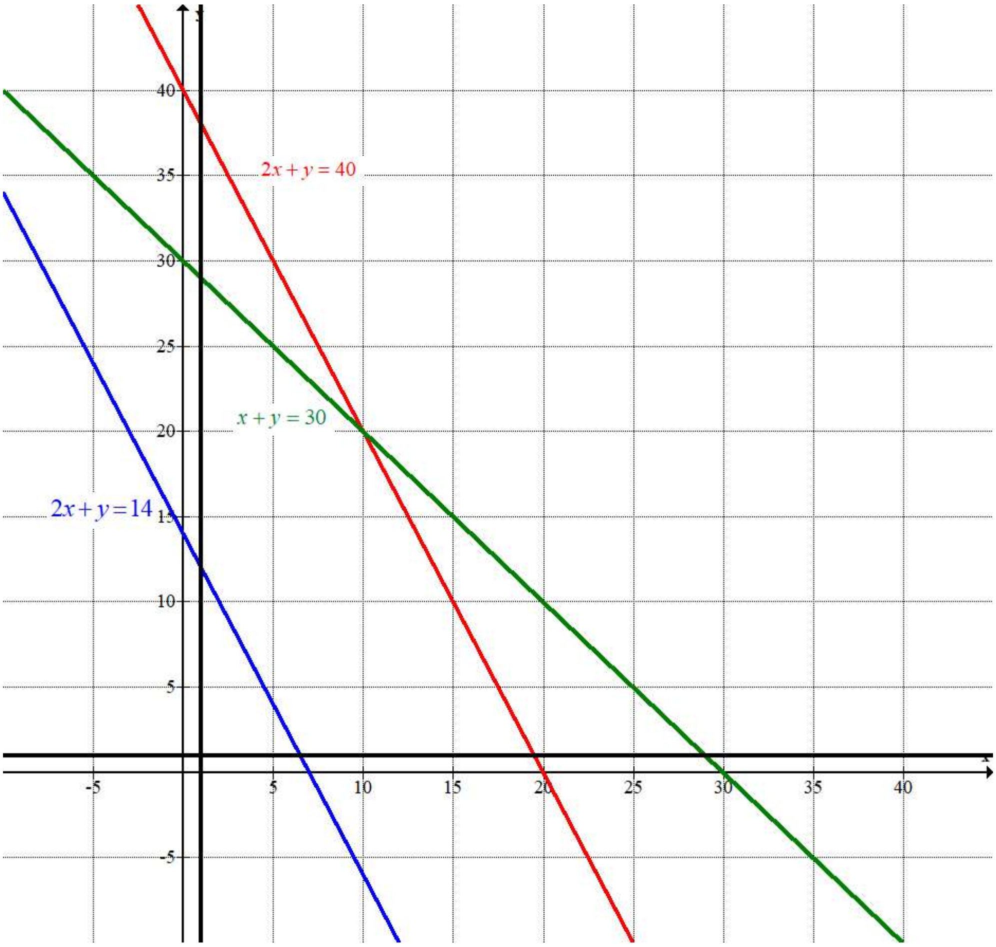
x	$y=14-2x$
0	14
5	4
7	0

$x+y=30$

x	$y=30-x$
1	29
10	20
29	1

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 40 \\ 2x+y\geq 140 \\ x+y\geq 30 \\ x\geq 1;\ \ y\geq 1 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y verde, a la derecha de la recta vertical negra.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(1, 29), B(1, 38) y C(10, 20).

c) Valoramos la función capacidad de almacenamiento $C(x,y)=9.6x+1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(1, 29) → $C(1,29)=9.6\cdot 1+1.2\cdot 29=44.4$
B(1, 38) → $C(1,38)=9.6\cdot 1+1.2\cdot 38=55.2$
C(10, 20) → $C(10,20)=9.6\cdot 10+1.2\cdot 20=120$ *Máximo*

El almacenamiento máximo es de 120 Tb y se consigue en el vértice C(10, 20), que significa instalar 10 discos SATA y 20 discos SSD.

La capacidad media es de $\frac{120}{700}=\frac{6}{35}\ Tb$ por ordenador.

LA RECTA AZUL NO PINTA MUCHO ¡ALGO NO CUADRA!

Opción 2.
Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?
Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

1.2A Llamamos "x" = número de sobaos que elabora e "y" = número de quesadas que elabora. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Minutos	Mantequilla (gramos)	Beneficio
Nº sobaos (x)	$45x$	$200x$	$1.5x$
Nº quesadas (y)	$90y$	$100y$	$2y$
TOTAL	$45x+90y$	$200x+100y$	$1.5x+2y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios obtenidos por la venta de los sobaos y quesadas, que vienen expresados como $B(x,y)=1.5x+2y$.

Las restricciones son:

"La cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades" → $x+y\le 11$

"Se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla y de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas" → $200x+100y\le 1600;\ 45x+90y\le 810$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 11 \\ 200x+100y\le 1600 \\ 45x+90y\le 810 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 11 \\ 2x+y\le 16 \\ x+2y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=11$

x	$y=11-x$
0	11
4	7
5	6
11	0

$2x+y=16$

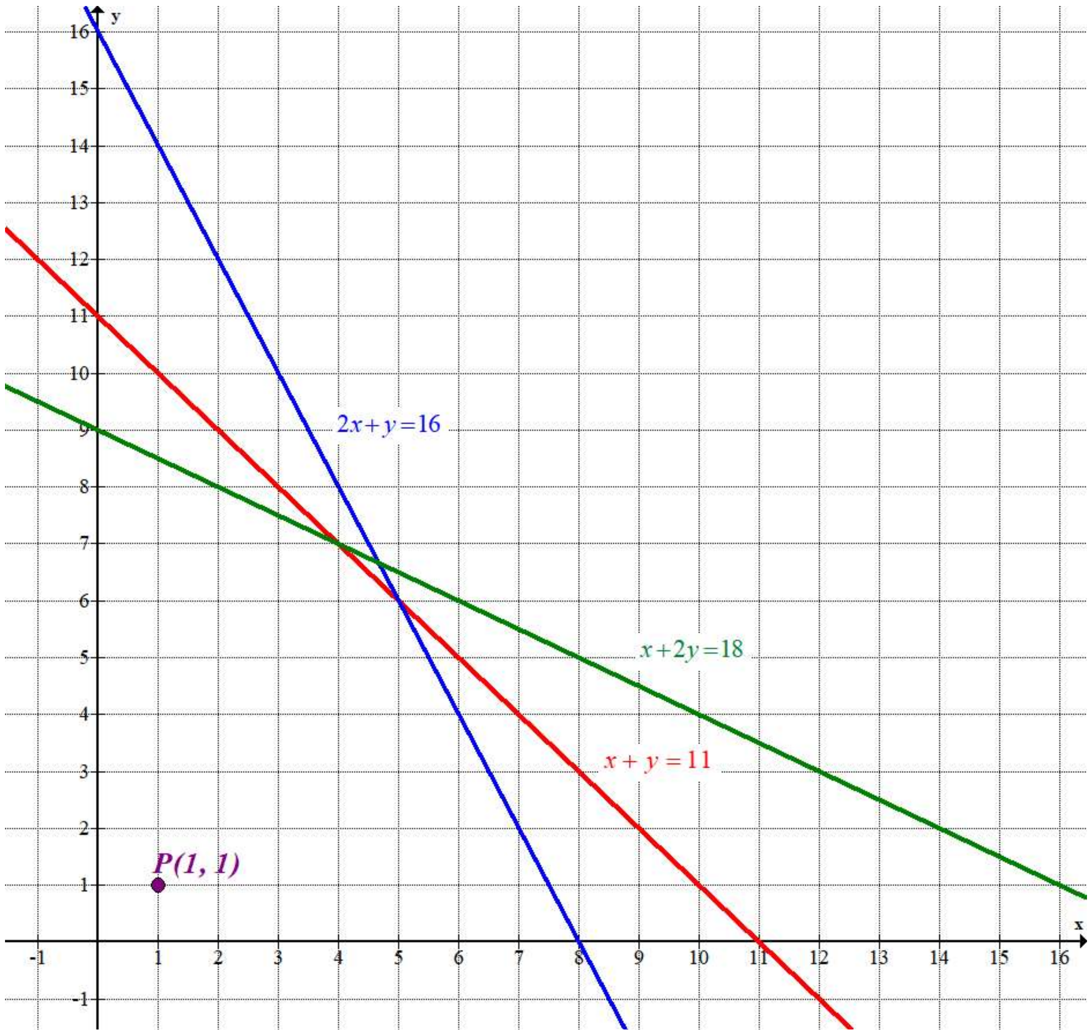
x	$y=16-2x$
0	16
5	6
8	0

$x+2y=18$

x	$y=\frac{18-x}{2}$
0	9
4	7
18	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

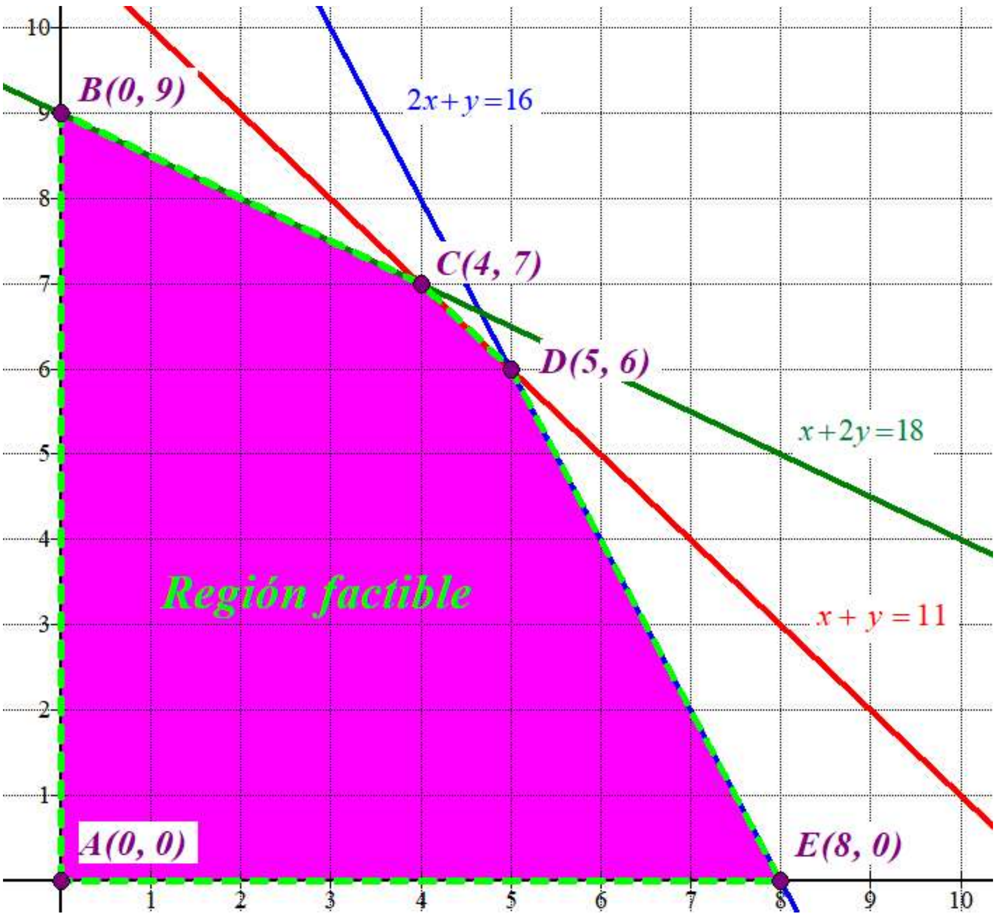


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 11 \\ 2x+y\leq 16 \\ x+2y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1+1\leq 11 \\ 2+1\leq 16 \\ 1+2\leq 18 \\ 1\geq 0; 1\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \begin{matrix} x+2y=18 \\ x+y=11 \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x+2y=18 \\ x=11-y \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow 11-y+2y=18 \Rightarrow y=7 \Rightarrow x=11-7=4 \Rightarrow \boxed{C(4,7)}$$

$$D \Rightarrow \begin{matrix} 2x+y=16 \\ x+y=11 \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+y=16 \\ y=11-x \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow 2x+11-x=16 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=11-5=6 \Rightarrow \boxed{D(5,6)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 9); C(4, 7), D(5, 6) y $E(8,0)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x,y)=1.5x+2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 9) → $B(0,9)=1.5\cdot 0+2\cdot 9=18$

C(4, 7) → $B(4,7)=1.5\cdot 4+2\cdot 7=20$ Máximo

D(5, 6) → $B(5,6)=1.5\cdot 5+2\cdot 6=19.5$

E(8, 0) → $B(8,0)=1.5\cdot 8+2\cdot 0=12$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(4, 7). El máximo beneficio se obtiene fabricando 4 sobaos y 7 quesadas.

1.2D El beneficio máximo que se pueden obtener es de 20 €.

Opción 2.
Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tuppers. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?
Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

1.2A Llamamos “x” = número de botellas de plástico e “y” = número de tuppers.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Plástico rígido	Plástico flexible	Ingresos
Nº botellas plástico (x)	*200x*	*300x*	*5x*
Nº tuppers (y)	*400y*	*100y*	*7y*
TOTAL	$200x+400y$	$300x+100y$	$5x+7y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos que vienen expresados como:

$$I(x,y)=5x+7y$$

Las restricciones son:

“Se dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible” → $200x+400y\le 160000;\ 300x+100y\le 100000$

“La cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas” → $y\le 100+x$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 200x+400y\le 160000 \\ 300x+100y\le 100000 \\ y\le 100+x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\le 800 \\ 3x+y\le 1000 \\ y\le 100+x \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=800$

x	$y=\frac{800-x}{2}$
0	400
200	300
800	0

$3x+y=1000$

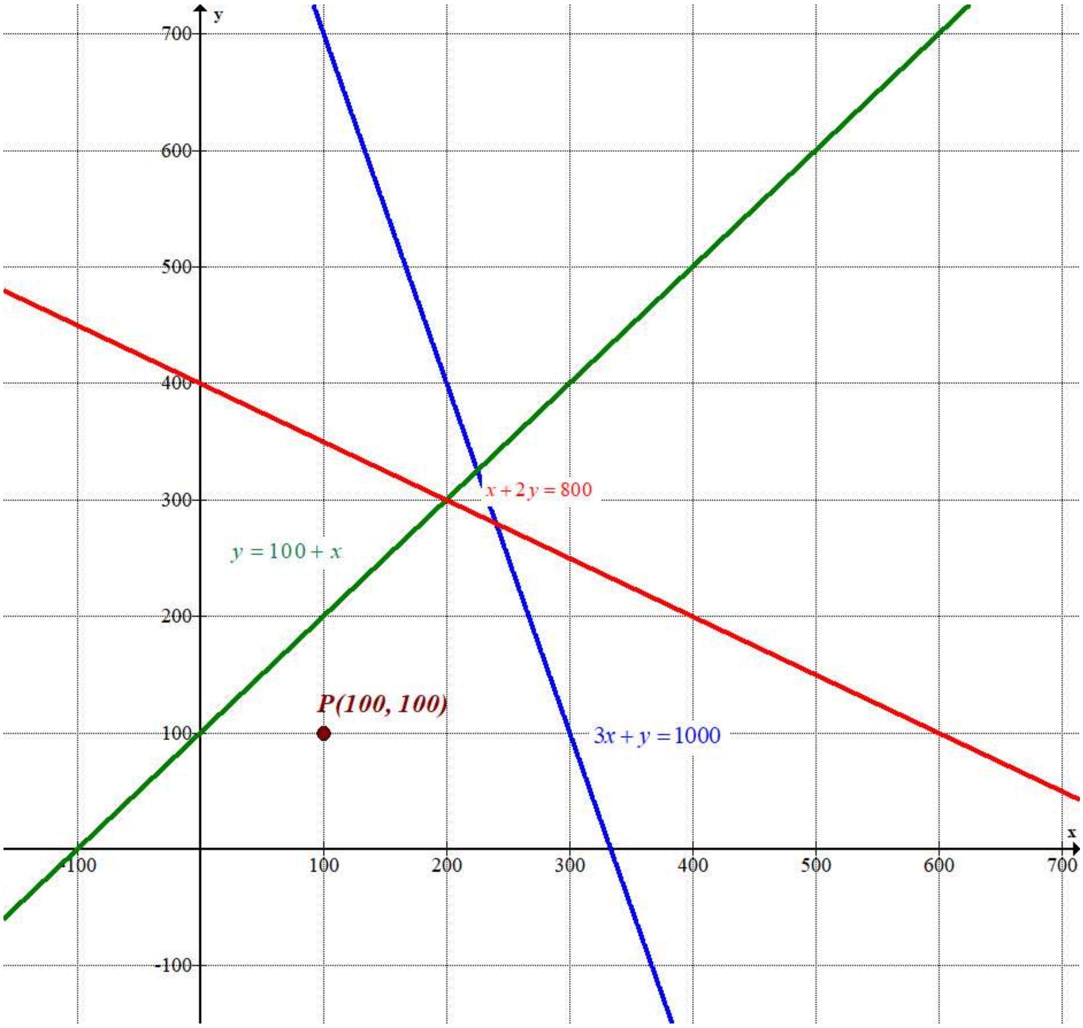
x	$y=1000-3x$
0	1000
300	100
$\frac{1000}{3}$	0

$y=100+x$

x	$y=100+x$
0	100
200	300

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer *cuadrante*

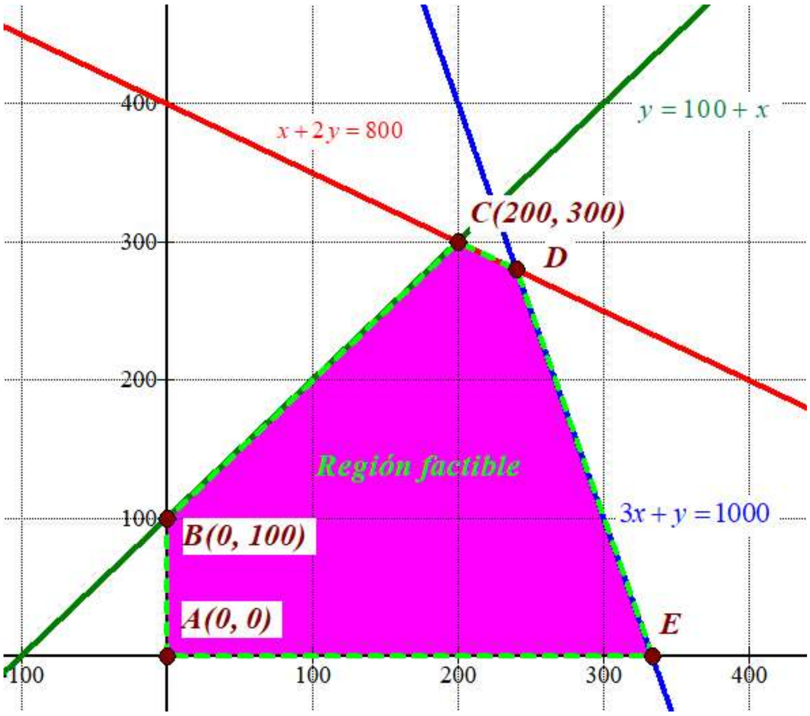


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 800 \\ 3x+y\leq 1000 \\ y\leq 100+x \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+200\leq 800 \\ 300+100\leq 1000 \\ 100\leq 100+100 \\ 100\geq 0;\ 100\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices D y E.

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=800 \\ 3x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=800 \\ y=1000-3x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2000-6x=800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x=-1200 \Rightarrow x=\frac{1200}{5}=240 \Rightarrow y=1000-3\cdot 240=280 \Rightarrow \boxed{D(240,280)}$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+y=1000 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=1000 \Rightarrow x=\frac{1000}{3} \Rightarrow \boxed{E\left(\frac{1000}{3},0\right)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 100); C(200, 300), D(240, 280) y $E\left(\frac{1000}{3},0\right)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $I(x,y)=5x+7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 100) → $I(0,100)=5\cdot 0+7\cdot 100=700$

C(200, 300) → $I(200,300)=5\cdot 200+7\cdot 300=3100$

D(240, 280) → $I(240,280)=5\cdot 240+7\cdot 280=3160$ *Máximo*

$E\left(\frac{1000}{3},0\right) \to I\left(\frac{1000}{3},0\right)=5\cdot\frac{1000}{3}+7\cdot 0=\frac{5000}{3}\simeq 1666.67$

Los máximos ingresos se obtienen en el vértice D(240, 280). Los máximos ingresos se obtienen fabricando 240 botellas de plástico y 280 tuppers.

1.2D Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 3160 €.

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:
Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:
"Indica el punto donde la función $F(x,y)=6x+3y-2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x+y\geq 6;\ 2x+5y\leq 30;\ 2x-y\leq 6$"
Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto (1,2) y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3,0).
a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? Razona tu respuesta. **(1.25 puntos)**
a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3,0)? Razona tu respuesta. **(0.75 puntos)**
a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? (0.5 puntos) **(0.5 puntos)**

Resolvemos el problema planteado.
Las restricciones son $2x+y\geq 6;\ 2x+5y\leq 30;\ 2x-y\leq 6$.
Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$2x+y=6$

x	$y=6-2x$
0	6
2	2
3	0

$2x+5y=30$

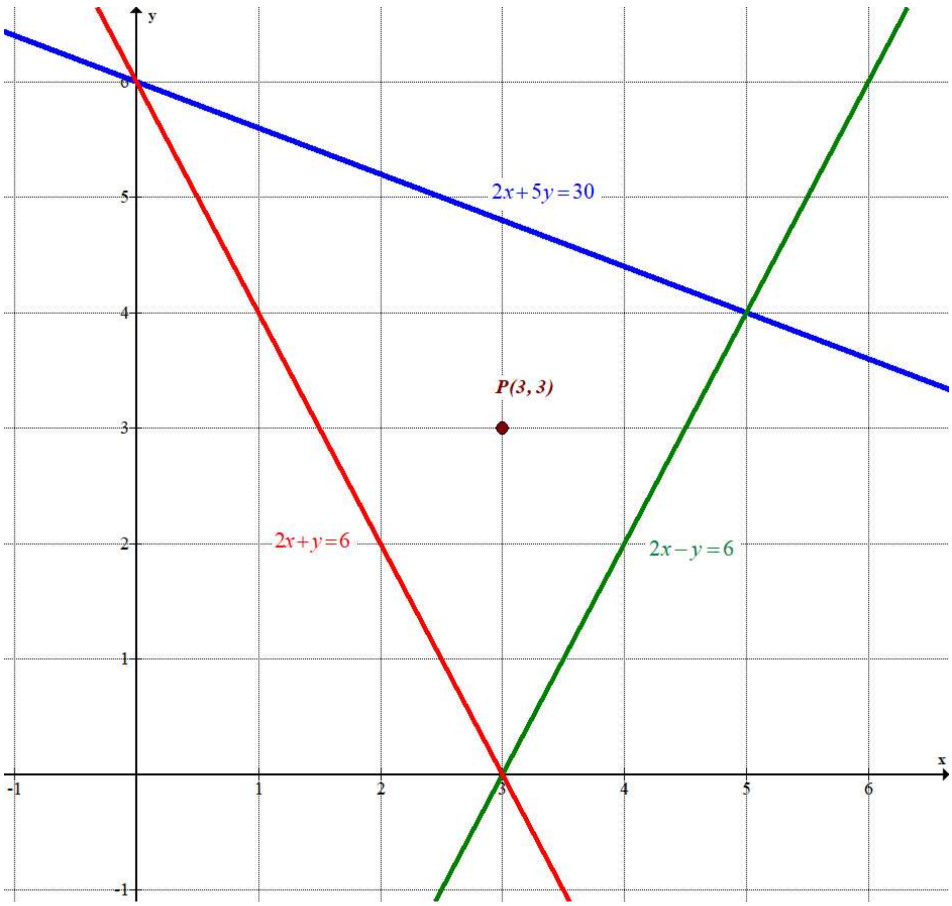
x	$y=\dfrac{30-2x}{5}$
0	6
5	4
15	0

$2x-y=6$

x	$y=2x-6$
0	-6
3	0
5	4

$x\geq 0;\ y\geq 0$

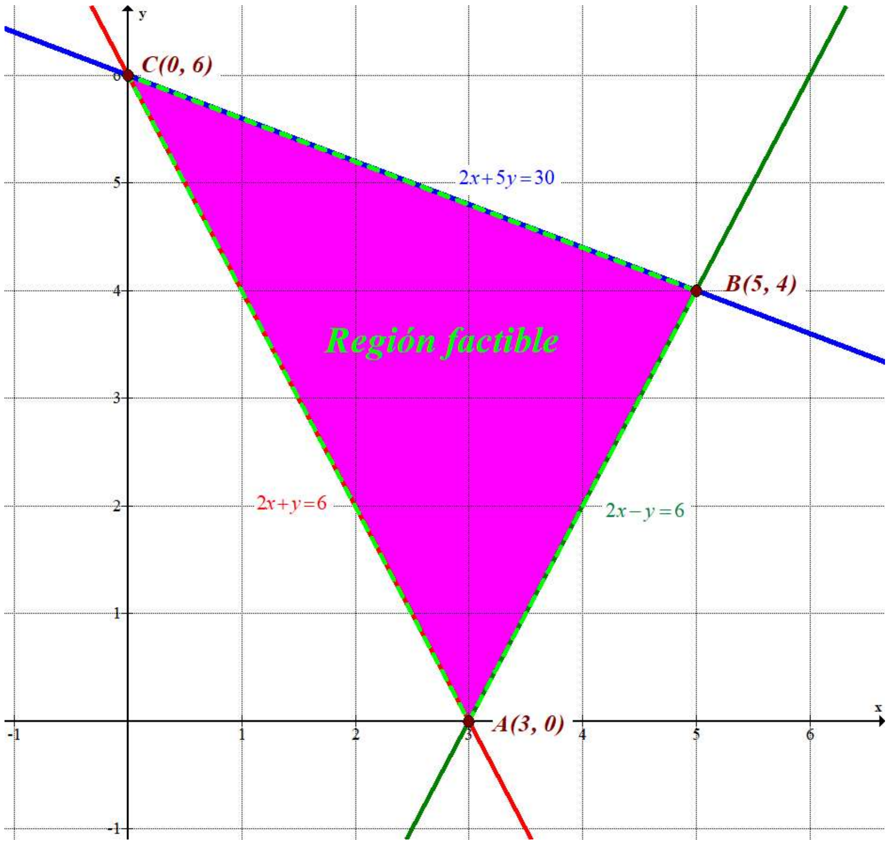
Primer cuadrante



Como las restricciones son $2x+y\geq 6;\ 2x+5y\leq 30;\ 2x-6\leq y$ la región factible es la zona situada por debajo de la recta azul y por encima de las rectas roja y verde.
Comprobamos si el punto P(3, 3) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 3+3\geq 6 \\ 2\cdot 3+5\cdot 3\leq 30 \\ 2\cdot 3-6\leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6+3\geq 6 \\ 6+15\leq 30 \\ 6-6\leq 3 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



Valoramos la función $F(x,y)=6x+3y-2$ en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(3, 0) → $F(3,0)=6\cdot 3+3\cdot 0-2=16$ *Mínimo*

B(5, 4) → $F(5,4)=6\cdot 5+3\cdot 4-2=40$

C(0, 6) → $F(0,6)=6\cdot 0+3\cdot 6-2=16$ *Mínimo*

El mínimo es 16 y se alcanza en los vértices A y C.
El valor mínimo es 16 y se alcanza en cualquier punto del segmento $\overline{AC}$.

a.1) La respuesta de Laura no es correcta pues el punto (1, 2) no cumple todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 6 \\ (1,2) \text{ no la cumple} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡¡¡}2\cdot 1+2<6\text{!!!}$$

a.2) Si es cierto que el valor mínimo se alcanza en el punto (3, 0), aunque no es el único punto de la región que cumple las restricciones donde $F(x,y)=6x+3y-2$ alcanza el valor mínimo.

a.3) El valor mínimo es 16.

