IES Fernando Wirtz

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

2º Bach Matemáticas Aplicadas II

1º PARCIAL – ÁLGEBRA I

Nombre:...

- El examen se puntúa sobre 8.75 y se ajusta a la estructura ABAU establecida por la CIUGA en la última convocatoria.
- Dispones de 80 minutos.
- Consta de 4 preguntas de carácter obligatorio, las 3 primeras puntúan 2.5 puntos y la cuarta 1.25 (es la MITAD de una pregunta).
- Las preguntas 1 y 2 son OBLIGATORIAS, y en las preguntas 3 y 4 debes elegir una y sólo una opción entre los apartados A y B. **Señala tu opción.**
- La pregunta 4 es más corta para ajustarse a los 80 minutos (En la ABAU dispondrás de 90 minutos)
- Prohibido: calculadoras programables, dispositivos con conexión wifi o bluethoot, auriculares etc
- Si a un alumno se le ve en situación sospechosa de estar copiando, se le retira el examen y se le pondrá un cero.

PREGUNTA 1

Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la inversa de la matriz *A*
b) Calcula la matriz $C=BA^t$. (siendo A^t la matriz traspuesta de *A*)
c) Aplicando el método de Gauss diagonaliza la matriz C e indica el número de filas (o columnas) distintas de cero.
d) Despeja *X* en la ecuación matricial $XA + B = BA^t$ y calcúlala.

PREGUNTA 2

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ siendo } a \text{ un número real.}$$

a) Obtén los valores de *a* para que la matriz *A* tenga inversa.
b) Para *a=1* resuelve la ecuación $XA - B = CA$
c) Determina razonadamente la dimensión de la matriz *D* que permita que sea posible la operación $B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$

PREGUNTA 3

Elige una y sólo una de las opciones siguientes

Opción A

Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A^2 = A$

(i) Estudia si hay matrices idempotentes 2 x 2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b. **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}. **[0.5 puntos]**

Opción B

2.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A, $\left(A^t\right)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

PREGUNTA 4

Elige una y sólo una de las opciones siguientes

Opción A

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

Realiza la operación y plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas en función del parámetro m

$$\frac{1}{3}(A + B \cdot C) \cdot D = E$$

Opción B

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^t$

b) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ (no es necesario realizar las operaciones.

2.1. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A.
2.1.2. Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).
2.1.3. Despeje X en la ecuación matricial $XA+B=BA^t$ y calcúlela.

2.1.1. Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-2-0-0=-1\neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

2.1.2. Calculamos BA^t.

$$BA^t=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+2&0-2+1&-1+0+1\\2+0-4&0+4-2&2+0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&2&0\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 1, pues la fila 2ª se puede obtener multiplicando la fila 1ª por –2.

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA+B=BA^t\Rightarrow XA=BA^t-B\Rightarrow X=\left(BA^t-B\right)A^{-1}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$BA^t-B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-4&-2&2\end{pmatrix}$$

$$X=\left(BA^t-B\right)A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-4&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2-1-1&0+1+0&4+1+1\\4+2+2&0-2+0&-8-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&1&6\\8&-2&-12\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & -2 & -12 \end{pmatrix}$.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$, siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) (1.25 puntos) Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X\cdot A - B = C\cdot A$.

c) (0.5 puntos) Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B\cdot A + D\cdot C^t\cdot B$$

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix}=a(a-1)+0-4(a-3)-0-a(a-3)-2=$$

$$=\cancel{a^2}-a-4a+12-\cancel{a^2}+3a-2=-2a+10$$

$$|A|=0\Rightarrow -2a+10=0\Rightarrow 2a=10\Rightarrow \boxed{a=5}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 5.

b) Para $a = 1$ la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$a=1\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8+2-2=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial y obtenemos la matriz X.

$$X \cdot A - B = C \cdot A \Rightarrow X \cdot A = C \cdot A + B \Rightarrow X = \left(C \cdot A + B\right) A^{-1}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+0 & -2+0+8 & 4+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A + B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(C \cdot A + B\right) A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -5 & 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 10+18-44 & 25+9-22 & -5+27+22 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -16 & 12 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 11/2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & 11/2 \end{pmatrix}$.

c) El producto $B \cdot A$ da una matriz de dimensiones 1×3.

$$\begin{array}{c} B \quad \cdot \quad A \\ 1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 3 \rightarrow 1 \times 3 \end{array}$$

Esta matriz de 1 fila y 3 columnas debe tener la misma dimensión que la matriz $D \cdot C^t \cdot B$ para poder realizarse la suma. Suponemos la matriz D de dimensiones $m \times n$.

$$\begin{array}{c} D \quad \cdot \quad C^t \quad \cdot \quad B \\ m \times \boxed{n \cdot 3} \times \boxed{1 \cdot 1} \times 3 \rightarrow m \times 3 \end{array}$$

El producto $C^t \cdot B$ es posible y da una matriz de orden 3×3. El producto $D \cdot C^t \cdot B$ es posible si $n = 3$. Y el resultado de la operación es una matriz $m \times 3$. Para poder sumarse con la matriz $B \cdot A$ deben tener la misma dimensión 1×3, debiendo ser $m = 1$.