Ejercicio 4.- Elige y resuelve sólo uno de los dos apartados siguientes:
Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.
a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**
a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0.5 puntos)**

a.1) Llamamos "x" al número de paquetes A, "y" al número de paquetes B.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Minutos de trabajo manual	Minutos de trabajo en máquinas	Beneficio
Nº paquetes A (x)	30x	45x	20x
Nº paquetes B (y)	60y	20y	17y
TOTALES	$30x+60y$	$45x+20y$	$20x+17y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=20x+17y$. Deseamos maximizar dichos beneficios.

Obtenemos las inecuaciones asociadas al ejercicio.

"Disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas" → $30x+60y\leq 85\cdot 60$; $45x+20y\leq 75\cdot 60$.
"Deben enviar, al menos, 100 paquetes" → $x+y\geq 100$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30x+60y\leq 85\cdot 60 \\ 45x+20y\leq 75\cdot 60 \\ x+y\geq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\leq 170 \\ 9x+4y\leq 900 \\ x+y\geq 100 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región del plano que cumple las restricciones (Región factible).

$x+2y=170$

x	$y=\frac{170-x}{2}$
0	85
80	45
170	0

$9x+4y=900$

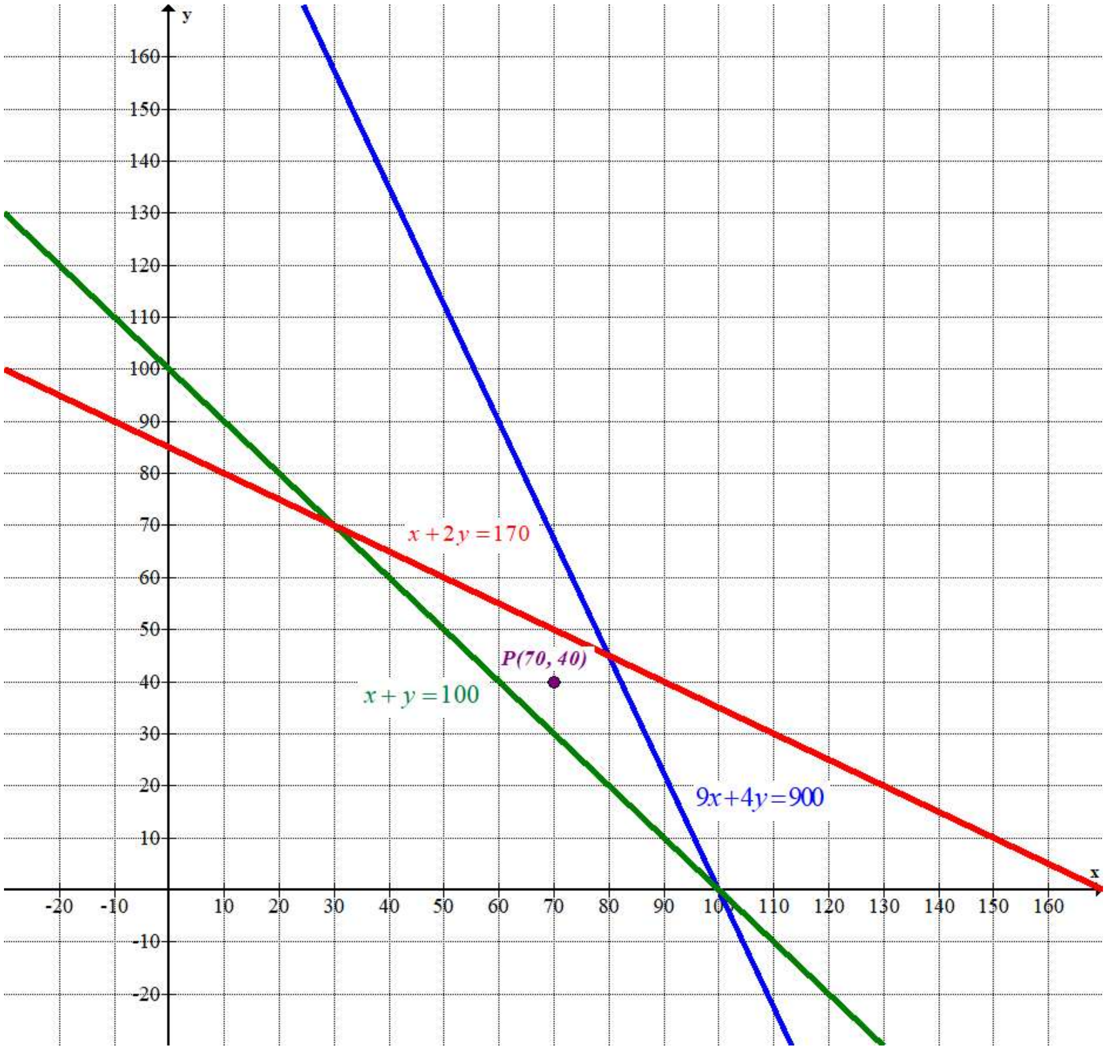
x	$y=\frac{900-9x}{4}$
0	225
80	45
100	0

$x+y=100$

x	$y=100-x$
0	100
10	90
100	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

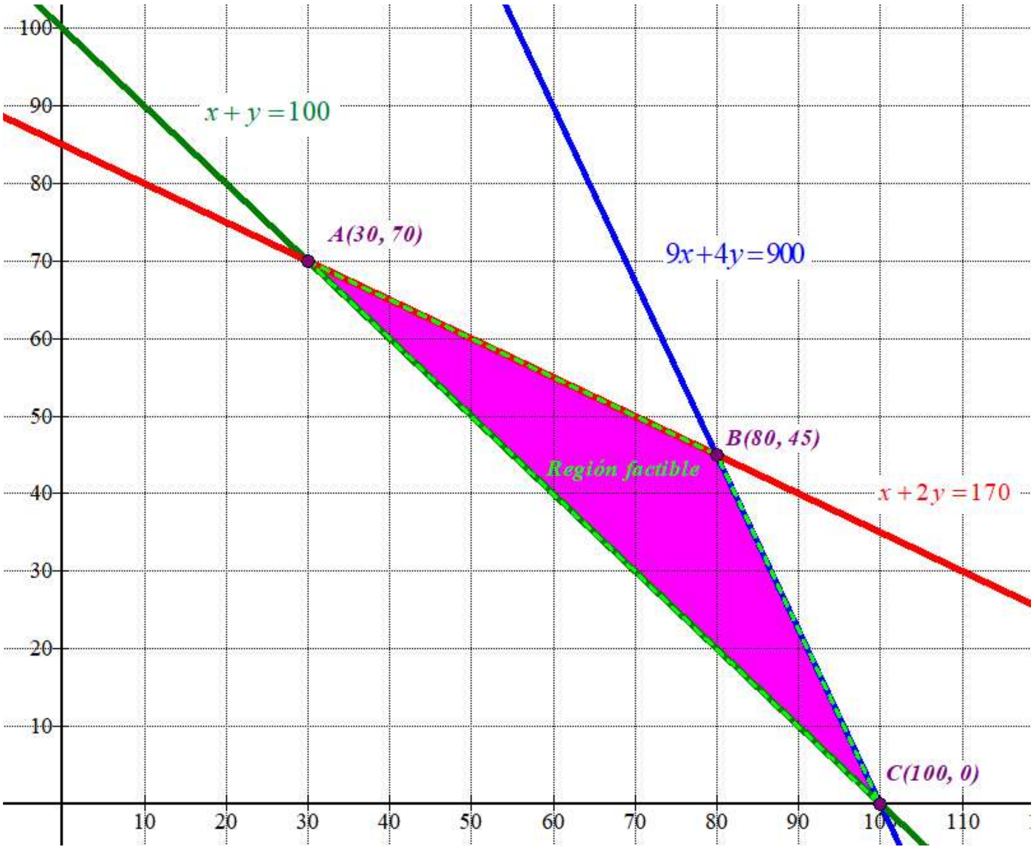


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 170 \\ 9x+4y\le 900 \\ x+y\ge 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta verde.

Comprobamos si el punto P(70, 40) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 70+2\cdot 40\le 170 \\ 9\cdot 70+4\cdot 40\le 900 \\ 70+40\ge 100 \\ 70\ge 0;\ 40\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 70+80\le 170 \\ 630+160\le 900 \\ 70+40\ge 100 \\ 70\ge 0;\ 40\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la zona de color rosa del dibujo inferior.



a.2) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=20x+17y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(30, 70) → $B(30,70)=20\cdot 30+17\cdot 70=1790$

B(80, 45) → $B(80,45)=20\cdot 80+17\cdot 45=$ 2365 *Máximo*

C(100, 0) → $B(100,0)=20\cdot 100+17\cdot 0=2000$

El máximo se alcanza en el vértice B(80, 45) con un valor de 2365.
Se deben elaborar 80 paquetes tipo A y 45 paquetes tipo B para obtener un beneficio máximo de 2365 €.

SOLUCIONES

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos. Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Llamemos x = "número de máquinas fabricadas del tipo A", y = "número de máquinas fabricadas del tipo B".

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=250x+200y$.
Las restricciones del problema son:

"Debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B" → $x \geq 6;\ y \leq 15$.

"El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superarse los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos" → $500x+300y \leq 12000$.

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ y \geq 0$.

Reunimos todas las restricciones formando un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 500x+300y \leq 12000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 5x+3y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$y=15$

x	$y=15$
0	15
6	15
15	15

$x=6$

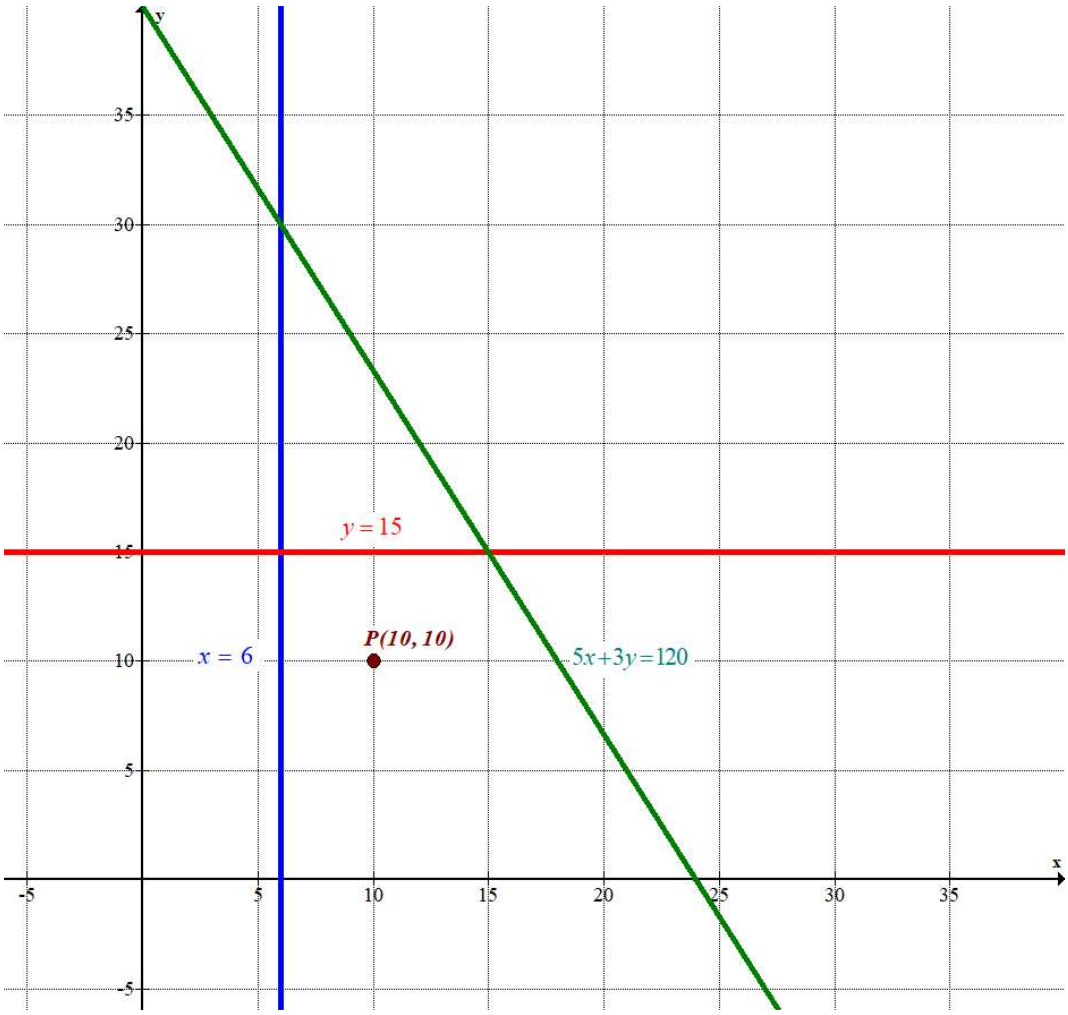
$x=6$	y
6	0
6	15
6	30

$5x+3y=120$

x	$y=\dfrac{120-5x}{3}$
0	40
15	15
24	0

$x \geq 0;\ y \geq 0$

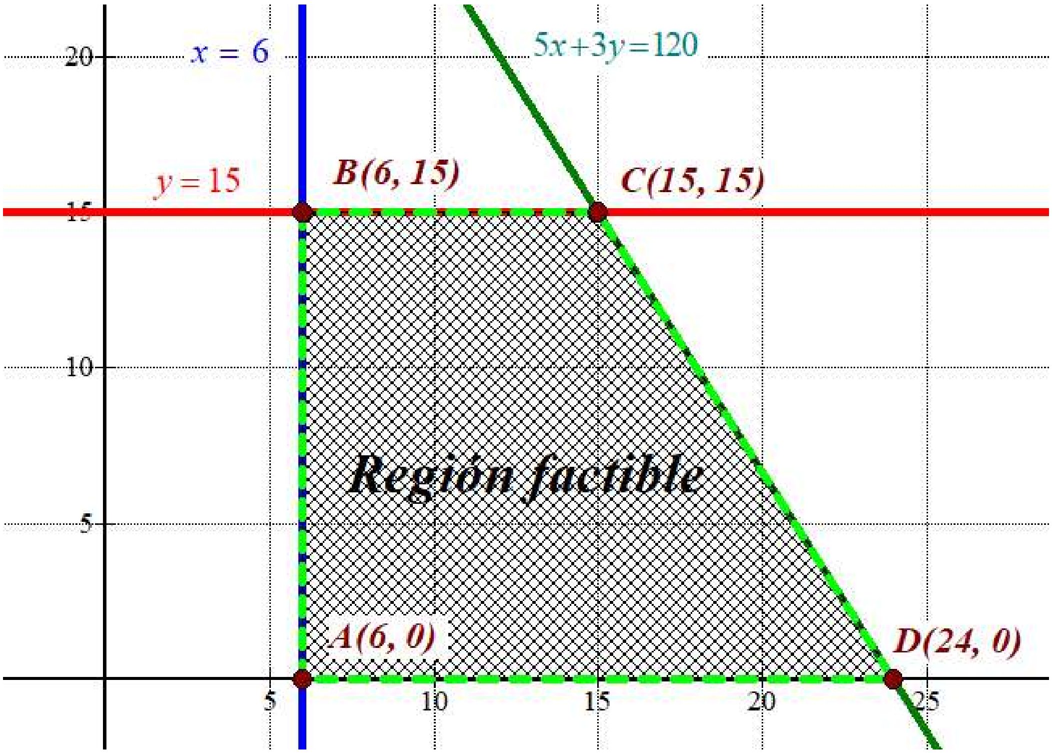
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 15 \\ 5x+3y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde, y a la derecha de la recta vertical azul. Lo comprobamos viendo si el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 6 \\ 10 \leq 15 \\ 50+30 \leq 120 \\ 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos los beneficios $B(x, y) = 250x + 200y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(6, 0) → $B(6,0) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 0 = 1500$

B(6, 15) → $B(6,15) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 15 = 4500$

C(15, 15) → $B(15,15) = 250 \cdot 15 + 200 \cdot 15 = 6750$ Máximo

D(24, 0) → $B(24,0) = 250 \cdot 24 + 200 \cdot 0 = 6000$

El máximo es 6750 y se alcanza en el vértice C(15, 15).
El beneficio máximo cumpliendo con las restricciones es de 6750 euros y se consigue fabricando 15 máquinas de cada tipo.

B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Llamamos "x" al número de quesos de oveja que se fabrica diariamente e "y" al número de quesos de cabra.

"Cada queso de oveja le reporta unos beneficios de 5 € y cada queso de cabra le reporta 11 €" → Los beneficios son $B(x,y)=5x+11y$.

Las restricciones son:

"Diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos" → $10x+15y\leq 300$.

"Debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso" → $x+y\geq 25$

"El número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades" → $x+2y\leq 30$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0,\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} 10x+15y&\leq 300\\ x+y&\geq 25\\ x+2y&\leq 30\\ x\geq 0,\ y&\geq 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+3y&\leq 60\\ x+y&\geq 25\\ x+2y&\leq 30\\ x\geq 0,\ y&\geq 0\end{aligned}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+3y=60$

x	$y=\frac{60-2x}{3}$
0	20
30	0

$x+y=25$

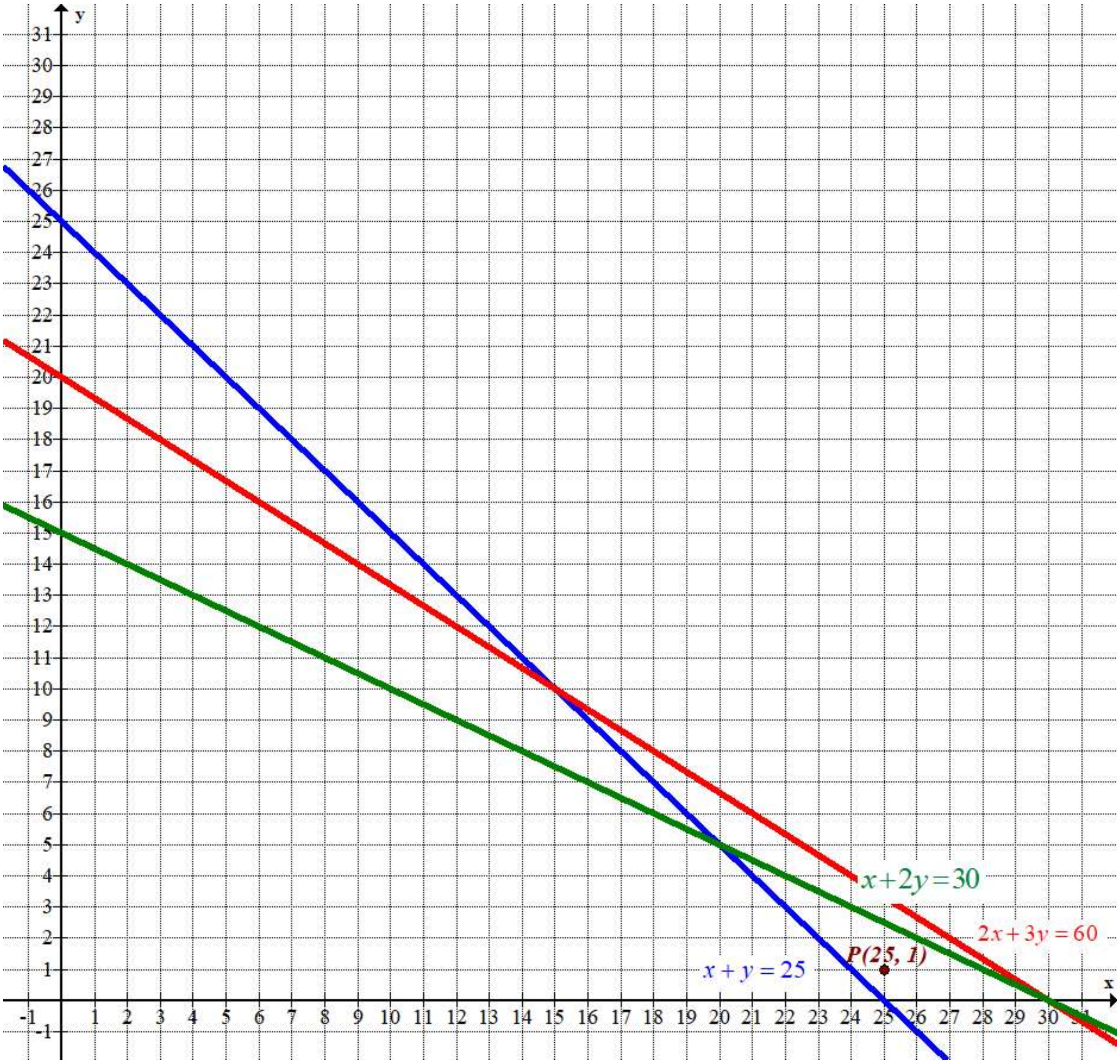
x	$y=25-x$
0	25
20	5
25	0

$x+2y=30$

x	$y=\frac{30-x}{2}$
0	15
20	5
30	0

$x\geq 0,\ y\geq 0$

Primer cuadrante

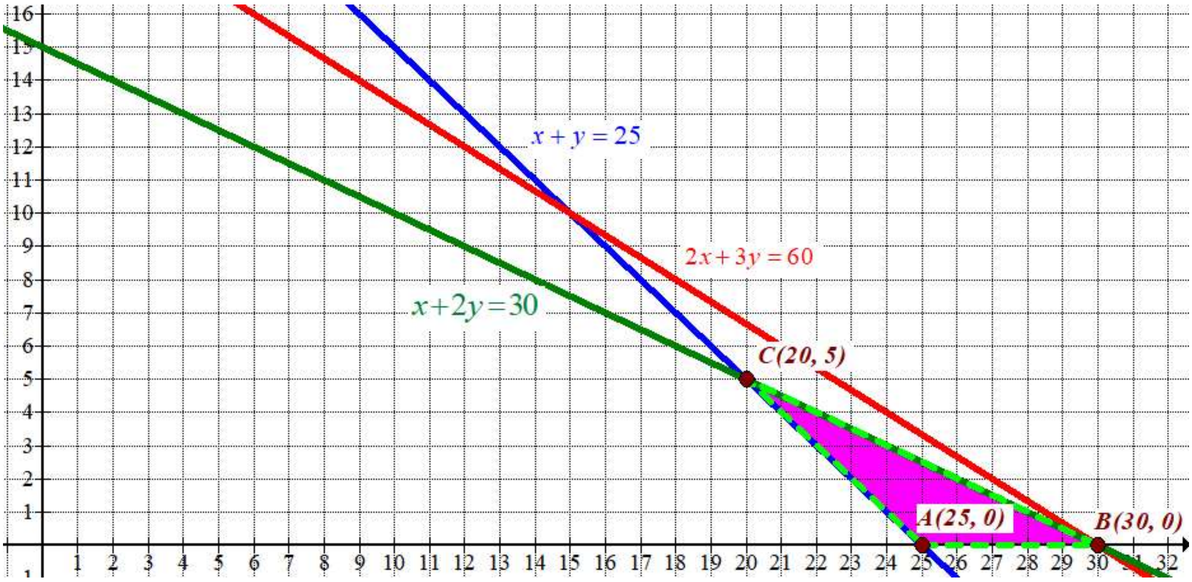


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 60 \\ x+y\ge 25 \\ x+2y\le 30 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto P(25, 1) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 25+3\cdot 1\le 60 \\ 25+1\ge 25 \\ 25+2\cdot 1\le 30 \\ 25\ge 0,\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=5x+11y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(25, 0) → $B(25,0)=5\cdot 25+11\cdot 0=125$

B(30, 0) → $B(30,0)=5\cdot 30+11\cdot 0=150$

C(20, 5) → $B(20,5)=5\cdot 20+11\cdot 5=$ 155 Máximo

El valor máximo es 155 y se obtiene en el vértice C(20, 5). Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 155 euros con la fabricación de 20 quesos de oveja y 5 quesos de cabra.