Las dimensiones de la matriz D deben ser 1×3

1.2.- Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices *idempotentes* 2 x 2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de *a* y *b*. **[2 puntos]**

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022}. **[0.5 puntos]**

(i)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+a & 2+b \\ 2a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+a=2 \\ 2+b=1 \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{a=-2} \\ \boxed{b=-1} \\ 2a+ab=a \\ a+b^2=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2(-2)+(-2)(-1)=-2 \\ -2+(-1)^2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4+2=-2 \\ -2+1=-1 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

En el primer tipo de matriz si es posible y los valores son *a = –2* y *b = –1*.
Repetimos este razonamiento para el segundo tipo de matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4+ab & 2b+b \\ 2a+a & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+ab=2 \\ 3b=b \\ 3a=a \\ ab+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+ab=2 \\ 2b=0 \to \boxed{b=0} \\ 2a=0 \to \boxed{a=0} \\ ab+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+0\cdot 0=2 \\ 0\cdot 0+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4+0=2 \\ 0+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

En este segundo caso no es posible que una matriz de esa forma sea idempotente.

(ii) Calculamos las potencias sucesivas de una matriz A idempotente.

$$\begin{array}{l} A^2 = A \\ A^3 = A^2 A = A\cdot A = A^2 = A \\ A^4 = A^3 A = A\cdot A = A^2 = A \\ A^5 = A^4 A = A\cdot A = A^2 = A \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ A^{2022} = A^{2021} A = A\cdot A = A^2 = A \end{array}$$

Se cumple que $A^{2022} = A$.

2.1. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.

2.1.2. Calcule la inversa de la matriz traspuesta de A, $\left(A^t\right)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX-A^t=X$.

2.1.1. Comprobamos si la matriz A tiene determinante no nulo y por tanto existe su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-1+0+4-6-0-0=-3\neq 0$$

Al ser el determinante distinto de cero la inversa de la matriz A existe. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}}{-3}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 2 & -7 & 4\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ -2/3 & 7/3 & -4/3\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

2.1.2. Utilizamos que $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

$$\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 2/3\\ -2/3 & 7/3 & -4/3\\ 1/3 & 1/3 & -1/3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & 1/3\\ -2/3 & 7/3 & 1/3\\ 2/3 & -4/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

2.1.3. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX-A^t=X\Rightarrow AX-X=A^t\Rightarrow\left(A-I\right)X=A^t\Rightarrow X=\left(A-I\right)^{-1}A^t$$

Calculamos la inversa de la matriz $\left(A-I\right)$.

$$\left(A-I\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$|A-I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0+0+4-0-0-0 = 4 \neq 0$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{Adj\left((A-I)^t\right)}{|A-I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = (A-I)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1+2 & 2-3/2 & 3-3/2-1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIONES:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{ y }\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de *m* el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para *m = 1*.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A+B\cdot C=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m+1 & 2\\ m-2m & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E\Rightarrow(A+B\cdot C)\cdot D=3E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{array}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{array}{r}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{array}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A. Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 4\end{vmatrix}=4-m^2$$

$$\left.\begin{array}{l}|A|=4-m^2\\ |A|=0\end{array}\right\}\Rightarrow 4-m^2=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm 2$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m\neq\pm 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x+2y=3\\ 2x+4y=6\end{array}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $m=-2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x-2y=3\\ -2x+4y=-6\end{array}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una ecuación: $x-2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}$,

a) Calcula $A\cdot B\cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2-I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y $B\cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

a)

$$C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+0+3&0-2+3&1-2+0\\0+0+2&0-1+2&0-1+0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+2-2\\0+2-2\\0+2+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}$$

b)

$$B^2=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+1&0+0+1&-1+0+0\\0+0-1&0+1-1&0+1+0\\-1+0+0&0-1+0&1-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}B^2-I=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3-1&1/3&-1/3\\-1/3&0-1&1/3\\-1/3&-1/3&0-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}B^2-I=\begin{pmatrix}-1/3&1/3&-1/3\\-1/3&-1&1/3\\-1/3&-1/3&-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&3&-1\\1&1&3\end{pmatrix}}$$

c) La matriz A – B es posible obtenerla pues ambas matrices son de la misma dimensión 3×3 y su resultado es una matriz 3×3. Pero no es posible la siguiente operación pues A – B es de dimensión 3×3 y la matriz C es de dimensión 1×3.
$(A-B)-C$ no es posible calcularlo.

La matriz $B\cdot C$ no es posible calcularla pues la matriz B es de dimensiones 3×3 y la matriz C es de dimensiones 1×3. Para que sea posible el producto planteado deben coincidir el número de columnas de B (3) y el número de filas de C (1). Al no ser así el producto no se puede realizar.

$$\begin{array}{c} B \cdot C \\ 3\times \boxed{3 \cdot 1} \times 3 \end{array}$$