B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.

Llamamos "x" al número de hectáreas de maíz e "y" al número de hectáreas de trigo.

"Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo" → Los beneficios son $B(x,y)=50x+40y$.

Las restricciones son:

"La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar" → $x+y\leq 120$.

"La granja dispone de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2." → $3x+2y\leq 300$

"La granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo" → $x\geq 20;\ y\geq 15$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 120 \\ 3x+2y\leq 300 \\ x\geq 20;\ y\geq 15 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=120$

x	$y=120-x$
0	120
120	0

$3x+2y=300$

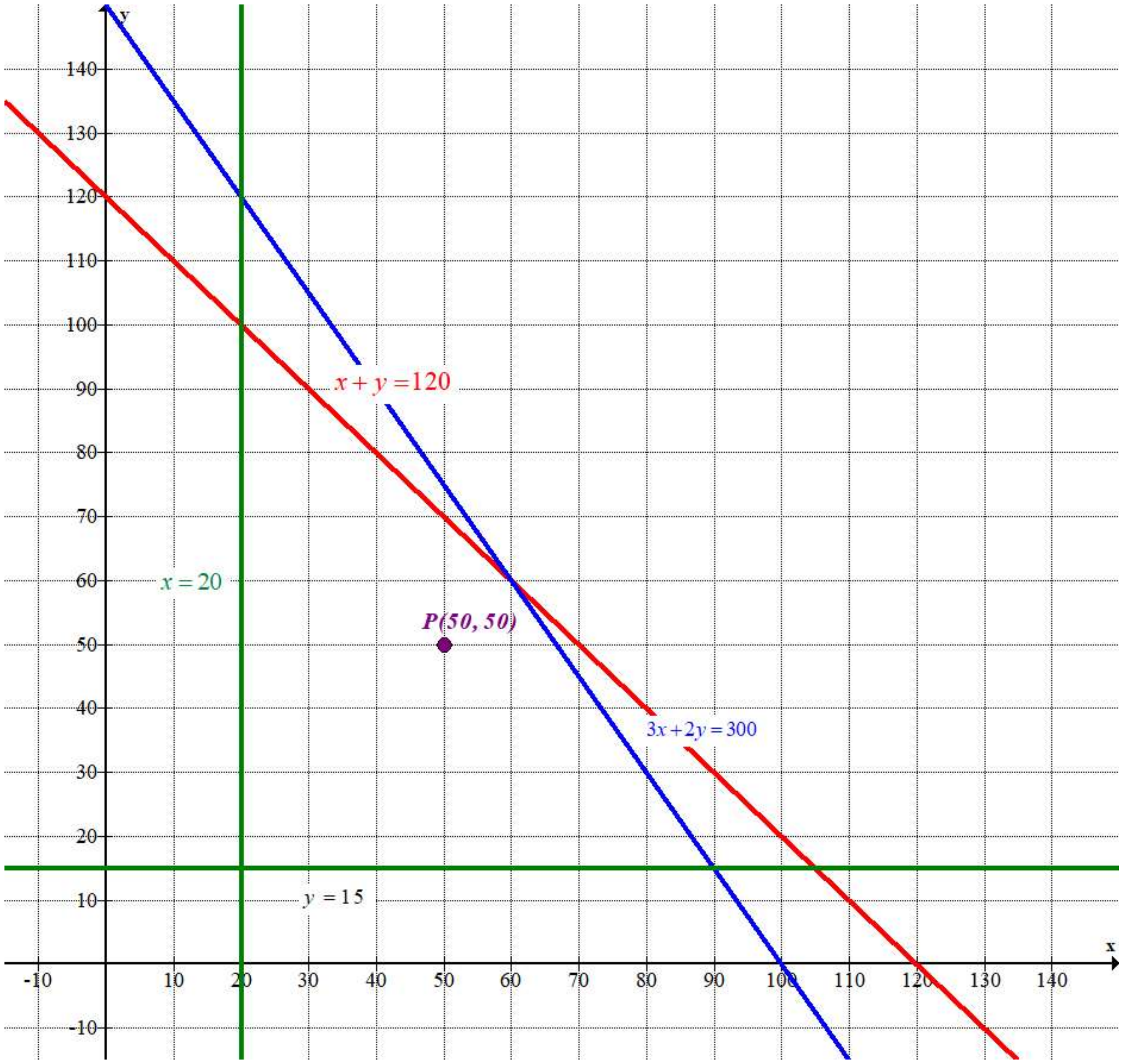
x	$y=\frac{300-3x}{2}$
0	150
100	0

$x=20$

$x=20$	y
20	0
20	15

$y=15$

x	$y=15$
0	15
20	15



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ 3x+2y\le 300 \\ x\ge 20;\ y\ge 15 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50+50\le 120 \\ 3\cdot 50+2\cdot 50\le 300 \\ 50\ge 20;\ 50\ge 15 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.

El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=50x+40y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(20, 15) → $B(20,15)=50\cdot 20+40\cdot 15=1600$

B(20, 100) → $B(20,100)=50\cdot 20+40\cdot 100=5000$

C(60, 60) → $B(60,60)=50\cdot 60+40\cdot 60=$ 5400 máximo

D(90, 15) → $B(90,15)=50\cdot 90+40\cdot 15=5100$

El valor máximo es 5400 y se obtiene en el vértice C(60, 60). Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 5400 euros plantando 60 hectáreas de maíz y 60 de trigo.

2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x+y\le 4 \qquad 3x\le 4+5y \qquad y\le 7x+12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y)=6x-10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=4$

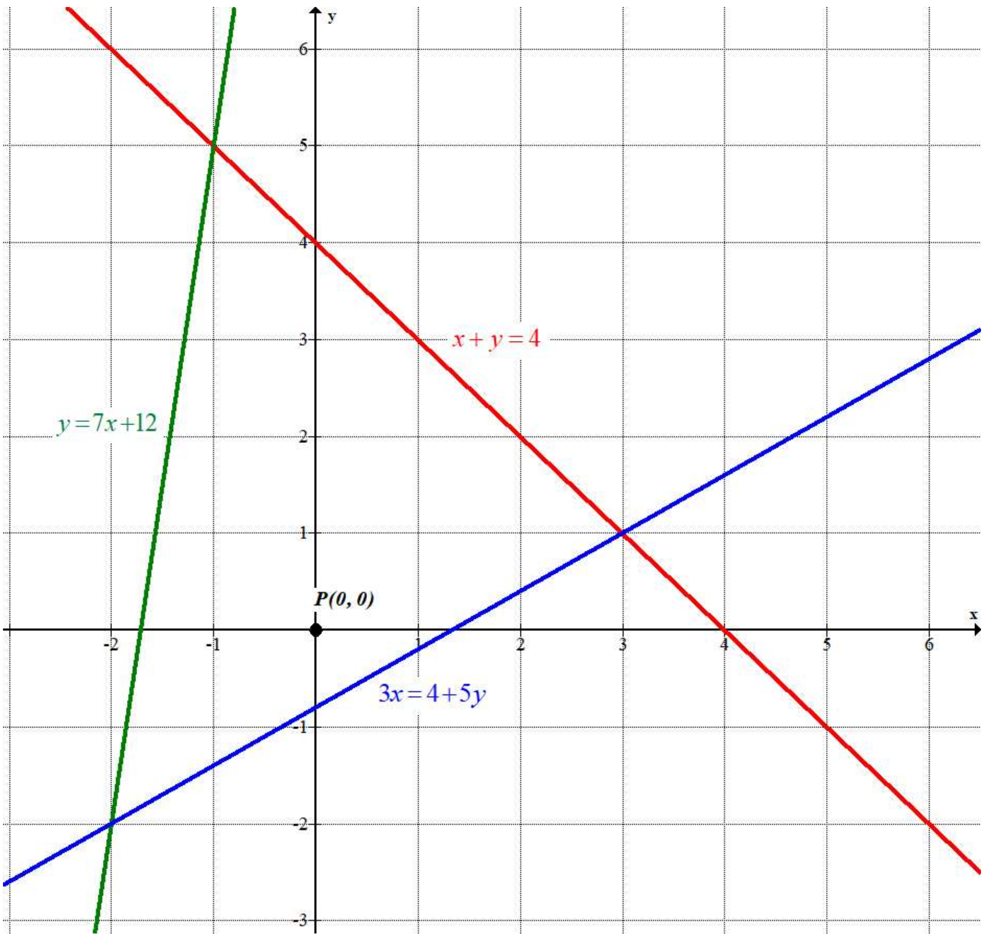
x	$y=4-x$
-1	5
0	4
3	1

$3x=4+5y$

x	$y=\frac{3x-4}{5}$
-2	-2
3	1
8	4

$y=7x+12$

x	$y=7x+12$
-2	-2
-1	5
0	12

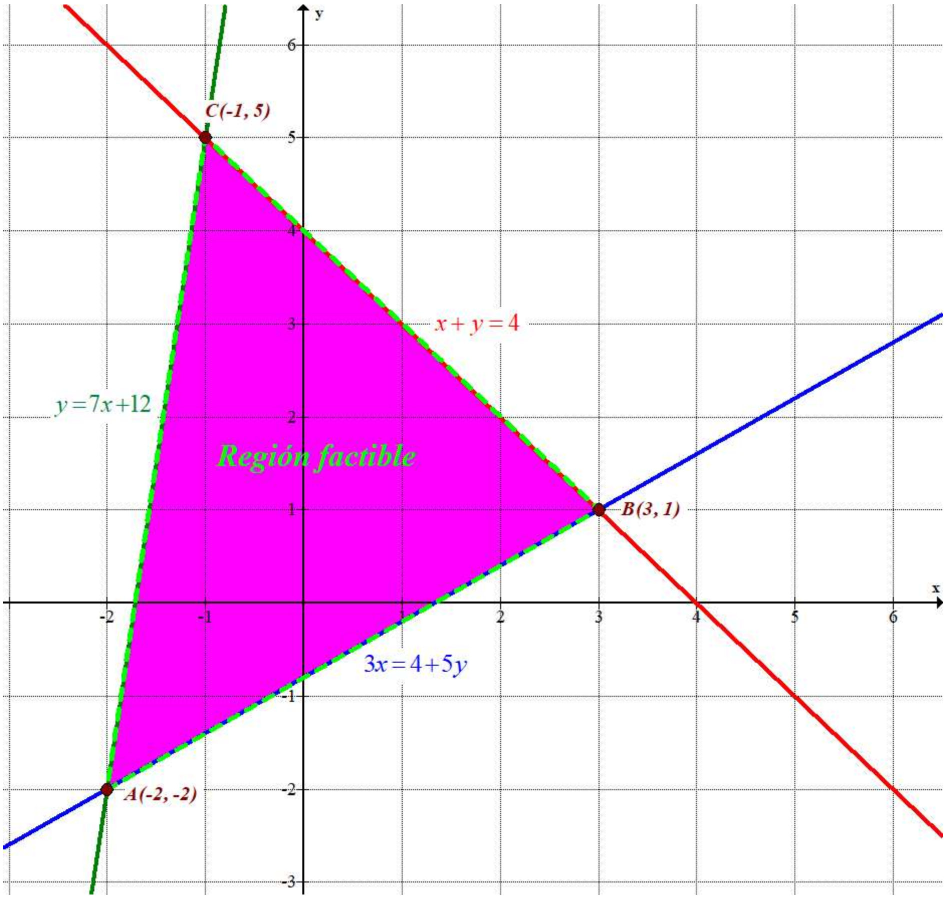


Como las inecuaciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 4 \\ 3x\le 4+5y \\ y\le 7x+12 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto P(0, 0) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

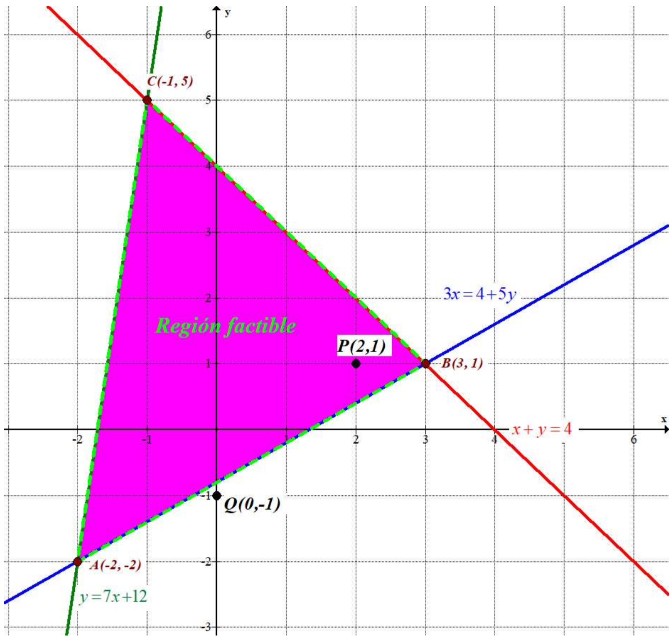
$$\left.\begin{array}{l} 0+0\leq 4 \\ 3\cdot 0\leq 4+5\cdot 0 \\ 0\leq 7\cdot 0+12 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(–2, –2), B(3, 1) y C(–1, 5).

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.



Se observa que el punto P(2, 1) si pertenece a la región factible y el punto Q(0, –1) está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x,y)=6x-10y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

A(–2, –2) → $f(-2,-2)=6(-2)-10(-2)=8$

B(3, 1) → $f(3,1)=6\cdot 3-10\cdot 1=8$

C(–1, 5) → $f(-1,5)=6(-1)-10\cdot 5=-56$ ¡*Mínimo*!

El valor mínimo es –56 y se alcanza en el punto C(–1, 5).
El valor máximo es 8 y se alcanza en los punto A(–2, –2) y B(3, 1). Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AB}$.

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y-4 \qquad x+y \leq 8 \qquad 3x+2y \geq -2 \qquad x-2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x,y)=2x-4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

2.2.1. Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x = y-4$

x	$y=x+4$
–2	2
0	4
2	6

$x+y=8$

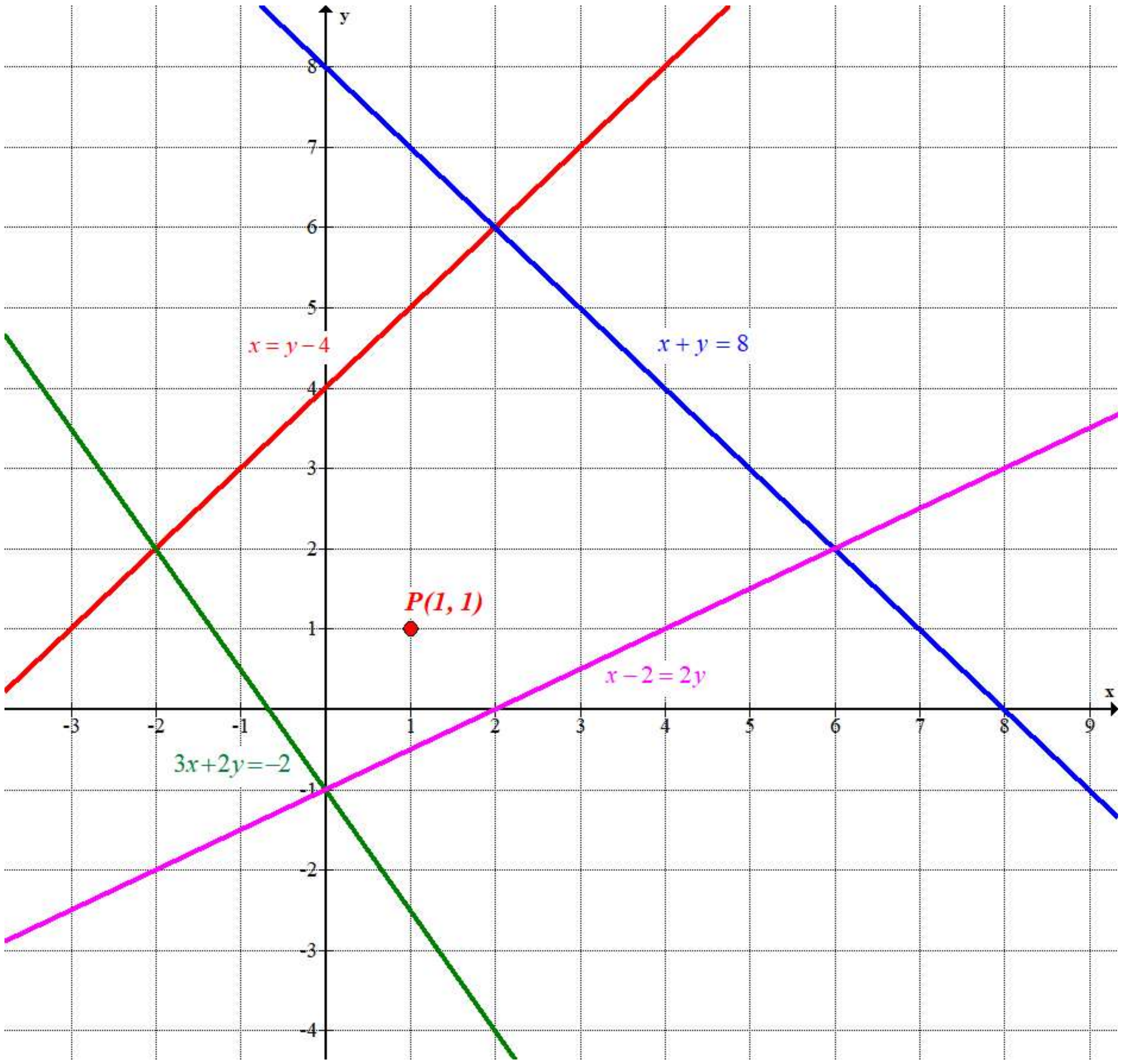
x	$y=8-x$
2	6
6	2
8	0

$3x+2y=-2$

x	$y=\frac{-2-3x}{2}$
–2	2
0	–1
2	–4

$x-2=2y$

x	$y=\frac{x-2}{2}$
0	–1
2	0
6	2

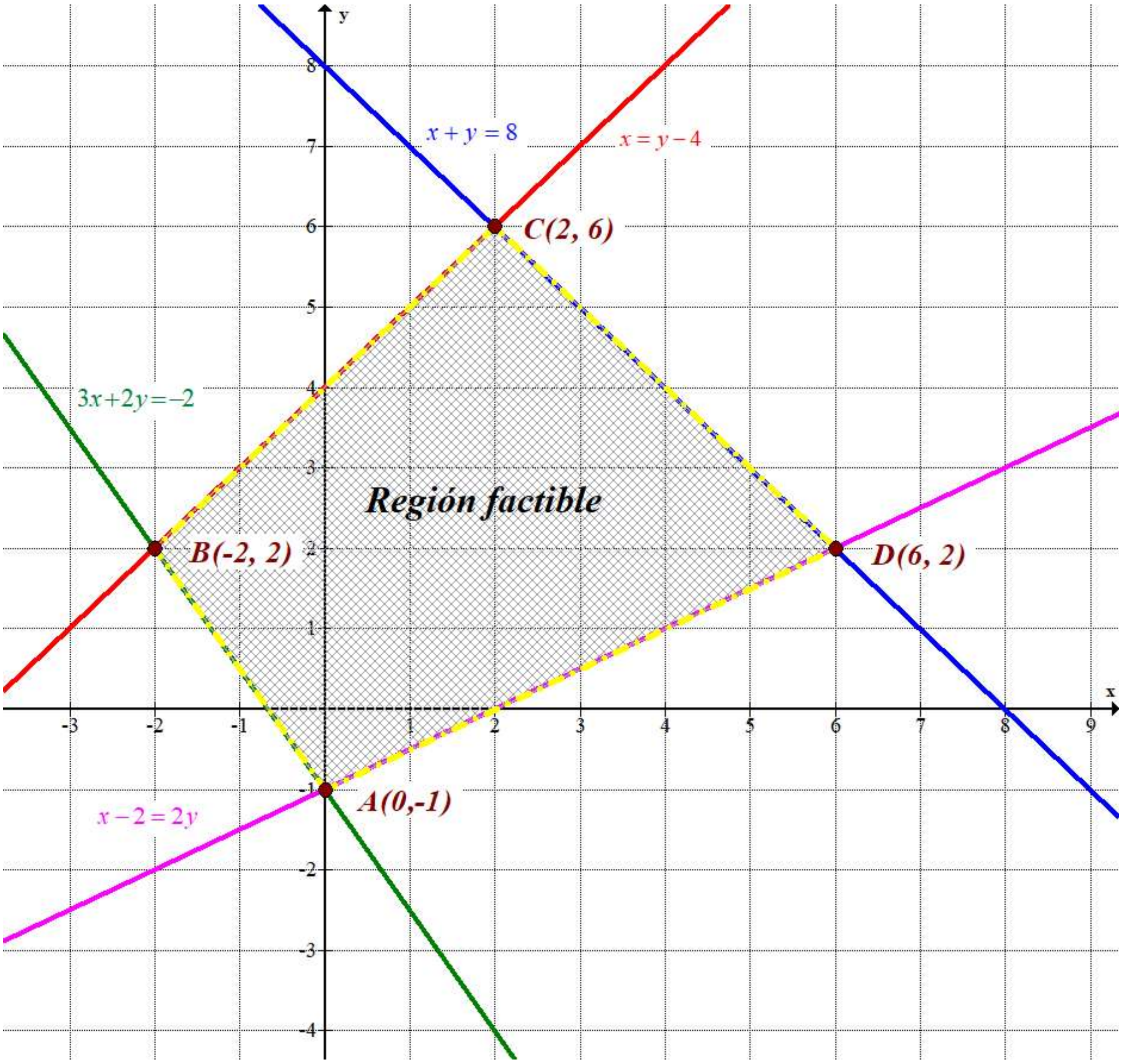


Como las inecuaciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq y-4 \\ x+y \leq 8 \\ 3x+2y \geq -2 \\ x-2 \leq 2y \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas azul y roja y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

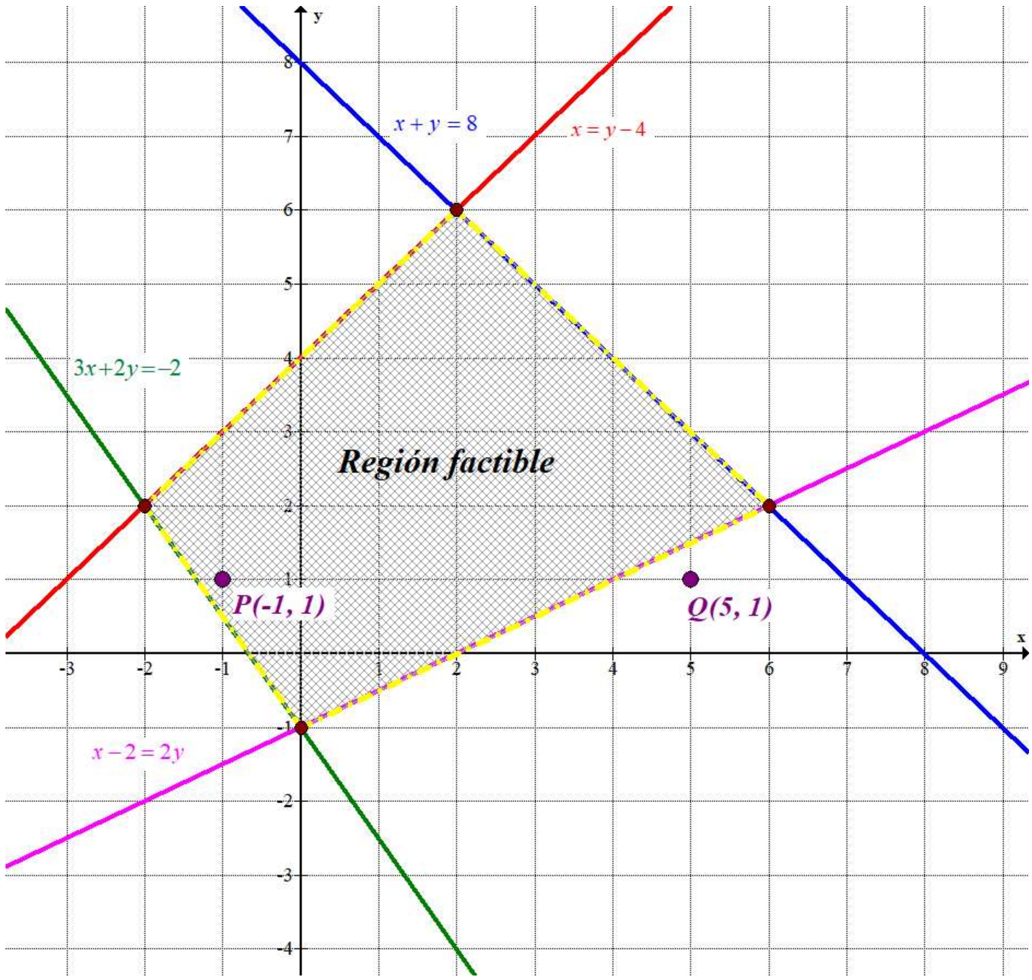
$$\left.\begin{array}{l} 1 \geq 1-4 \\ 1+1 \leq 8 \\ 3+2 \geq -2 \\ 1-2 \leq 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \geq -3 \\ 2 \leq 8 \\ 5 \geq -2 \\ -1 \leq 2 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, –1), B(–2, 2), C(2, 6) y D(6, 2).

2.2.2. Colocamos los puntos P y Q en el dibujo superior y comprobamos si pertenecen a la región factible o no.



Se observa que el punto P(–1, 1) si pertenece y el punto Q(5, 1) está situado fuera de la región factible.

2.2.3. Valoramos la función $f(x,y)=2x-4y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

A(0, –1) → $f(0,-1)=2\cdot 0-4(-1)=4$ Máximo

B(–2, 2) → $f(-2,2)=2(-2)-4\cdot 2=-12$

C(2, 6) → $f(2,6)=2\cdot 2-4\cdot 6=-20$ Mínimo

D(6, 2) → $f(6,2)=2\cdot 6-4\cdot 2=4$ Máximo

El valor mínimo es –20 y se alcanza en el punto C(2, 6).
El valor máximo es 4 y se alcanza en los punto A(0, –1) y en D(6, 2). Por lo que el valor máximo se alcanza también en cualquier punto del segmento $\overline{AD}$. Además de los puntos A y D se alcanza en infinitos puntos, por ejemplo, en (2, 0), (4, 1), …etc.

SOLUCIONES

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.

b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.

c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.

d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

a) Llamamos "x" al número de armarios A producidos e "y" al número de armarios B. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de construcción	Horas de pintura	Beneficio
Armarios A (x)	3x	4x	200x
Armarios B (y)	6y	2y	300y
TOTAL	$3x+6y$	$4x+2y$	$200x+300y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=200x+300y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura → $3x+6y\leq 60;\ 4x+2y\leq 32$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 3x+6y\leq 60 \\ 4x+2y\leq 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ x+2y\leq 20 \\ 2x+y\leq 16 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

$x\geq 0;\ y\geq 0$

El primer cuadrante

$x+2y=20$

x	$y=\dfrac{20-x}{2}$
0	10
4	8
20	0

$2x+y=16$

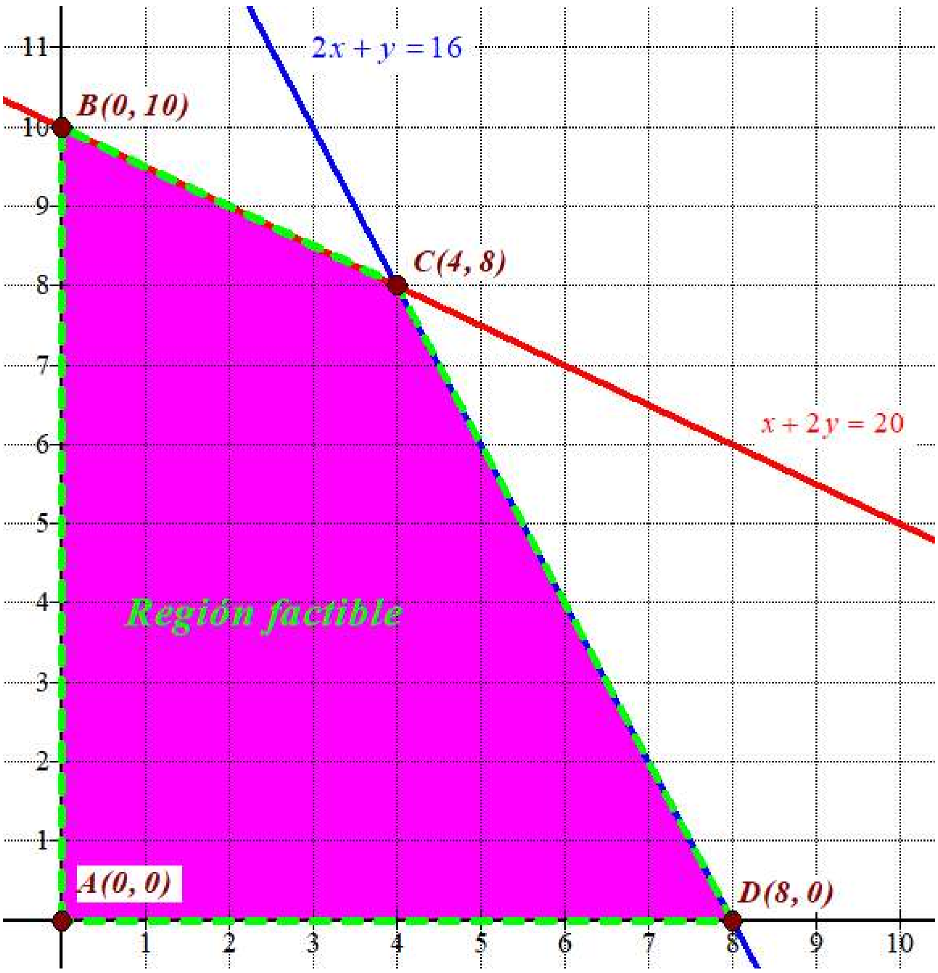
x	$y=16-2x$
0	16
4	8
8	0

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \geq 0;\ 2 \geq 0 \\ 2 + 2 \cdot 2 \leq 20 \\ 2 \cdot 2 + 2 \leq 16 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.



c) Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 10), C(4, 8) y D(8, 0).

d) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=200x+300y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 10) → $B(0,10)=200\cdot 0+300\cdot 10=3000$

C(4, 8) → $B(4,8)=200\cdot 4+300\cdot 8=3200$ *Máximo*

D(8, 0) → $B(8,0)=200\cdot 8+300\cdot 0=1600$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(4, 8).
El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación y venta de 4 armarios tipo A y 8 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 3200 €.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.
a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

a) Llamamos "x" al número de metros que se compra al distribuidor A e "y" al número de metros de tela que se compra al distribuidor B.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700" → $200 \leq x \leq 700;\ 200 \leq y \leq 700$.
"La fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros" → $x + y \geq 600$.
"La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B" → $x \leq 2y$.
Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$$

La función que queremos minimizar son los costes: $C(x, y) = 2x + 3y$.

b) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 600$

x	$y = 600 - x$
0	600
400	200
600	0

$x = 2y$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
200	100
400	200

$x = 200$

$x = 200$	y
200	0
200	200
200	400

$x = 700$

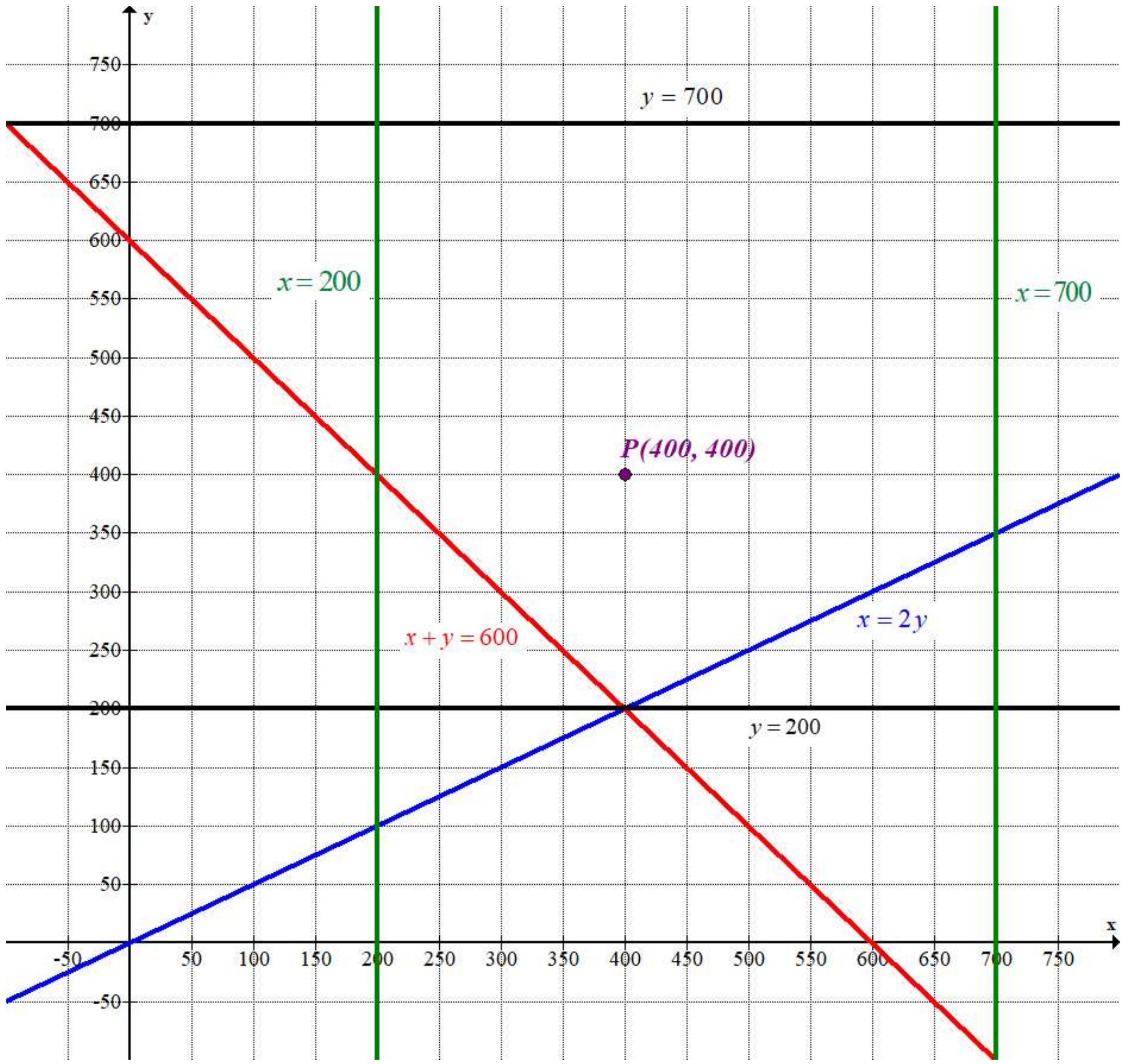
$x = 700$	y
700	0
700	200
700	300

$y = 200$

x	$y = 200$
0	200
100	200
400	200

$y = 700$

x	$y = 700$
0	700
100	700
400	700

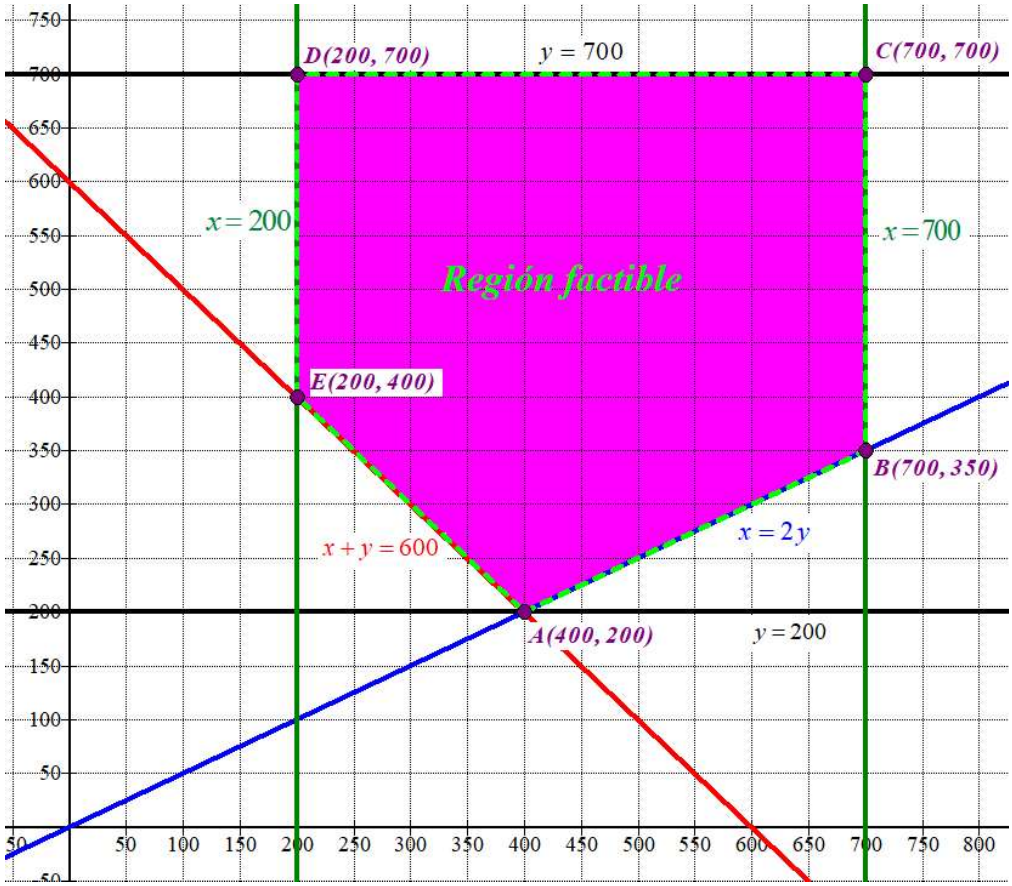


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 200 \leq x \leq 700 \\ 200 \leq y \leq 700 \\ x + y \geq 600 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada entre las rectas verticales verdes y las rectas horizontales negras, por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(400, 400) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \leq 400 \leq 700 \\ 200 \leq 400 \leq 700 \\ 400 + 400 \geq 600 \\ 400 \leq 2 \cdot 400 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(400, 200), B(700, 350), C(700, 700). D(200, 700) y E(200, 400).

c) Valoramos la función costes $C(x,y)=2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(400, 200) → $C(400,200)=2\cdot 400+3\cdot 200=1400$ ¡Mínimo!

B(700, 350) → $C(700,350)=2\cdot 700+3\cdot 350=2450$

C(700, 700) → $C(700,700)=2\cdot 700+3\cdot 700=3500$

D(200, 700) → $C(200,700)=2\cdot 200+3\cdot 700=2500$

E(200, 400) → $C(200,400)=2\cdot 200+3\cdot 400=1600$

El coste mínimo es 1400 € y se alcanza en el punto A(400, 200) que significa comprar 400 metros de tela al distribuidor A y 200 al distribuidor B.

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$x+2y \le 40 \qquad x+y \ge 5 \qquad 3x+y \le 45 \qquad x \ge 0$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x,y)=2x-3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

a) Representamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=40$

x	$y=\frac{40-x}{2}$
0	20
10	15
40	0

$x+y=5$

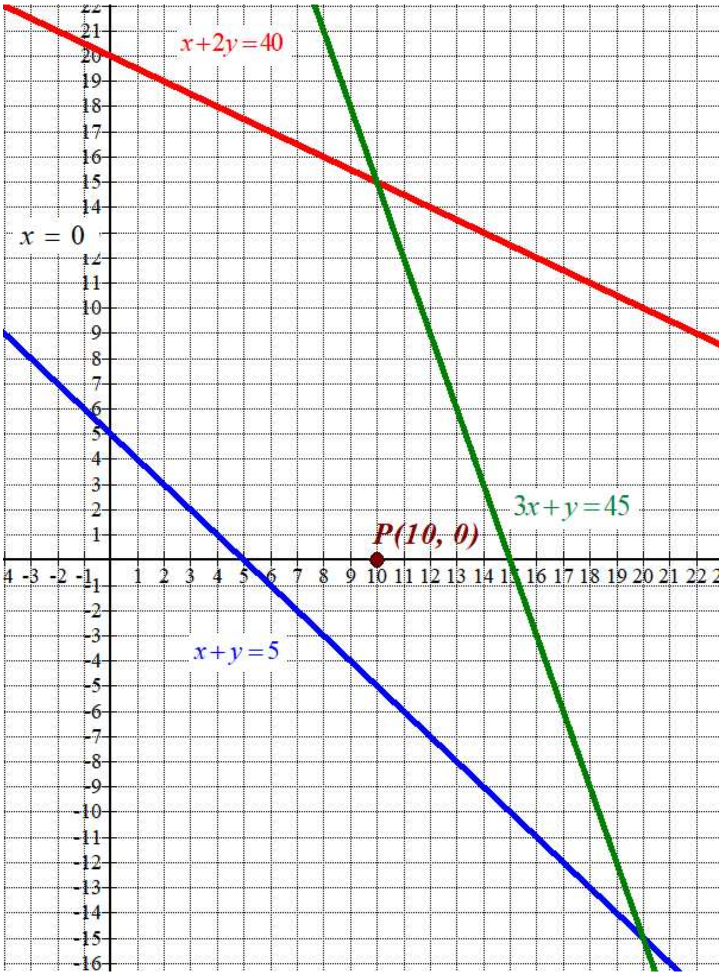
x	$5-x$
0	5
5	0
20	-15

$3x+y=45$

x	$y=45-3x$
0	45
10	15
20	-15

$x=0$

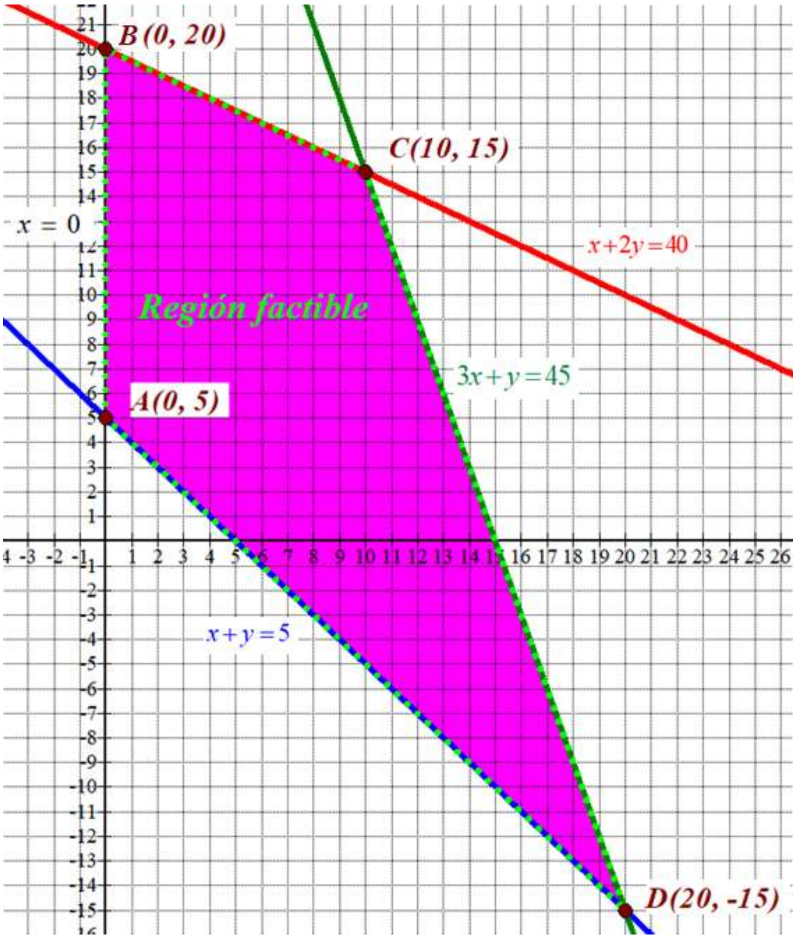
$x=0$	y
0	0
0	5
0	20



Como las inecuaciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 40 \\ x+y\ge 5 \\ 3x+y\le 45 \\ x\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha del eje OY, por encima de la recta azul y por debajo de las rectas verde y roja. Comprobamos que el punto P(10, 0) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+2\cdot 0\leq 40 \\ 10+0\geq 5 \\ 3\cdot 10+0\leq 45 \\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices.



Los vértices de la región factible son los puntos A(0, 5), B(0, 20), C(10, 15) y D(20, -15).

b) Valoramos la función $f(x,y)=2x-3y$ en cada uno de los vértices en busca de los valores máximo y mínimo.

A(0, 5) → $f(0,5)=2\cdot 0-3\cdot 5=-15$

B(0, 20) → $f(0,20)=2\cdot 0-3\cdot 20=-60$ ¡Mínimo!

C(10, 15) → $f(10,15)=2\cdot 10-3\cdot 15=-25$

D(20, -15) → $f(20,-15)=2\cdot 20-3\cdot(-15)=85$ ¡Máximo!

El valor mínimo es –60 y se alcanza en el punto B(0, 20) y el valor máximo es 85 y se alcanza en el punto D(20, –15).

EJERCICIO 2. Álgebra. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados. **a)** Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. **b)** Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices. **c)** Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuántas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

a) Llamamos x = número de plantas A, y = número de plantas B.

Resumimos los datos en una tabla.

	Costes mensuales	Nº empleados	Beneficio
Nº plantas A (x)	1000x	8x	24000x
Nº plantas B (y)	2000y	4y	20000y
	$1000x+2000y$	$8x+4y$	$24000x+20000y$

Las restricciones son:

"*El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B*" → $x \leq 2y$

"L*os costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados*" → $1000x+2000y \leq 42000$; $8x+4y \leq 120$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ 1000x+2000y \leq 42000 \\ 8x+4y \leq 120 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ x+2y \leq 42 \\ 2x+y \leq 30 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
2	1
12	6

$x+2y=42$

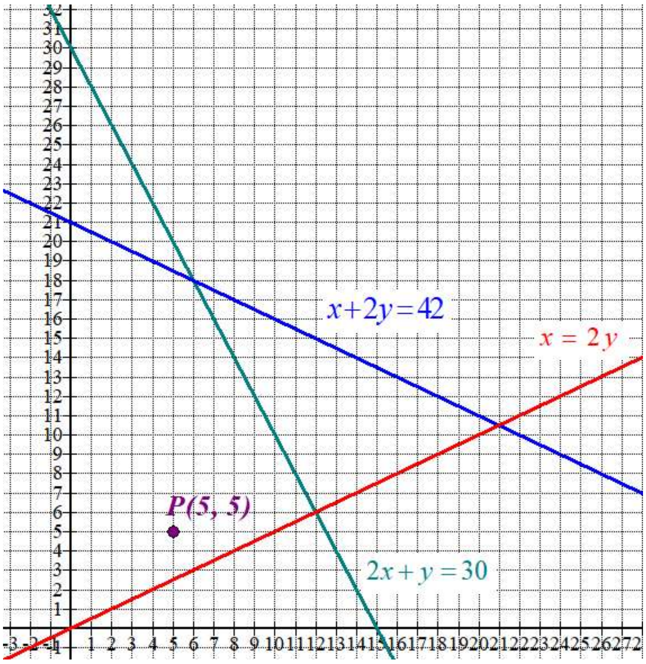
x	$y=\frac{42-x}{2}$
0	21
6	18
42	0

$2x+y=30$

x	$y=30-2x$
0	30
6	18
12	6
15	0

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

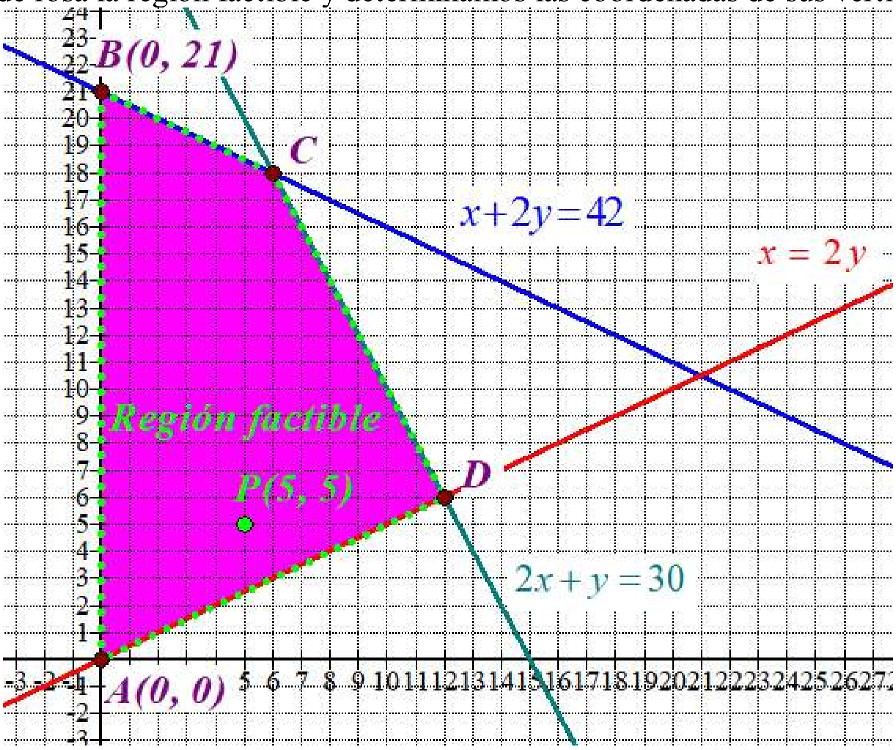


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{r} x \le 2y \\ x+2y \le 42 \\ 2x+y \le 30 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y verde, y por encima de la roja.

Comprobamos que el punto P(5, 5) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 5 \le 2\cdot 5 \\ 5+2\cdot 5 \le 42 \\ 2\cdot 5+5 \le 30 \\ 5 \ge 0;\ 5 \ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=30 \\ x+2y=42 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=30-2x \\ x+2y=42 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2(30-2x)=42 \Rightarrow x+60-4x=42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x=-18 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=30-12=18 \Rightarrow C(6,18)$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2y \\ 2x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2y+y=30 \Rightarrow 5y=30 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x=2\cdot 6=12 \Rightarrow D(12,6)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 21); C(6, 18) y D(12, 6).

c) La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=24000x+20000y$$

Valoramos la función objetivo en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $B(0,0)=0$

B(0, 21) → $B(0,21)=0+420000=420\,000$

C(6, 18) → $B(6,18)=24000\cdot 6+20000\cdot 18=504\,000$ ¡*Máximo*!

$D(12,6)$ → $B(12,6)=24000\cdot 12+20000\cdot 6=408\,000$

El máximo beneficio es de 504 000 € y se produce en el vértice C (6, 18) que significa 6 plantas de producción A y 18 de B.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla en dos calidades distintas: calidad A, carcasa de plástico y calidad A^+ carcasa de aluminio. El coste unitario de producción es de 70 € para los teléfonos de calidad A y de 90 € para los de calidad A^+. Los precios de venta son de 100 € para los de clase A y de 150 € para los de clase A^+. Si para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio

a) Plantee el problema que determina el número de teléfonos móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Determine una solución óptima y halle el valor óptimo de la función objetivo.

a) Llamamos x = número de móviles calidad A, y = número de móviles calidad A^+.

El beneficio que se obtiene por cada móvil de calidad A es de 100 – 70 = 30 € y por cada uno de calidad A^+ es de 150 – 90 = 60 €.
La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=30x+60y$$

Las restricciones son:

"*La empresa dispone de un capital de 30.000 euros*" → $70x+90y\le 30000$

"S*u proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles)* → $x+y\le 350$

"S*u proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 310 carcasas de aluminio*" → $y\le 310$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r}70x+90y\le 30000\\ x+y\le 350\\ y\le 310\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7x+9y\le 3000\\ x+y\le 350\\ y\le 310\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$7x+9y=3000$

x	$y=\dfrac{3000-7x}{9}$
0	200
75	275
100	0

$x+y=350$

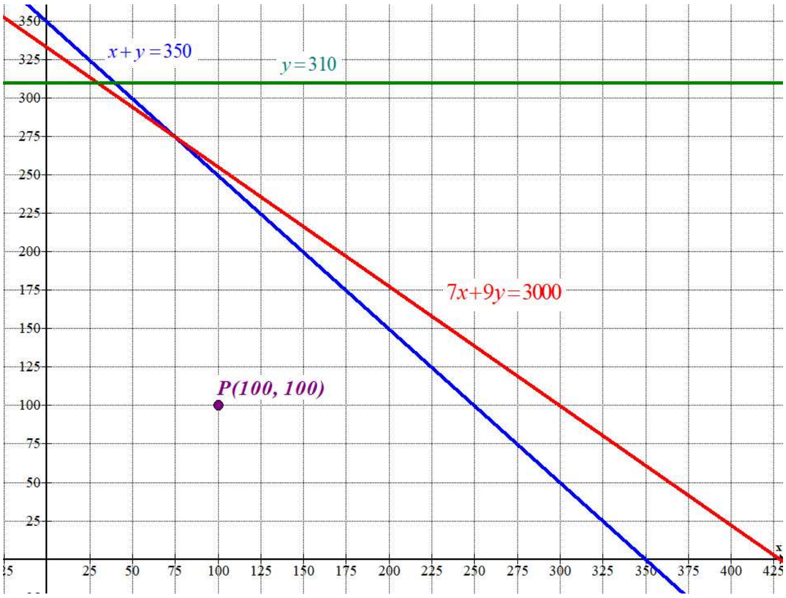
x	$y=350-x$
0	350
75	275
350	0

$y=310$

x	$y=310$
0	310
50	310

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

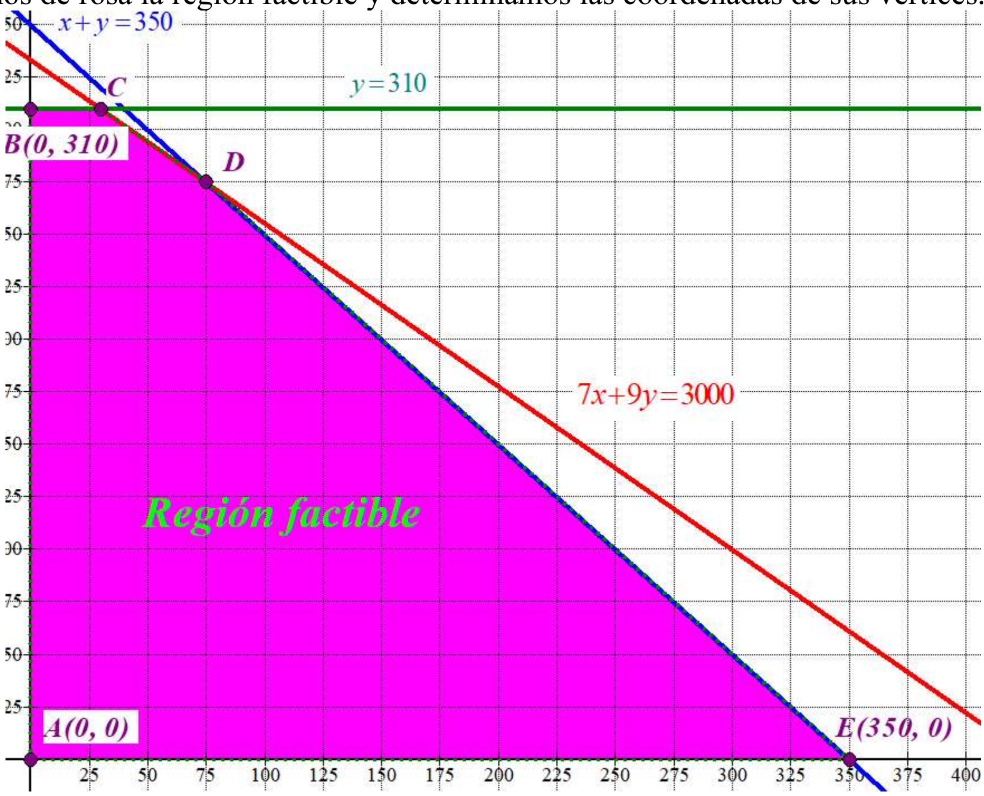


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{r} 7x+9y\leq 3000 \\ x+y\leq 350 \\ y\leq 310 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto P(100, 100) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 700+900\leq 3000 \\ 100+100\leq 350 \\ 100\leq 310 \\ 100\geq 0;100\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 310 \\ 7x + 9y = 3000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7x + 2790 = 3000 \Rightarrow 7x = 210 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow C(30, 310)$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7x + 9y = 3000 \\ x + y = 350 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 7x + 9y = 3000 \\ y = 350 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7x + 9(350 - x) = 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 3150 - 9x = 3000 \Rightarrow -2x = -150 \Rightarrow x = \frac{150}{2} = 75 \Rightarrow 7 = 350 - 75 = 275 \Rightarrow D(75, 275)$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 310); C(30, 310), D(75, 275) y E(350, 0).

c) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 30x + 60y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $B(0,0) = 0$
B(0, 310) → $B(0,310) = 0 + 18600 = 18600$
C(30, 310) → $B(30,310) = 900 + 18600 = 19500$ ¡Máximo!
$D(75,275)$ → $B(75,275) = 2250 + 16500 = 18750$
E(350, 0) → $B(350,0) = 10500 + 0 = 10500$

El máximo beneficio es de 19500 € y se produce en el vértice C (30, 310) que significa comprar 30 móviles calidad A y 310 calidad A^+.

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €
a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.
b) Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.
c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

a) Llamamos x = número de motores para motos, y = número de motores para coches.

Hacemos una tabla para organizar la información.

	Tiempo en trabajo manual	Tiempo en trabajo de máquina	Beneficio
Nº motores de moto (x)	$60x$	$20x$	$1500x$
Nº de motores de coche (y)	$45y$	$40y$	$2000y$
TOTAL	$60x+45y$	$20x+40y$	$1500x+2000y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios que vienen expresados como:

$$B(x,y)=1500x+2000y$$

Las restricciones son:

"*la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina*" → $60x+45y\le 120\cdot 60=7200;\quad 20x+40y\le 90\cdot 60=5400$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r}60x+45y\le 7200\\20x+40y\le 5400\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+3y\le 480\\x+2y\le 270\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+3y=480$

x	$y=\dfrac{480-4x}{3}$
0	160
30	120
120	0

$x+2y=270$

x	$y=\dfrac{270-x}{2}$
0	135
30	120
270	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

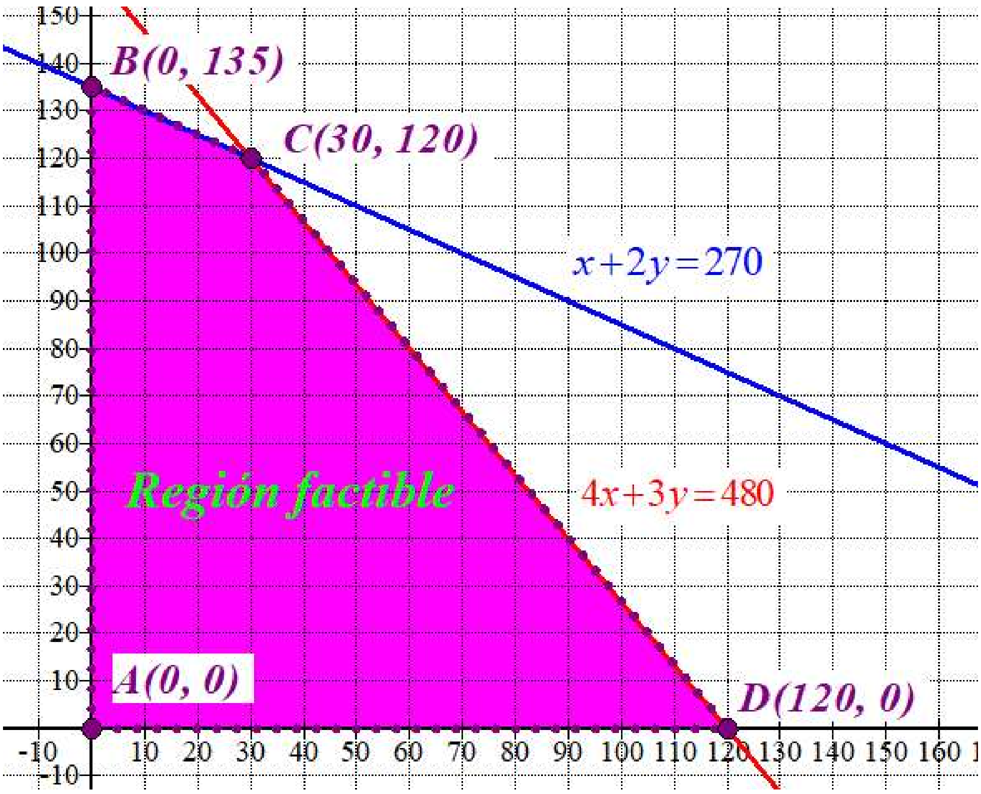
Primer cuadrante

Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{r} 4x+3y\leq 480 \\ x+2y\leq 270 \\ x\geq 0;\, y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(50, 50) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 200+150\leq 480 \\ 50+100\leq 270 \\ 50\geq 0;\, 50\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 135); C(30, 120) y D(120, 0).

c) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=1500x+2000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $B(0,0)=0$

B(0, 135) → $B(0,135)=0+270000=270.000$

C(30, 120) → $B(30,120)=45000+240000=$ 285.000 ¡Máximo!

D(120, 0) → $B(120,0)=180000+0=180.000$

El máximo beneficio es de 285.000 € y se produce en el vértice C (30, 120) que significa ensamblar mensualmente 30 motores de moto y 120 de coche.

EJERCICIO 2. Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.
Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg
a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas.
b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos?
c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

a) Llamamos x = número de toneladas de jurel, y = número de toneladas de caballa.

Los ingresos vienen expresados por la función: $I(x,y)=5000x+6000y$

Las restricciones son:

"Las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas" → $x+y\leq 30$

"La cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa" → $x\leq 3y$

"La cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm" → $y\leq 18$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x\leq 3y \\ x+y\leq 30 \\ y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=3y$

x	$y=\frac{x}{3}$
0	0
3	1
18	6

$x+y=30$

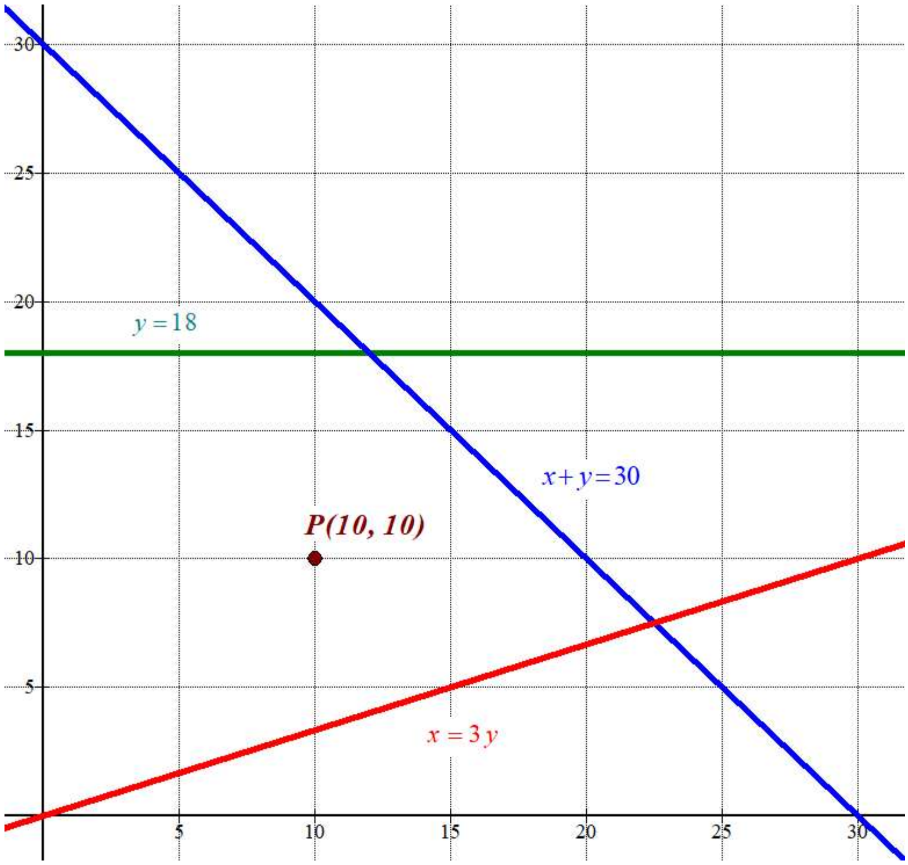
x	$y=30-x$
0	30
12	18
30	0

$y=18$

x	$y=18$
0	18
12	18
20	18

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

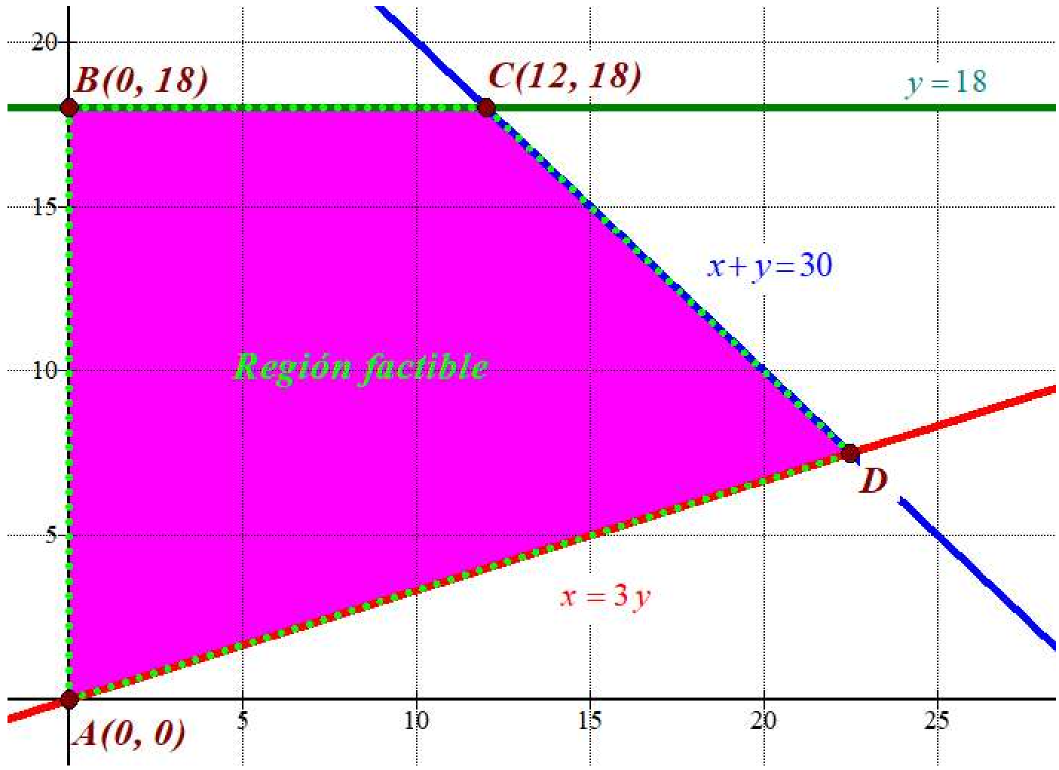


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{r} x \leq 3y \\ x+y \leq 30 \\ y \leq 18 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y verde, y por encima de la roja.

Comprobamos que el punto P(10, 10) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 10 \leq 30 \\ 10+10 \leq 30 \\ 10 \leq 18 \\ 10 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=18 \\ x+y=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+18=30 \Rightarrow x=12 \Rightarrow \boxed{C(12,18)}$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3y \\ x+y=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y+y=30 \Rightarrow 4y=30 \Rightarrow y=\frac{30}{4}=7.5 \Rightarrow x=3\cdot 7.5=22.5 \Rightarrow \boxed{D(22.5,7.5)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 18); C(12, 18) y D(22.5, 7.5).

Valoramos la función objetivo $I(x,y)=5000x+6000y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $I(0,0)=0$

B(0, 18) → $I(0,18)=0+6000\cdot 18=108.000$

C(12, 18) → $I(12,18)=5000\cdot 12+6000\cdot 18=168.000$ ¡Máximo!

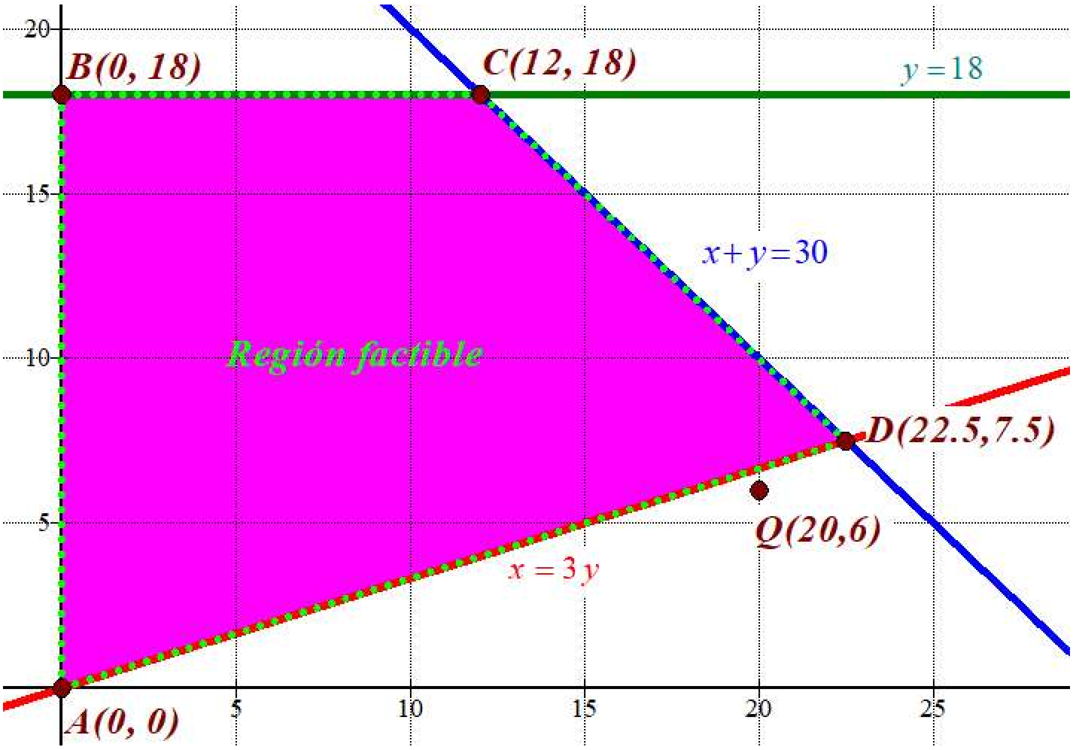
$D(22.5,7.5)$ → $I(22.5,7.5)=5000\cdot 22.5+6000\cdot 7.5=157.500$

Los ingresos máximos son de 168.000 € y se produce en el vértice C (12, 18) que significa capturar 12 toneladas de jurel y 18 toneladas de caballa.

c) Los valores proporcionados corresponden con el punto Q(20, 6). Comprobamos si cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{matrix} 20 \leq 3\cdot 6 \\ 20+6 \leq 30 \\ 6 \leq 18 \\ 20 \geq 0;\ 6 \geq 0 \end{matrix}\right\} \text{No se cumplen todas las normas sobre cuotas pesqueras.}$$

También se puede comprobar visualmente que el punto Q(20, 6) no pertenece a la región factible.



MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

EXERCICIO 2. Álxebra.

Consideramos o seguinte sistema de inecuacións:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente graficamente a rexión factible e calcule os seus vértices.

b) Determine o punto ou puntos desa rexión onde a función $f(x,y) = x - y$ alcanza os seus valores máximo e mínimo. **c)** Determine eses valores máximo e mínimo.

a) **Inecuacións**:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

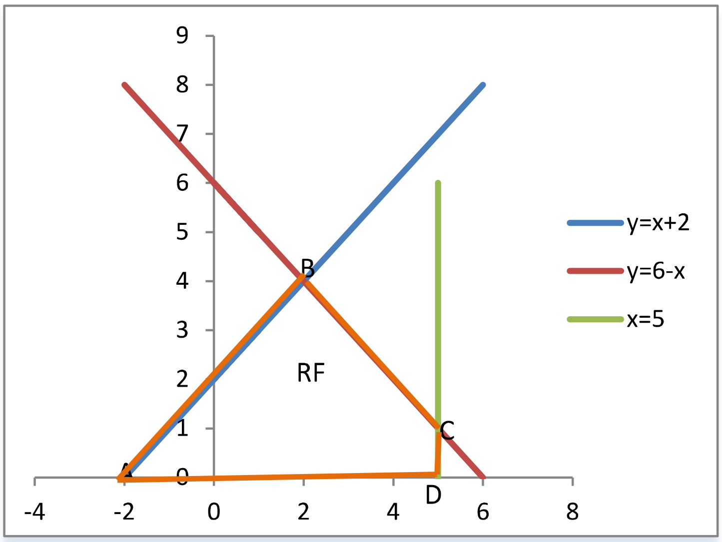
Vértices

A: $\left.\begin{matrix} y=0 \\ y=x+2 \end{matrix}\right\} A(-2,0)$

B: $\left.\begin{matrix} y=x+2 \\ x+y=6 \end{matrix}\right\} B(2,4)$

C: $\left.\begin{matrix} x=5 \\ x+y=6 \end{matrix}\right\} C(5,1)$

D: $\left.\begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix}\right\} D(5,0)$



b) **f(x, y) = x-y**

Avaliamos a función **f(x, y)** nos vértices

f(A) =f (-2, 0)= **-2**

f(B) = f (2, 4)= **-2**

f(C) = f (5,1) = 4

f(D) = f (5, 0) **=5**

A función **f(x,y)** alcanza un **mínimo** en tódolos puntos do **segmento que une os vértices A(-2,0) e B(2,4)** e alcanza un **máximo no vértice D(5,0).**

c) Min f(x,y)=f(-2,0)=**-2**

Máx f(x,y)=f(5,0)=**5**

EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.
a) Plantee el problema para maximizar los ingresos.
b) Represente gráficamente el conjunto de soluciones.
c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

a) Llamamos "x" al número de empresas como clientes e "y" al número de clientes particulares.

Planteamos las restricciones como inecuaciones.

"*Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes*" → $x \geq 25$

"*El número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas*" → $y \geq 2x$

"*Tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales*" → $x + y \leq 120$

Juntamos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \end{array}\right\}$$

Deseamos maximizar los ingresos que vienen dados en función del número de clientes con la expresión $I(x, y) = 386x + 229y$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región del plano que contiene a los puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x = 25$

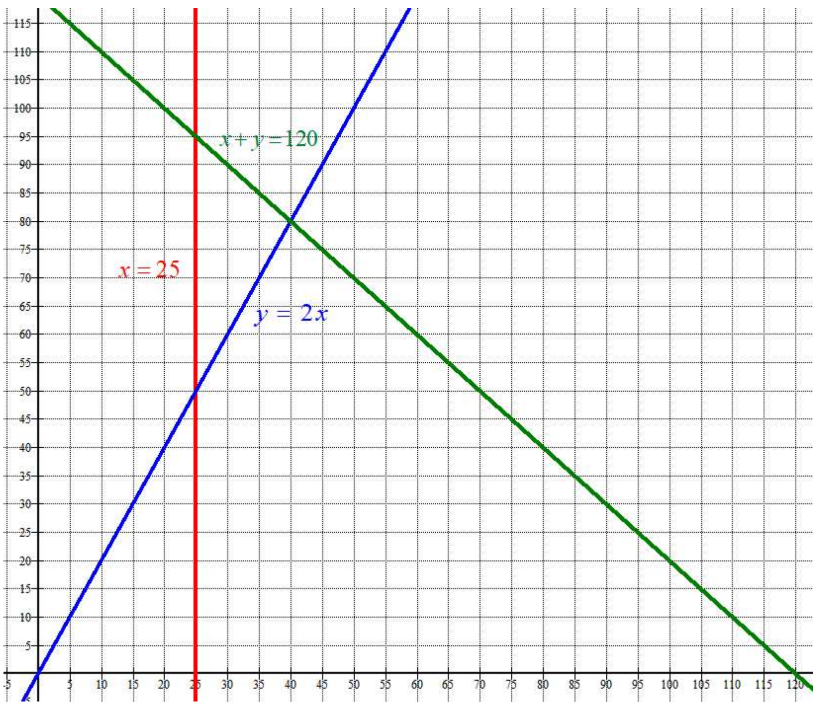
$x = 25$	y
25	0
25	10

$y = 2x$

x	$y = 2x$
25	50
40	80

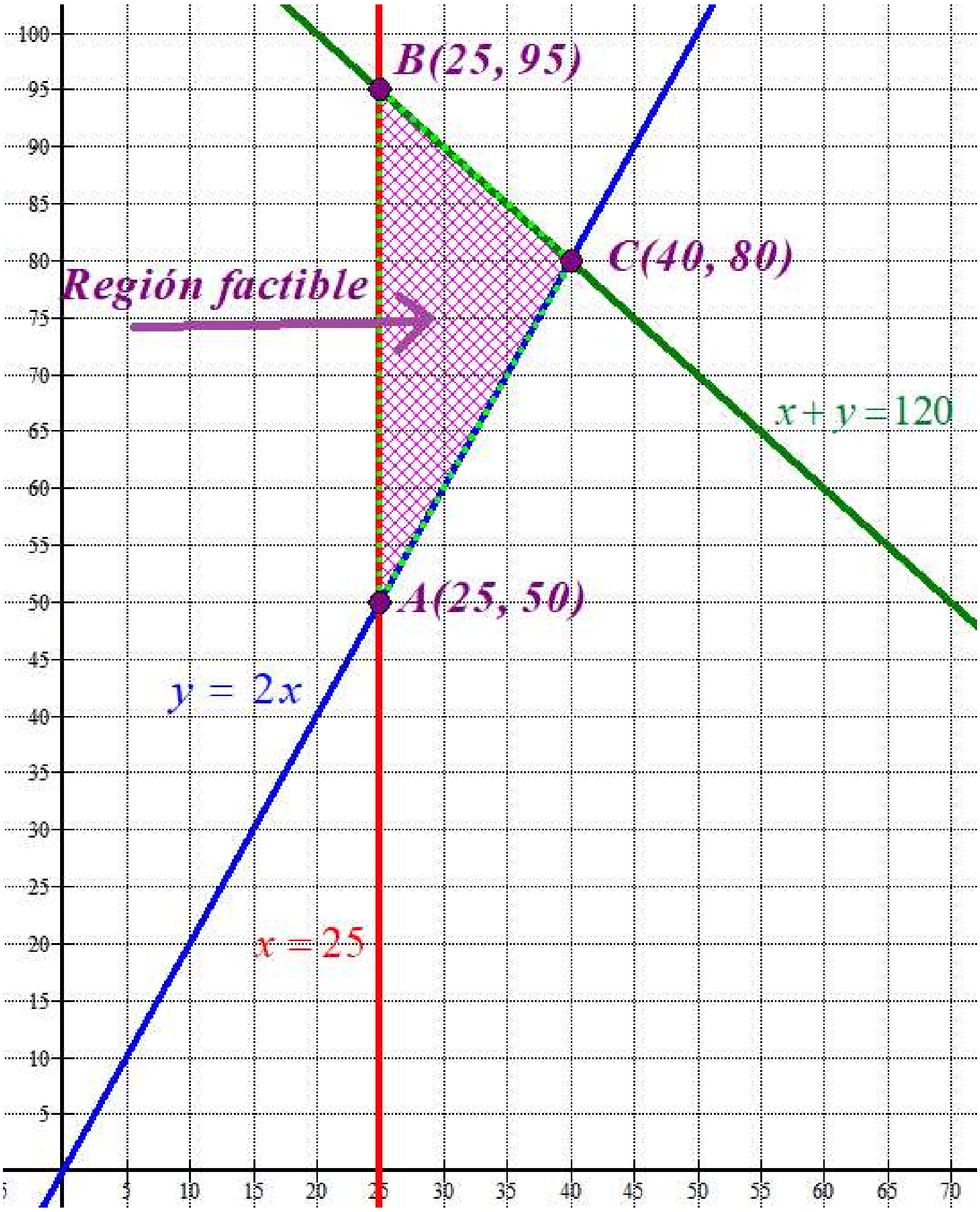
$x + y = 120$

x	$y = 120 - x$
25	95
40	80



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{lcl} x \geq 25 & \rightarrow & \text{A la derecha} \\ y \geq 2x & \rightarrow & \text{Por encima} \\ x+y \leq 120 & \rightarrow & \text{Por debajo} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical roja, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo:



c) Valoramos la función ingresos $I(x,y) = 386x + 229y$ en cada vértice.

A(25, 50) → $I(25,50) = 21100$

B(25, 95) → $I(25,95) = 31405$

C(40, 80) → $I(40,80) = 33760$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 33760 € que se consiguen con 40 empresas y 80 clientes particulares.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

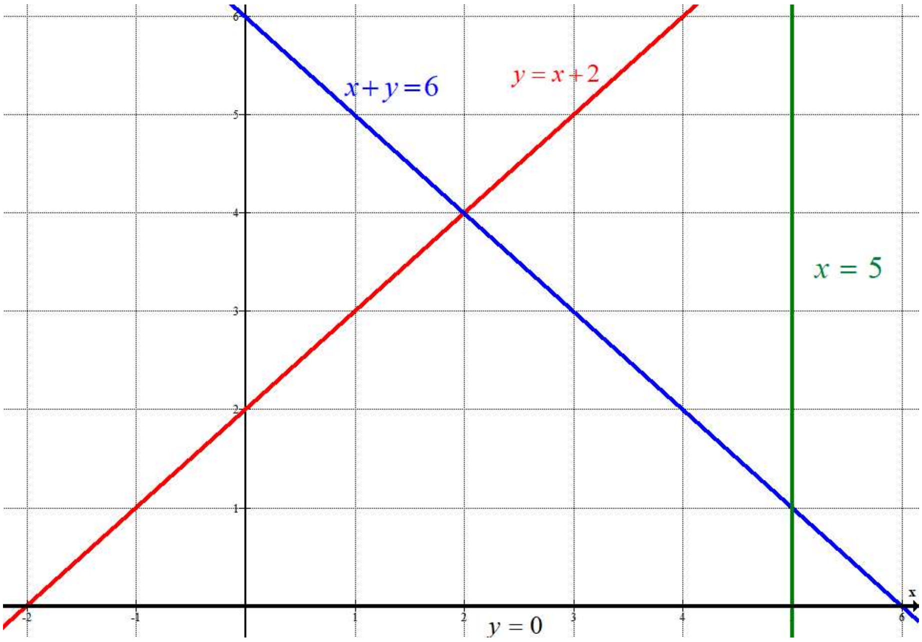
a) Representamos las rectas que delimitan la región.

$y = x+2$ $\qquad$ $x+y=6$ $\qquad$ $x=5$ $\qquad$ $y=0$

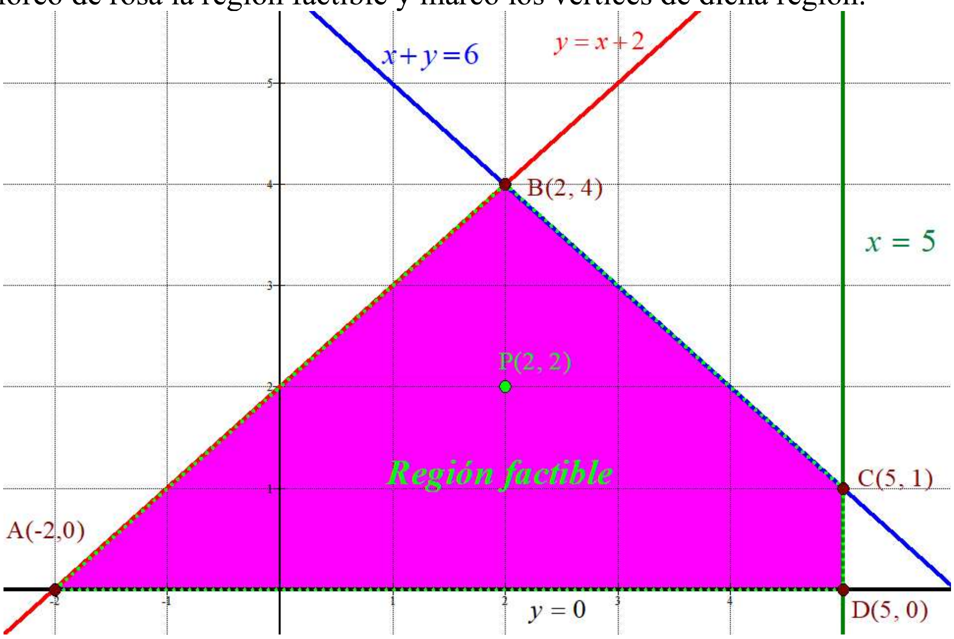
x	$y=x+2$
0	2
2	4
4	6

x	$y=6-x$
0	6
2	4
6	0

Recta vertical $\qquad$ Eje OX



Como las restricciones son $y \le x+2$ $\quad x+y \le 6$ $\quad x \le 5$ $\quad y \ge 0$ entonces la región está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta negra y a la izquierda de la recta verde. Coloreo de rosa la región factible y marco los vértices de dicha región.



Compruebo que el punto P(2,2) cumple las restricciones.

$2 \leq 2+2$ $\quad$ $2+2 \leq 6$ $\quad$ $2 \leq 5$ $\quad$ $2 \geq 0$ ¡Se cumplen todas! La región factible es correcta.

Los vértices son A(–2, 0), B(2, 4), C(5, 1) y D(5, 0).

b) Valoramos la función $f(x,y) = x - y$ en cada uno de los vértices y averiguamos el valor mínimo y máximo de la función.

A(–2,0) → $f(-2,0) = -2 - 0 = -2$

B(2, 4) → $f(2,4) = 2 - 4 = -2$

C(5, 1) → $f(5,1) = 5 - 1 = 4$

D(5, 0) → $f(5,0) = 5 - 0 = 5$

El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto D(5, 0) y el mínimo es –2 y se alcanza en toda el segmento AB, en los puntos A(–2,0), (–1, 1), (0,2),…, B(2,4).

c) El valor máximo es 5 y el mínimo es –2.

PREGUNTA 2. Álgebra. Un fabricante de sistemas de iluminación quiere producir focos de tecnología led en dos modelos distintos: A y B. Para diseñar la estrategia de producción diaria tendrá en cuenta que se producirán al menos 50 focos del modelo A, que el número de focos del modelo B no superará las 300 unidades y que se producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A. Además, la producción total no superará las 500 unidades diarias.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema.

b) Represente la región factible y calcule sus vértices.

c) Si el beneficio obtenido por cada foco del modelo A es de 60 euros y por cada foco del modelo B es de 40 euros, ¿cuántos focos de cada modelo debe producir diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?

a) Llamemos "x" al número de focos del tipo A e "y" al número de focos del tipo B.

"S*e producirán al menos 50 focos del modelo A*" → $x \geq 50$

"E*l número de focos del modelo B no superará las 300 unidades*" → $y \leq 300$

"S*e producirán al menos tantos focos del modelo B como del modelo A*" → $y \geq x$

"L*a producción total no superará las 500 unidades diarias*" → $x + y \leq 500$

Además las cantidades deben ser positivas → $y \geq 0$

Las restricciones planteadas en el problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 50 \\ y \leq 300 \\ y \geq x \\ x + y \leq 500 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitarán la región factible.

$x = 50$

$x = 50$	y
50	0
50	100

$y = 300$

x	$y = 300$
0	300
100	300

$x + y = 500$

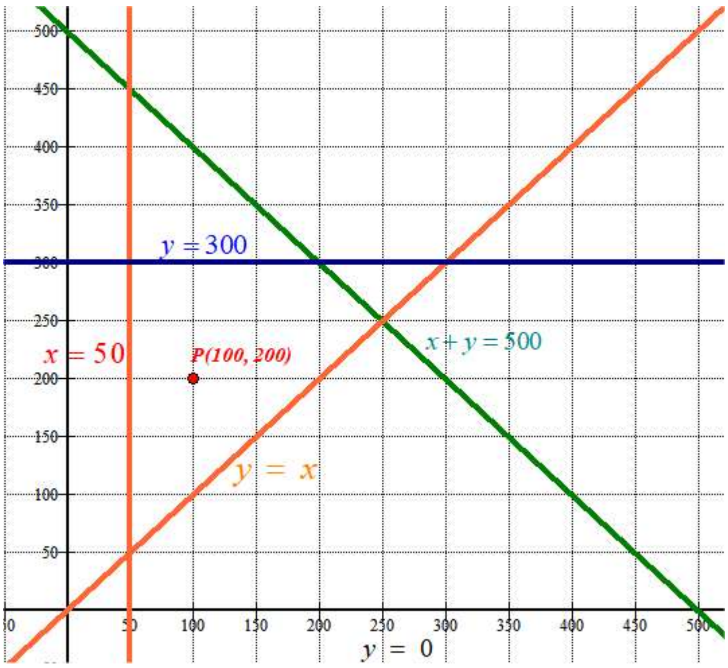
x	$y = 500 - x$
0	500
500	0

$y = x$

x	$y = x$
0	0
100	100

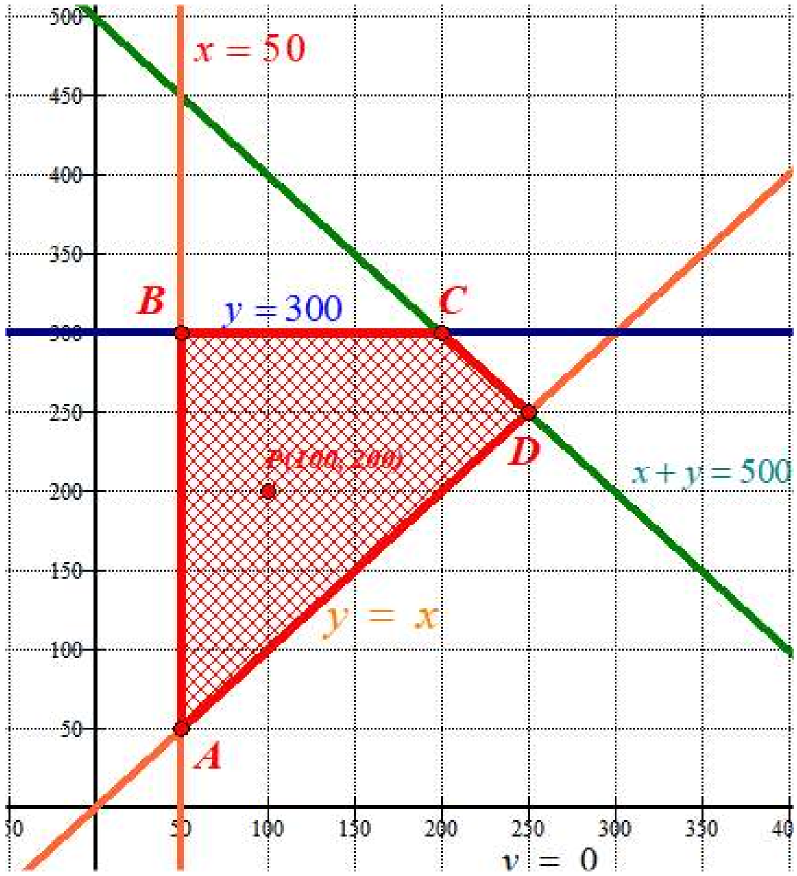
$y = 0$

x	$y = 0$
0	0
100	0



Probamos si el punto P(100, 200) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \geq 50 \\ 200 \leq 300 \\ 200 \geq 100 \\ 100+200 \leq 500 \\ 200 \geq 0 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas las restricciones, la región factible es la zona rayada.



Sus vértices tienen coordenadas: A(50,50), B(50, 300), C(200, 300) y D(250, 250).

c) La función beneficio es $B(x,y)=60x+40y$. La valoramos en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(50,50) → $B(50,50)=3000+2000=5000$

B(50, 300) → $B(50,300)=3000+12000=15000$

C(200, 300) → $B(200,300)=12000+12000=24000$

D(250, 250) → $B(250,250)=15000+10000=25000$

El máximo beneficio es de 25000 € y se obtiene produciendo 250 focos tipo A y otros 250 del tipo B.

PREGUNTA 2. Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.
a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

a) Llamamos "x" al número de habitaciones de tipo A e "y" al número de habitaciones tipo B. Las restricciones del problema las expresamos como inecuaciones.

"E*l número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A*" → $y \leq x$
"E*l número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160*" → $x \leq 160$
"E*n total serán necesarias como máximo 200 habitaciones*" → $x + y \leq 200$
Todos los valores son positivos → $x \geq 0;\ y \geq 0$

El conjunto de restricciones forman un sistema de inecuaciones que representaremos como una región del plano, región factible (donde se encuentra la solución del problema).

$$\left.\begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$y = x$

x	$y = x$
0	0
100	100

$x = 160$

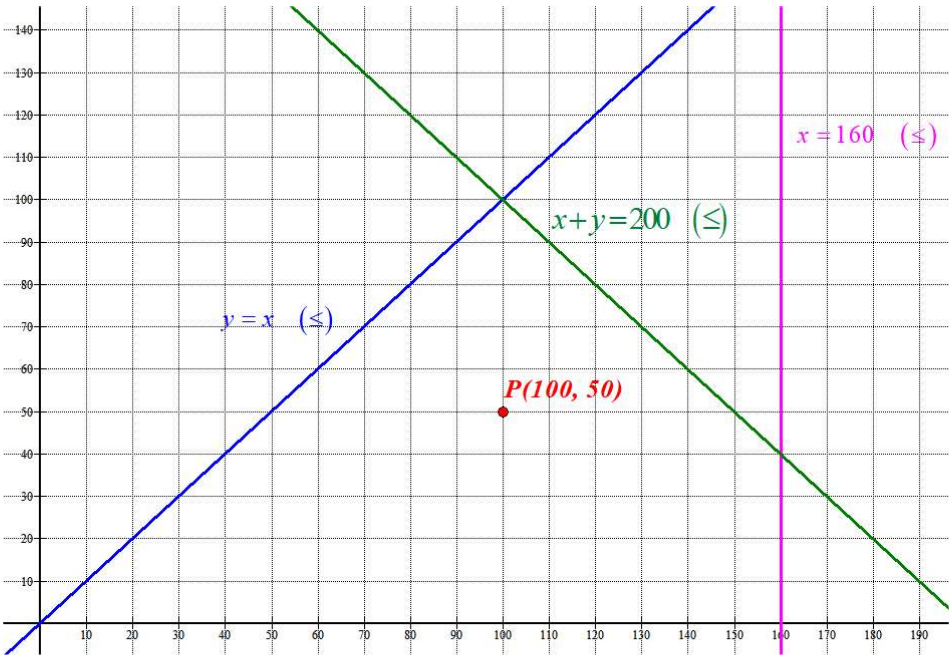
Recta vertical

$x + y = 200$

x	$y = 200 - x$
0	200
200	0

$x \geq 0;\ y \geq 0$

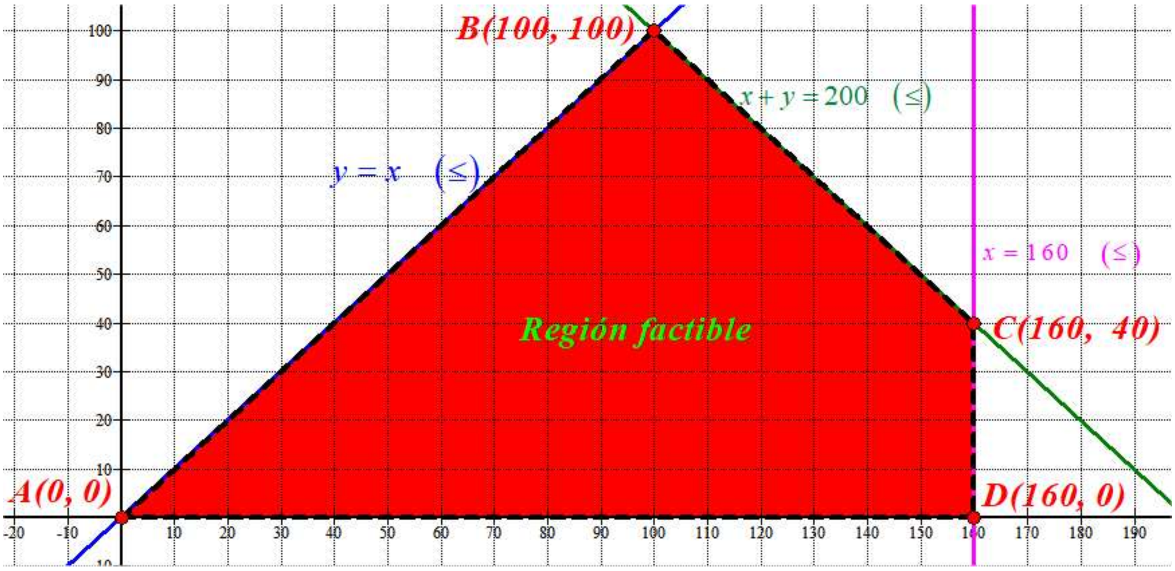
Primer cuadrante



Comprobamos que el punto P(100, 50) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \leq 100 \\ 100 \leq 160 \\ 100+50 \leq 200 \\ 100 \geq 0;\ 50 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas las restricciones}$$

La región factible es la región que contiene al punto P y delimitada por los ejes y las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo en la figura. Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones para determinar dichas coordenadas.



c) El coste del alojamiento es la función $C(x, y) = 80x + 50y$.
Buscamos en qué situación se da un coste máximo y el valor del mismo.
Valoramos el coste en cada vértice y localizamos dicha situación de coste máximo.

A(0, 0) → $C(0,0) = 0$
B(100,100) → $C(100,100) = 8000 + 5000 = 13000$
C(160, 40) → $C(160,40) = 14800$
D(160, 0) → $C(160,0) = 12800$

El coste máximo es de 14800 € contratando 160 habitaciones de tipo A y 40 de tipo B.

OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.
a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.
b) Representa la región factible.
c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Llamemos x = número de lotes con la oferta 1 e y = número de lotes con la oferta 2.

Como hay 2000 camisetas y el lote 1 lleva una y el lote 2 lleva 3, obtenemos la primera restricción: $x+3y \le 2000$.

Como hay 1000 chándales y las ofertas 1 y 2 levan 1 cada una, obtenemos la siguiente restricción: $x+y \le 1000$.

Se va a ofrecer más de 200 lotes de la oferta 1: $x \ge 200$.

Y más de 100 lotes de la oferta 2: $y \ge 100$.

Todas las restricciones que determinan la región factible son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y \le 2000 \\ x+y \le 1000 \\ x \ge 200 \\ y \ge 100 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las restricciones e identificamos la región factible:

Realizamos una tabla para las rectas asociadas a cada restricción.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y = 2000 \\ x+y = 1000 \\ x = 200 \\ y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2000-x}{3} \\ y = 1000-x \\ x = 200 \\ y = 100 \end{array}\right\}$$

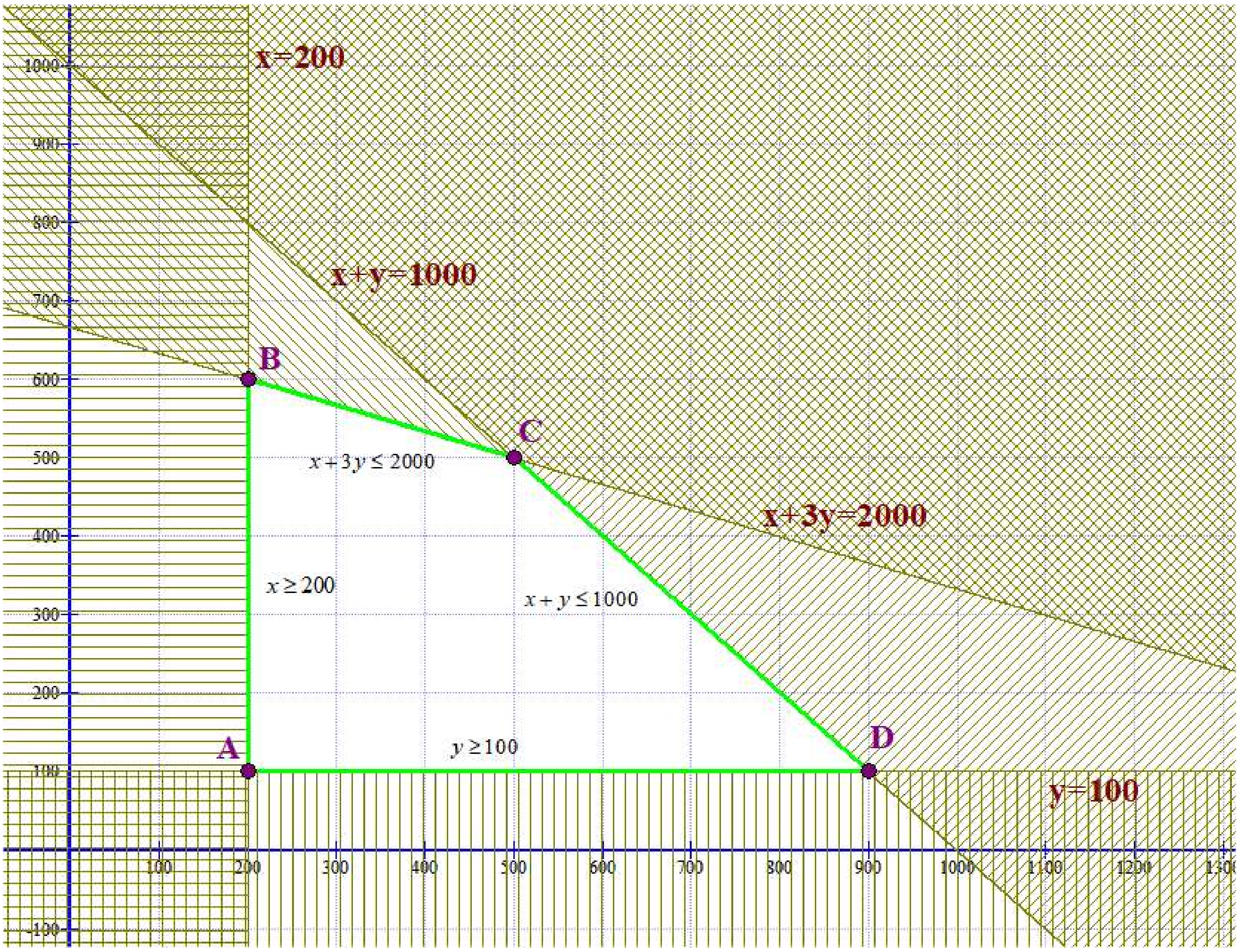
x	$y=1000-x$
0	1000
1000	0
500	500
200	800

x	$y=\dfrac{2000-x}{3}$
200	600
500	500

$x=200$	y
200	0
200	600

x	$y=100$
0	100
200	100

La región factible es la región en blanco.



Calculamos las coordenadas de los vértices:

$$\left.\begin{array}{l} x=200 \\ y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(200,100)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ x=200 \end{array}\right\} \Rightarrow 200+3y=2000 \Rightarrow y=600 \Rightarrow B(200,600)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ y=1000-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+3000-3x=2000 \Rightarrow -2x=-1000$$

$$x=500 \Rightarrow y=1000-500=500 \Rightarrow C(500,500)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=100 \\ x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow x+100=1000 \Rightarrow x=900 \Rightarrow D(900,100)$$

c) La función de ingresos sería la siguiente: $I(x,y)=30x+50y$

Ahora calculamos en cuál de los vértices toma esta función el valor máximo:

A(200, 100) → $I(200,100)=6000+5000=11000€$

B(200, 600) → $I(200,600)=6000+30000=36000€$

C(500, 500) → $I(500,500) = 15000 + 25000 = 40000€$

D(900, 100) → $I(900,100) = 27000 + 5000 = 32000€$

El valor máximo se alcanza en el punto D(500, 500). Para maximizar los ingresos se deberían vender 500 lotes de la oferta 1 y otros 500 de la oferta 2. Con esas ventas los ingresos ascenderían a 40 000 €.

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

a) Como la función es una ecuación de segundo grado, se trata de una parábola:

Puntos de corte con el eje OX: y = 0

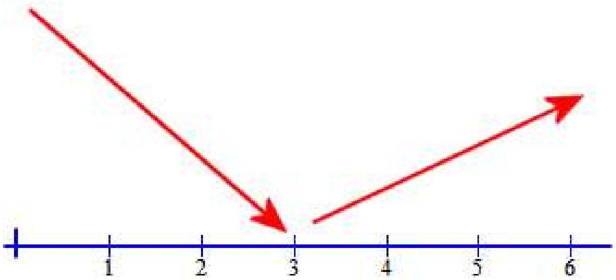
$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ x = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$ → Puntos de corte: A(2,0) y B(4,0)

Puntos de corte con el eje OY: x = 0

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8$ →Punto de corte C(0,8)

Monotonía y extremos relativos:

$f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$
Igualamos la derivada a cero.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$
El extremo relativo está en x =3. Veamos como crece o decrece la función:
En $(-\infty, 3)$ tomamos x = 0 y $f'(0) = 0 - 6 = -6 < 0$. La función decrece.
En $(3, +\infty)$ tomamos x = 4 y $f'(4) = 8 - 6 = 2 > 0$. La función crece.



La función presenta un mínimo en x = 3. Vértice (3, –1)
Para representarla hacemos una pequeña tabla de valores:

OPCIÓN B

1. Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y la producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la demanda se deben producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.
a) Plantea y representa gráficamente el problema.
b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y como se consiguen?

a) Llamemos x = número de millones de litros de vino blanco, y = número de millones de litros de vino tinto.

Buscamos las restricciones:

- La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros → $x+y \leq 90$.
- La producción de vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto → $x \leq 2y$.
- La producción de vino blanco no debe ser inferior a su mitad → $x \geq \frac{y}{2}$.
- Se deben producir al menos 45 millones de litros → $x+y \geq 45$.

Resumiendo las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 90 \\ x \leq 2y \\ x \geq \frac{y}{2} \\ x+y \geq 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 90 \\ y \geq \frac{x}{2} \\ y \leq 2x \\ x+y \geq 45 \end{array}\right\}$$

La función Ingresos es $I(x,y) = 8x+6y$, expresado en millones de euros.

Las rectas asociadas a las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x+y = 90 \\ y = \frac{x}{2} \\ y = 2x \\ x+y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 90-x \\ y = \frac{x}{2} \\ y = 2x \\ y = 45-x \end{array}\right\}$$

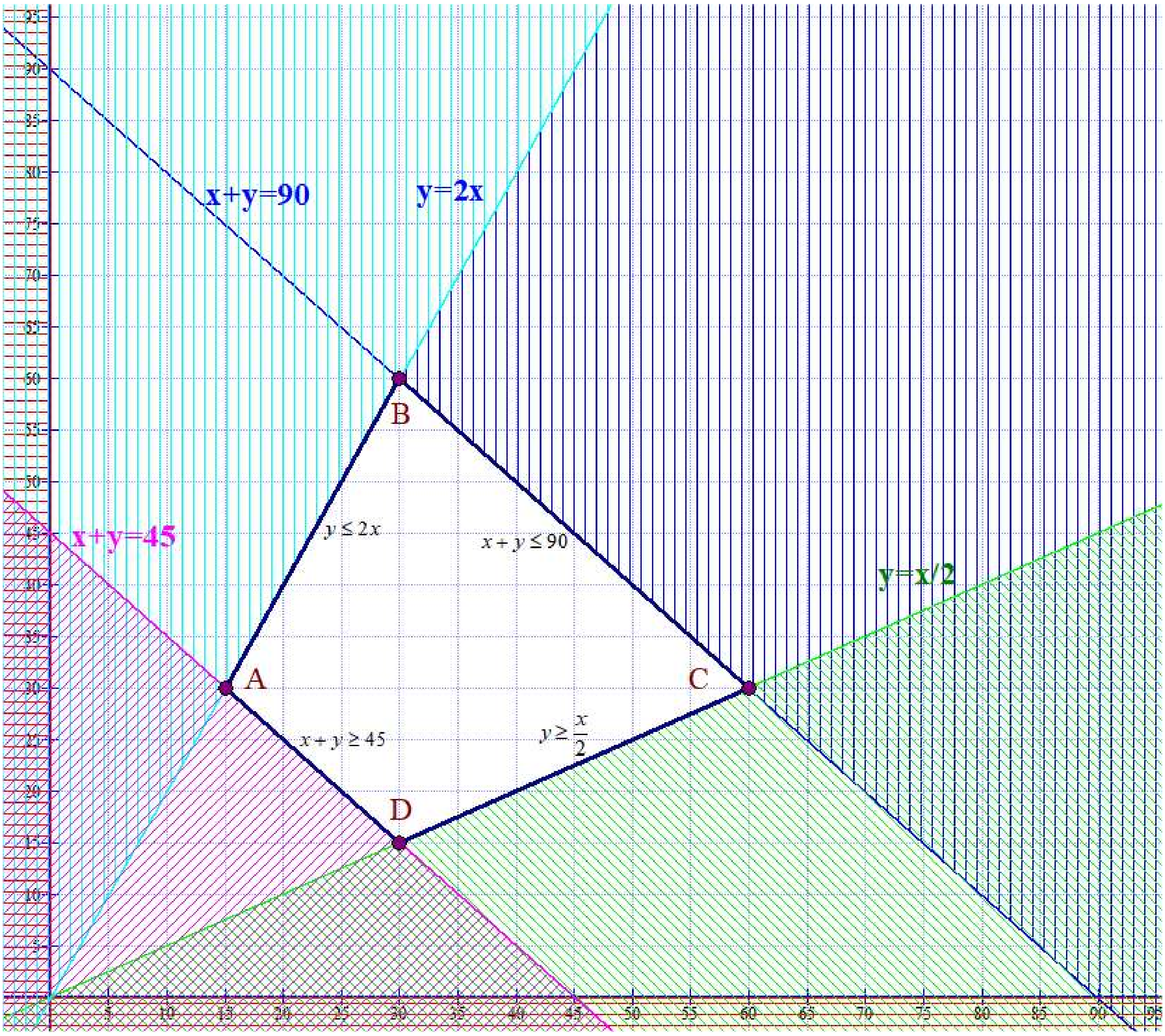
Las representamos, partiendo de tablas de valores:

x	$y=90-x$
0	90
90	0

x	$y=45-x$
0	45
45	0

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
90	45

x	$y=2x$
0	0
45	90



b) Para resolver el problema debemos de determinar las coordenadas de los vértices de la región factible.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2x=45 \Rightarrow 3x=45 \Rightarrow x=15 \Rightarrow y=30$$

El punto A tiene coordenadas A(15, 30)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=90 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2x=90 \Rightarrow 3x=90 \Rightarrow x=30 \Rightarrow y=60$$

El punto B tiene coordenadas B(30, 60)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=90 \\ y=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{x}{2}=90 \Rightarrow 2x+x=180 \Rightarrow 3x=180 \Rightarrow x=60 \Rightarrow y=30$$

El punto C tiene coordenadas C(60, 30)

$$\left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{x}{2}=45 \Rightarrow 2x+x=90 \Rightarrow 3x=90 \Rightarrow x=30 \Rightarrow y=15$$

El punto D tiene coordenadas D(30, 15)

Valoramos los ingresos $I(x,y)=8x+6y$ en cada punto:

A(15, 30) → $I(15,30)=120+180=300$

B(30, 60) → $I(30,60)=240+360=600$

C(60, 30) → $I(60,30)=480+180=660$

D(30, 15) → $I(30,15)=240+90=330$

El ingreso máximo se obtiene con 60 millones de litros de vino blanco y 30 millones de litros de vino tinto. Este ingreso máximo es 660 millones de euros.

2. Considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \quad 0\leq x\leq 4 \\ 7-x & si \quad 4<x\leq 7 \end{cases}$.

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué valores de x es $f(x)\geq 0$?.

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x)\geq 0$.

a) Es una función definida a trozos. Es un trozo de parábola y un trozo de recta.

Puntos de corte con el eje OY. x = 0

$f(0)=0^2-0+3=3$. El punto de corte con el eje OY es A(0, 3)

Puntos de corte con el eje OX. y = 0

$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases} x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases} \quad si\ valen,\ pues \quad 0\leq x\leq 4 \\ 7-x=0\Rightarrow x=7 \qquad si\ vale,\ pues \quad 4<x\leq 7 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son B(3, 0), C(1, 0) y D(7, 0).

La rama que es una parábola $f(x)=x^2-4x+3 \quad si \quad 0\leq x\leq 4$, tiene como derivada:
$f'(x)=2x-4$. La igualamos a cero. $f'(x)=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2$.
En (0, 2) tomamos x = 1 y la derivada es $f'(1)=2-4=-2<0$. La función decrece.
En (2, 4) tomamos x = 3 y la derivada es $f'(3)=6-4=2>0$. La función crece.
Tiene un mínimo relativo en x = 2.

La rama que es una recta $f(x)=7-x \quad si \quad 4<x\leq 7$, tiene como derivada:
$f(x)=-1<0$.
En (4, 7) siempre es decreciente (al ser la derivada siempre negativa).

La función decrece en (0, 2), crece en (2, 4) y decrece en (4, 7). Tiene un mínimo relativo en x =2.

Para representar la función hacemos una tabla de valores.

OPCIÓN B

1. Una panadería utiliza harina y nata para hacer dos tipos de galletas: blandas y duras. Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata. Para hacer una galleta blanda necesitas 250 gramos de harina y 250 gramos de nata y para hacer una galleta dura necesitas 400 gramos de harina y 100 gramos de nata. Además, el número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades. Si las galletas blandas se venden por 6€ y las galletas duras por 4,5€,
a) Formula un problema que controle la fabricación de galletas maximizando las ventas.
b) Representa la región factible c) ¿Qué cantidad de cada tipo se debe fabricar para maximizar dichas ventas? ¿A cuánto ascienden?

a) Llamemos x = número de galletas blandas, y = número de galletas duras.
Realizamos una tabla con los datos.

	Kg de harina	Kg de nata	Ventas
Nº galletas blandas (x)	0.25x	0.25x	6x
Nº galletas duras (y)	0.4y	0.1y	4.5y
TOTALES	$0.25x+0.4y$	$0.25x+0.1y$	$6x+4.5y$

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

- Tiene 160 kilogramos de harina y 100 kilogramos de nata → $0.25x+0.4y\le 160;\ 0.25x+0.1y\le 100$.
- El número de galletas blandas fabricadas deben exceder el número de galletas duras en al menos 100 unidades → $x\ge 100+y$.
- Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}0.25x+0.4y\le 160\\0.25x+0.1y\le 100\\x\ge 100+y\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}25x+40y\le 16000\\25x+10y\le 10000\\x\ge 100+y\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+8y\le 3200\\5x+2y\le 2000\\x\ge 100+y\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

La función objetivo son las ventas $V(x,y)=6x+4.5y$ que deseamos maximizar.

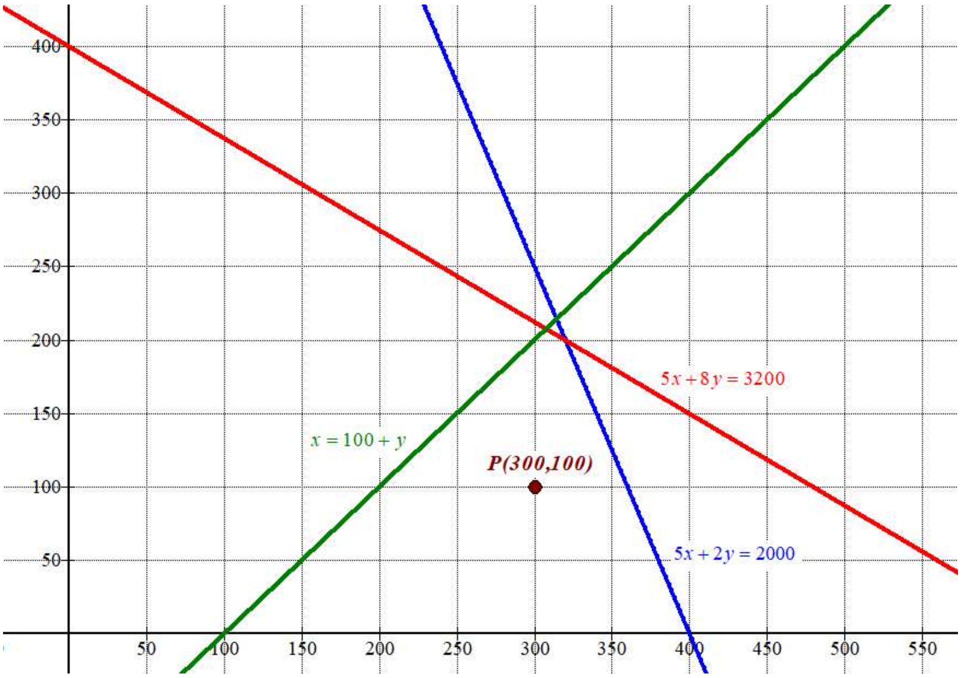
b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y=\dfrac{3200-5x}{8}$
0	400
400	150
640	0

x	$y=\dfrac{2000-5x}{2}$
0	1000
200	500
400	0

x	$y=x-100$
100	0
200	100
300	200

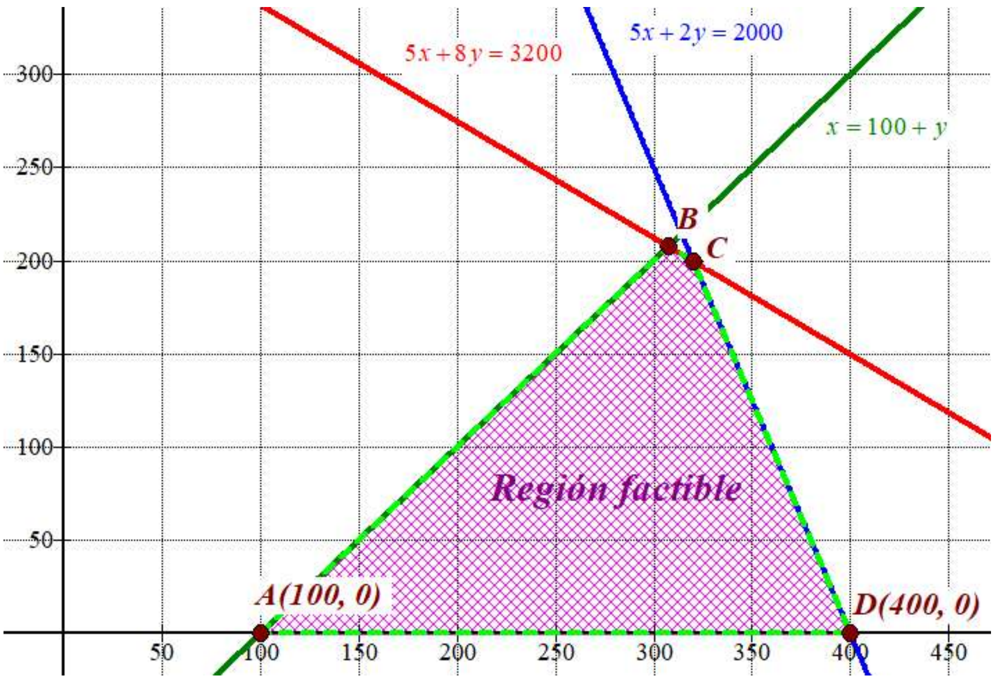
$x\ge 0;\ y\ge 0$
Primer cuadrante



Las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 5x+8y\leq 3200 \\ 5x+2y\leq 2000 \\ x\geq 100+y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$. La región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, azul y roja. Comprobamos que el punto P(300, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot 300+8\cdot 100\leq 3200 \\ 5\cdot 300+2\cdot 100\leq 2000 \\ 300\geq 100+100 \\ 300\geq 0;\ 100\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



c) Debemos determinar las coordenadas de los puntos B y C.

$$B \to \left.\begin{array}{l} x = 100 + y \\ 5x + 8y = 3200 \end{array}\right\} \Rightarrow 5(100 + y) + 8y = 3200 \Rightarrow 500 + 5y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13y = 2700 \Rightarrow y = \frac{2700}{13} \Rightarrow x = 100 + \frac{2700}{13} = \frac{4000}{13} \Rightarrow B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} 5x + 2y = 2000 \\ 5x + 8y = 3200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x = 2000 - 2y \\ 5x + 8y = 3200 \end{array}\right\} \Rightarrow 2000 - 2y + 8y = 3200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y = 1200 \Rightarrow y = \frac{1200}{6} = 200 \Rightarrow 5x = 2000 - 400 = 1600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1600}{5} = 320 \Rightarrow C(320, 200)$$

Valoramos la función objetivo $V(x, y) = 6x + 4.5y$ en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(100, 0) → $V(100,0) = 6\cdot 100 + 4.5\cdot 0 = 600$

$B\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right)$ → $V\left(\frac{4000}{13}, \frac{2700}{13}\right) = 6\cdot\frac{4000}{13} + 4.5\cdot\frac{2700}{13} \simeq 2780.769$

C(320, 200) → $V(320,200) = 6\cdot 320 + 4.5\cdot 200 = 2820$ ¡Máximo!

D(400, 0) → $V(400,0) = 6\cdot 400 + 4.5\cdot 0 = 2400$

Los máximos ingresos por ventas son 2820 euros y se consiguen con 320 galletas blandas y 200 duras.

OPCIÓN B

1. Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Si se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda y que los del almacén A no superen el triple de los del B:
a) Formule el problema y represente gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén? b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B, ¿cuántas unidades deben enviarse desde cada almacén para minimizar el costo del transporte? ¿A cuánto ascendería ese costo?

a) Llamemos x = número de reproductores que se envían desde el almacén A, y = número de reproductores que se envían desde el almacén B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

- Un centro comercial tiene en stock 750 reproductores de DVD en el almacén A y otros 600 en el almacén B → $x \leq 750;\ y \leq 600$.
- Se quiere tener al menos 900 reproductores en tienda → $x + y \geq 900$.
- Los reproductores del almacén A no superen el triple de los del B → $x \leq 3y$.
- Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 750 \\ y \leq 600 \\ x + y \geq 900 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

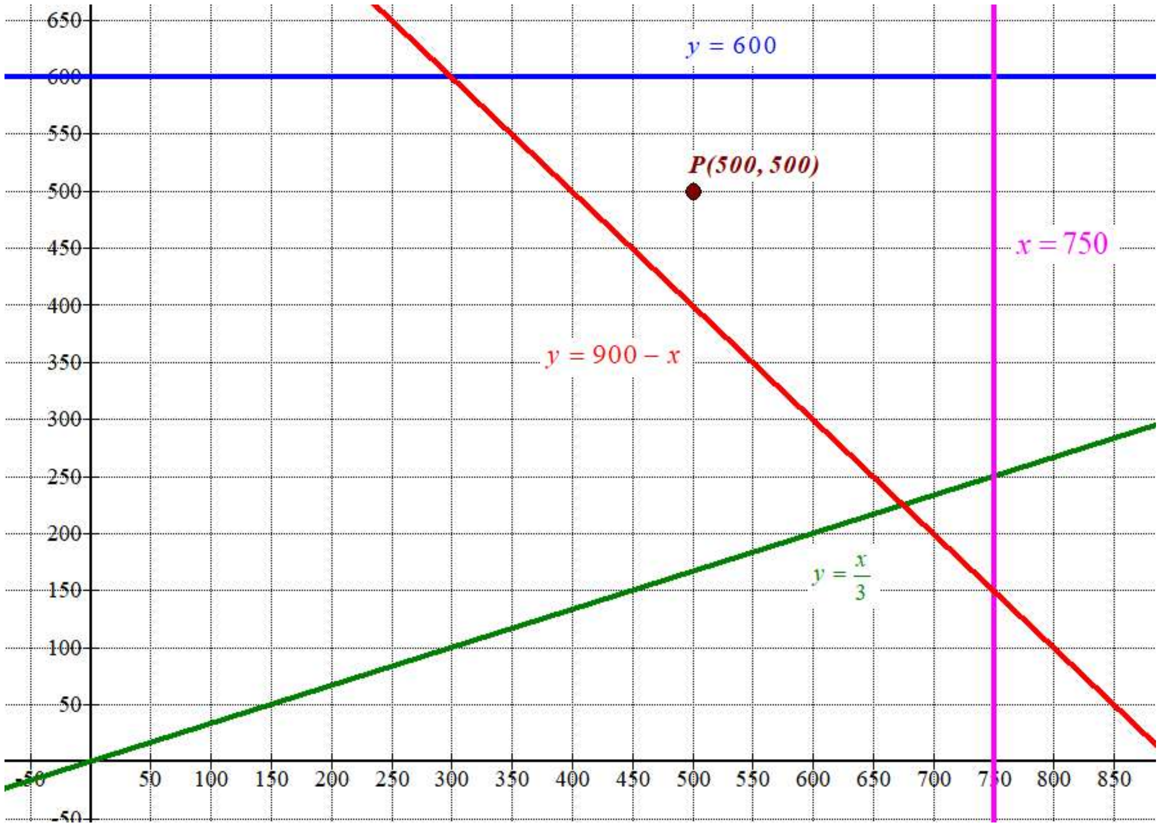
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$x = 750$	y
750	250
750	600

x	$y = 600$
0	600
300	600
750	600

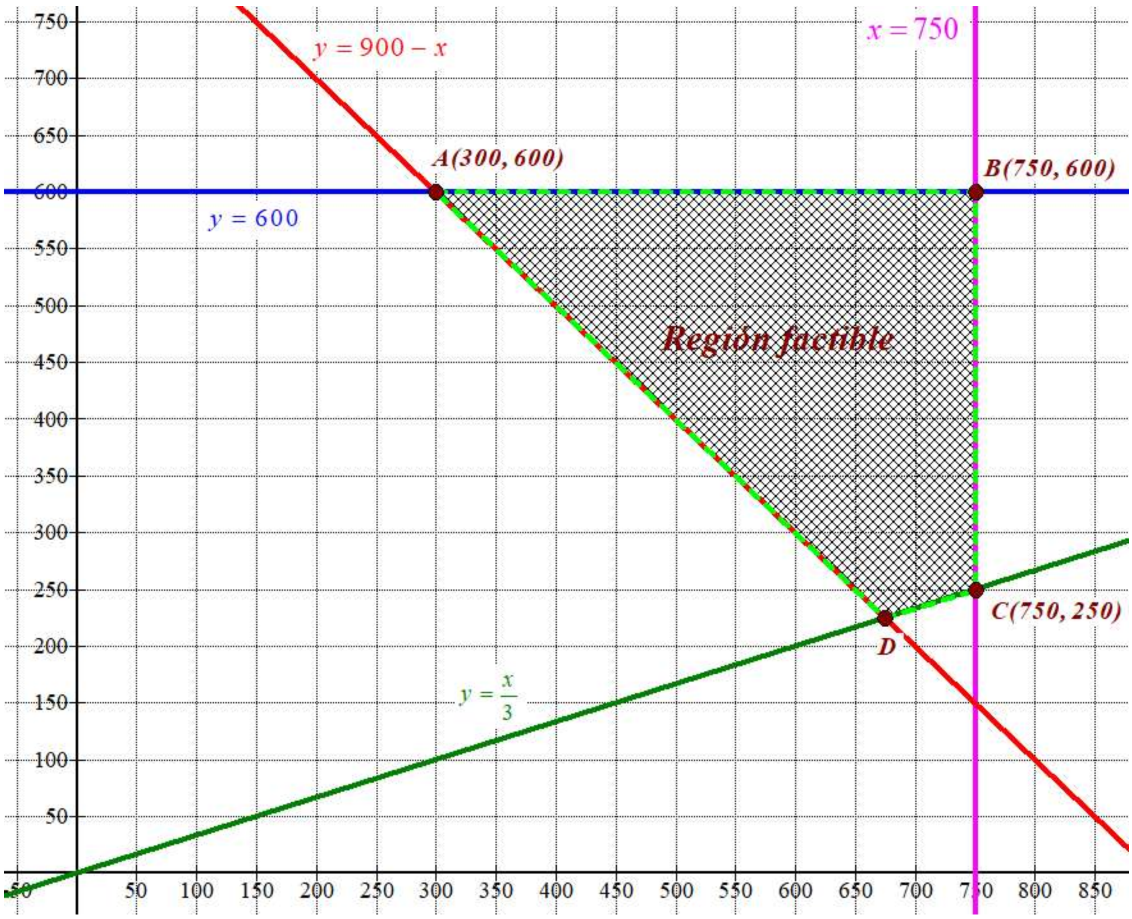
x	$y = 900 - x$
0	900
300	600
675	225

x	$y = \frac{x}{3}$
0	0
675	225
750	250

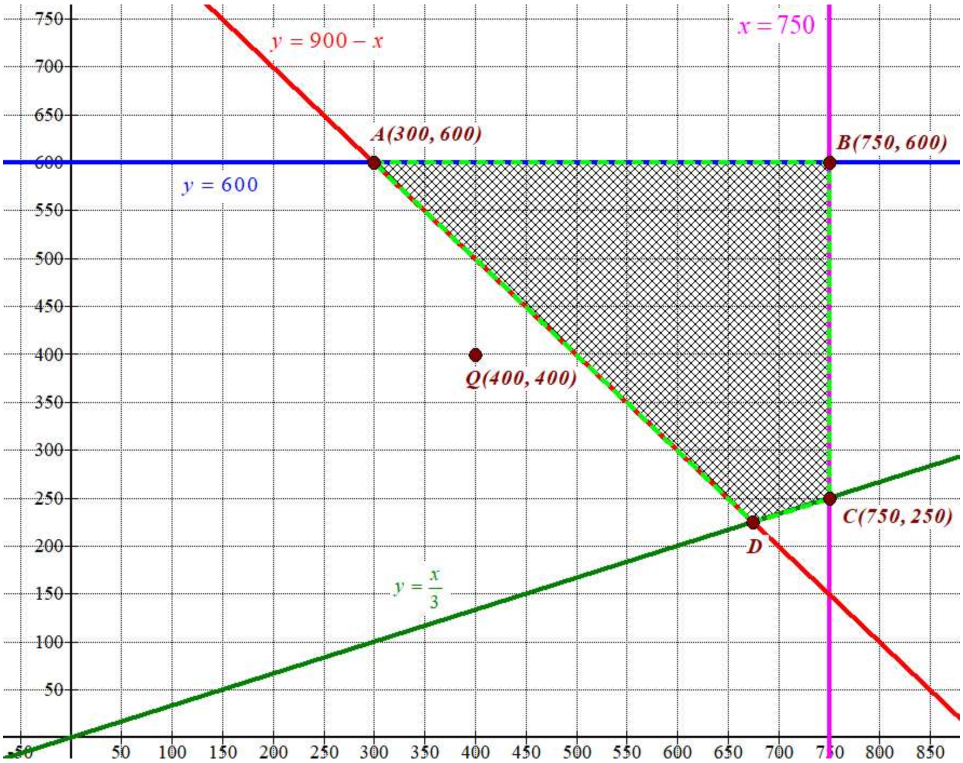


Comprobamos que el punto P(500, 500) cumple todas las restricciones.

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



¿Se podrían enviar 400 unidades desde cada almacén?
No, el punto Q(400, 400) no pertenece a la región factible y con esos envíos no se satisfacen todas las restricciones.



Visto de otra manera: con 400 y 400 no se consigue el mínimo de 900 reproductores que debe haber en la tienda.

b) Si los costes unitarios de envío son 0,30 euros por unidad para el almacén A y 0,25 euros para unidad para el almacén B la función objetivo son los gastos de transporte que deseo minimizar tiene la expresión: $G(x,y)=0.3x+0.25y$.

Obtenemos las coordenadas del vértice D de la región factible.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=900 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+y=900 \Rightarrow 4y=900 \Rightarrow \boxed{y=\frac{900}{4}=225} \Rightarrow \boxed{x=3\cdot 225=675}$$

El vértice D tiene coordenadas D(675, 225).
Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

A(300, 600) → $G(300,600)=0.3\cdot 300+0.25\cdot 600=240$ ¡Mínimo!

B(750, 600) → $G(750,600)=0.3\cdot 750+0.25\cdot 600=375$

C(750, 250) → $G(750,250)=0.3\cdot 750+0.25\cdot 250=287.5$

D(675, 225) → $G(675,225)=0.3\cdot 675+0.25\cdot 225=258.75$

El gasto mínimo en transporte es de 240 € y se consigue con 300 reproductores del almacén A y 600 del B.

OPCIÓN B

1. Sea la función lineal $f(x,y)=2x-3y$ sujeta a las restricciones
$x+2y\le 40,\ x+y\ge 5,\ 3x+y\le 45,\ x\ge 0$.
(a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
(b) Calcula el punto o puntos de esa región donde la función alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

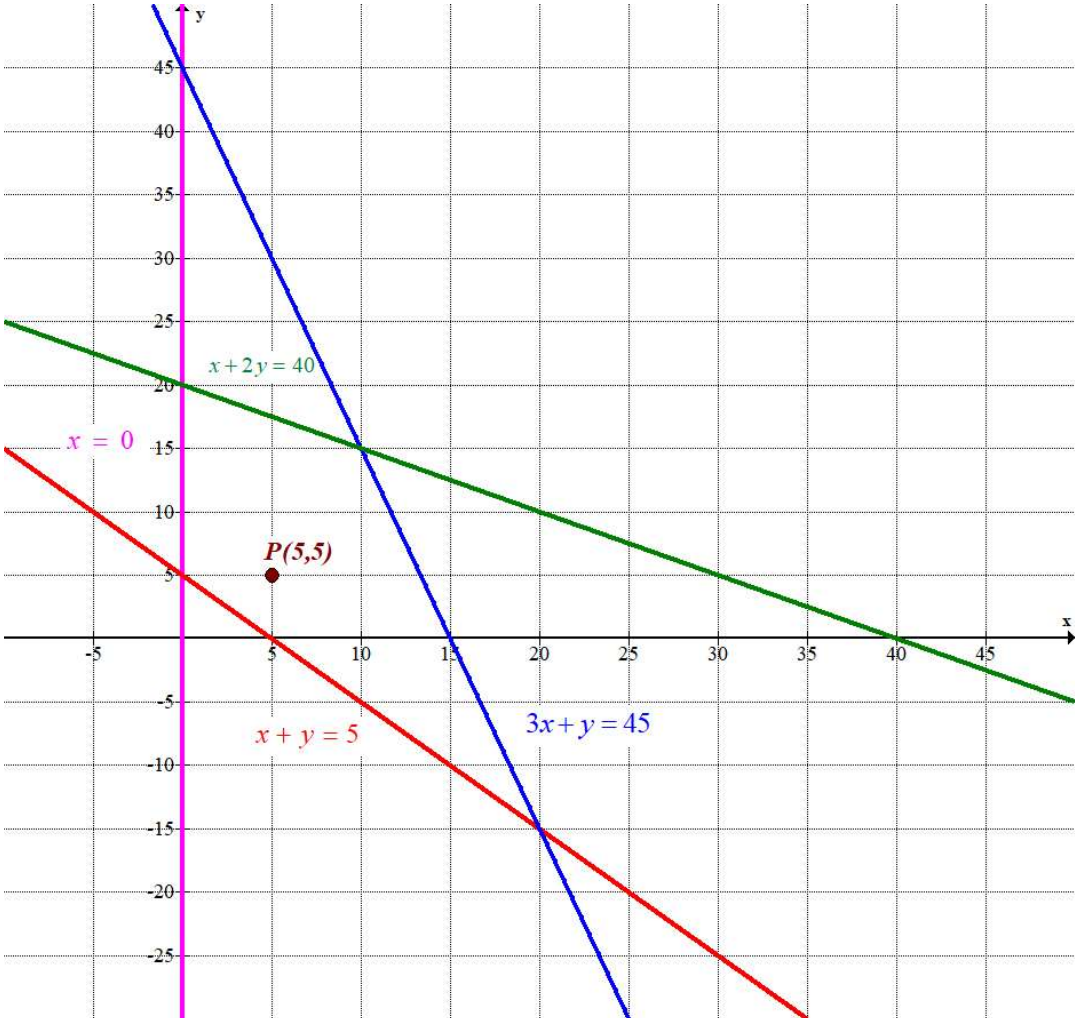
(a) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y=\frac{40-x}{2}$
0	20
10	15
40	0

x	$y=5-x$
0	5
5	0
20	-15

x	$y=45-3x$
0	45
10	15
20	-15

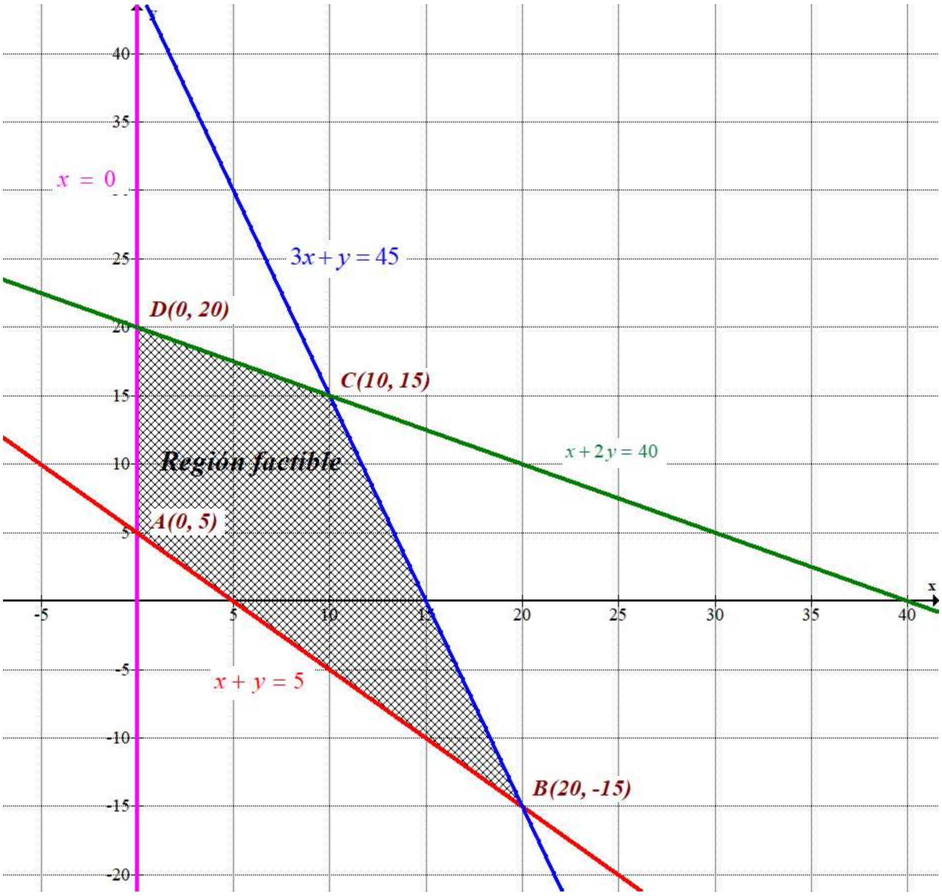
$x=0$	y
0	0
0	5
0	10



Como las restricciones son $x+2y\le 40,\ x+y\ge 5,\ 3x+y\le 45,\ x\ge 0$ la región factible es la región del plano situada por debajo de las rectas verde y azul, por encima de la recta roja y a la derecha de la recta vertical rosa (eje OY). Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+2\cdot 5\leq 40 \\ 5+5\geq 5 \\ 3\cdot 5+5\leq 45 \\ 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son A(0, 5), B(20, –15), C(10, 15) y D(0, 20).

(b) Valoramos la función objetivo $f(x,y)=2x-3y$ en cada vértice de la región factible en busca de los valores máximo y mínimo.

A(0, 5) → $f(0,5)=2\cdot 0-3\cdot 5=-15$

B(20, –15) → $f(20,-15)=2\cdot 20-3\cdot(-15)=85$ ¡Máximo!

C(10, 15) → $f(10,15)=2\cdot 10-3\cdot 15=-25$

D(0, 20) → $f(0,20)=2\cdot 0-3\cdot 20=-60$ ¡Mínimo!

El valor máximo es 85 y se consigue en el vértice (20, –15).
El valor mínimo es –60 y se consigue en el vértice (0, 20).

OPCIÓN B

1. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de envases A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total y el número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A. Además, cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción.
(a) Formule el sistema de inecuaciones. Dibuje la región factible y calcule sus vértices.
(b) Si cada envase del tipo A genera unos beneficios de 130€ y el tipo B de 140€, ¿cuántos envases de cada tipo tendrán que producir por semana para que la ganancia semanal total sea máxima?

(a) Llamemos x = número de envases A, y = número de envases B.

Establecemos las inecuaciones que representan las restricciones:

- Su producción semanal debe ser de al menos 10 envases en total → $x+y\geq 10$.
- El número de envases tipo B no puede superar en más de 10 el número de los del tipo A → $y\leq x+10$.
- Cada envase tipo A tiene unos costes de producción de 150€ y cada envase tipo B de 100€, con un máximo de 6.000€ semanales para el coste total de producción → $150x+100y\leq 6000$.
- Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

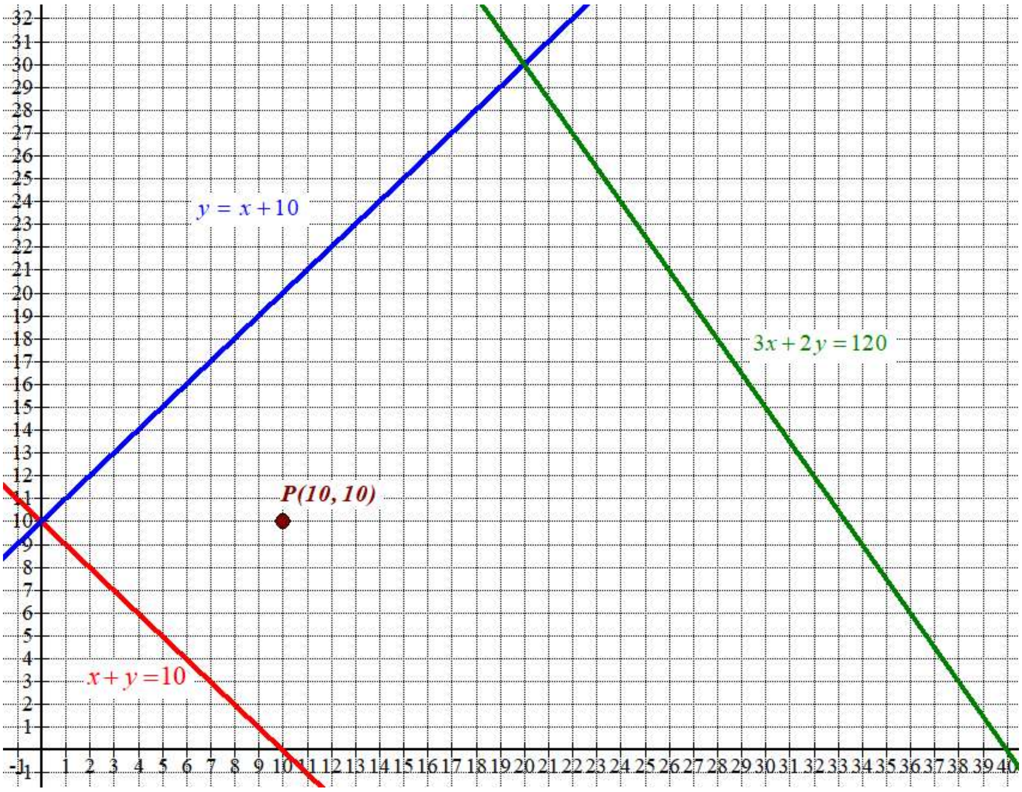
Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

x	$y=10-x$
0	10
5	5
10	0

x	$y=x+10$
0	10
10	20
20	30

x	$y=\frac{120-3x}{2}$
0	60
20	30
40	0

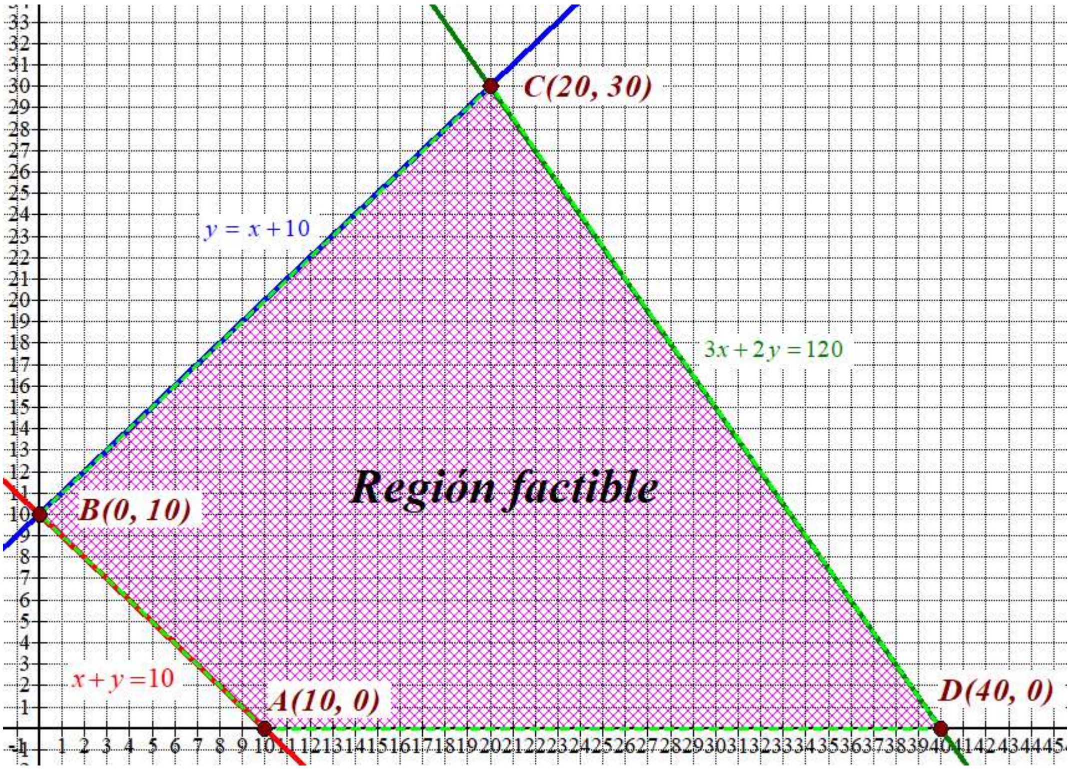
$x\geq 0;\ y\geq 0$
Pr*imer cuadrante*



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde y azul, y por encima de la recta roja. Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10+10\geq 10 \\ 10\leq 10+10 \\ 30+20\leq 120 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región sombreada del siguiente dibujo.



(b) La función objetivo son los beneficios que vienen expresados por la función $B(x,y)=130x+140y$

Valoramos la función objetivo en cada vértice de la región factible en busca del valor máximo.

A(10, 0) → $B(10,0)=130\cdot 10+140\cdot 0=1300$

B(0, 10) → $B(0,10)=130\cdot 0+140\cdot 10=1400$

C(20, 30) → $B(20,30)=130\cdot 20+140\cdot 30=6800$ ¡Máximo!

D(40, 0) → $B(40,0)=130\cdot 40+140\cdot 0=5200$

El beneficio máximo tiene un valor de 6800 euros y se consiguen con 20 envases A y 30 envases B.