

1 Sean A y B dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular $A^2 - B^2$ (Advertencia: en este caso $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A+B)^t = 2I + XB$ siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $A+B$

Solución.

a) Resolveremos el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si sumamos las dos ecuaciones (reducción) resulta:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si restamos las dos ecuaciones (reducción) resulta:

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora A^2 y B^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

Para finalizar hacemos la resta:

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad XA + (A+B)^t = 2I + XB \rightarrow XA - XB = 2I - (A+B)^t \rightarrow X(A-B) = 2I - (A+B)^t \rightarrow$$

$$X = [2I - (A+B)^t] \cdot (A-B)^{-1}$$

Cálculo de $2I - (A+B)^t$

$$2I - (A+B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A-B)^{-1}$

$$(A-B)^{-1} = \frac{1}{\det(A-B)} [\text{Adj}(A-B)]^t = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X:

$$X = [2I - (A+B)^t] (A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 Para la ecuación matricial $A^2X + AB = B$ se pide:

a) Despejar X suponiendo que A (y por tanto A^2) es invertible, y decir cuáles serían las dimensiones de X y de B si A tuviera dimensión 4×4 y B tuviera 3 columnas.

b) Resolverla en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Solución.

$$a) \quad A^2X + AB = B \rightarrow A^2X = B - AB \rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot (B - AB)$$

Si A tiene dimensión 4×4 y B tiene 3 columnas eso significaría que AB tendría dimensión 4×3 y por tanto B también tendría esta dimensión (sino no sería posible hacer $B - AB$).

Además A^2 tendría dimensión 4×4 .

Por todo ello, X tendría dimensión 4×3 .

b) Cálculo de A^2

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A^2)^{-1}$

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{\det(A^2)} \cdot [\text{Adj}(A^2)]^t = \frac{1}{(10+0+0)-(9+0+0)} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $B - AB$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$B - A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$X = (A^2)^{-1} \cdot (B - AB) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

a) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula los valores de m para que la matriz inversa de M sea

$$\frac{1}{4}M$$

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que

verifica $B^t \cdot A \cdot X + C^t = X$ siendo B^t y C^t las traspuestas de B y C respectivamente.

Solución.

a) La inversa de la matriz M verifica que $M \cdot M^{-1} = I$ siendo I la matriz identidad.

Si, como dice en el ejercicio $M^{-1} = \frac{1}{4}M$ entonces $M \cdot M^{-1} = M \cdot \frac{1}{4}M = \frac{1}{4}M^2 = I$

Resolvamos la ecuación $\frac{1}{4}M^2 = I$

$$\frac{1}{4}M^2 = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & m+4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} m^2+m+4 & m^2+5m+4 \\ m+1 & m+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término tenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{m^2+m+4}{4} &= 1 & \frac{m^2+5m+4}{4} &= 0 \\ \frac{m+1}{4} &= 0 & \frac{m+5}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Si resolvemos las dos últimas ecuaciones tenemos como resultado $m = -1$. Que también es un resultado válido para las dos primeras.

$$b) B^t \cdot A \cdot X + C^t = X \rightarrow B^t \cdot A \cdot X - X = -C^t \rightarrow (B^t \cdot A - I) \cdot X = -C^t \rightarrow X = (B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot (-C^t)$$

Cálculo de $B^t \cdot A - I$

$$B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B^t \cdot A - I)^{-1}$

$$(B^t \cdot A - I)^{-1} = \frac{1}{\det(B^t \cdot A - I)} \cdot [Adj(B^t \cdot A - I)]^t = \frac{1}{(0+0+0)-(3+0+0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$X = (B^t \cdot A - I)^{-1} \cdot (-C^t) = \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

4

Sea A la matriz siguiente $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$

Hallar, justificando la respuesta, el valor de x para el que se verifica $A^t = A^{-1}$. donde A^t es la matriz traspuesta de A y A^{-1} es la inversa de A

Solución.

La inversa de la matriz A verifica que $A \cdot A^{-1} = I$ siendo I la matriz identidad.

Si, como dice en el ejercicio, $A^{-1} = A^t$ entonces $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t = I$

Resolvamos la ecuación $A \cdot A^t = I$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término tenemos una única ecuación:

$$x^2 + 1 = 1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

- 5 La edad de una madre es, en la actualidad, triple de la del hijo. La suma de las edades de padre madre e hijo es 80 años y dentro de 5 años la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿cuántos años tienen el padre la madre y el hijo en la actualidad?

Solución.

$x \rightarrow$ Edad de la madre

$y \rightarrow$ Edad de la hijo

$z \rightarrow$ Edad de la padre

	Ahora	Dentro de 5 años
Madre	x	$x + 5$
Hijo	y	$y + 5$
Padre	z	$z + 5$

$$x = 3y$$

$$x + y + z = 80$$

$$(x + 5) + (y + 5) = (z + 5) + 5 \rightarrow x + y - z = 0$$

Sustituyendo en la segunda y la tercera ecuación x por $3y$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$3y + y + z = 80 \rightarrow 4y + z = 80$$

$$3y + y - z = 0 \rightarrow 4y - z = 0$$

Sumamos las dos ecuaciones y obtenemos $8y = 80 \rightarrow y = 10$ años

Sustituyendo después en $4y - z = 0$. Tenemos que $z = 40$ años

Por último, sustituyendo en $x = 3y$ tenemos que $x = 30$ años

Por tanto, la madre tiene 30 años, el hijo 10 años y el padre 40 años.

6

Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia entre las alturas de Tony y de Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los 3 suman 515 cm. 8 veces la altura de Tony es lo mismo que 9 veces la de Carlos. Hallar las 3 alturas:

Solución.

$x \rightarrow$ Altura de Carlos

$y \rightarrow$ Altura de Tony

$z \rightarrow$ Altura de Juan

$$x + 3(y - z) = z \rightarrow x + 3y - 3z = z \rightarrow x + 3y - 4z = 0$$

$$x + y + z = 515$$

$$8y = 9x \rightarrow -9x + 8y = 0$$

Calculamos el valor de x utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 515 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -9 & 8 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(0 - 16480 + 0) - (0 + 0 + 0)}{(0 - 32 - 27) - (36 + 0 + 8)} = \frac{-16480}{-103} = 160 \text{ cm}$$

Si sustituimos en la ecuación $-9x + 8y = 0$ tenemos que:

$$-1400 + 8y = 0 \rightarrow y = \frac{1400}{8} = 175 \text{ cm}$$

Por último, sustituyendo en la ecuación $x + y + z = 515$ tenemos que:

$$x + y + z = 515 \rightarrow 160 + 175 + z = 515 \rightarrow z = 180 \text{ cm}$$

Por tanto, Carlos mide 160 cm, Tony 175 cm y Juan 180 cm.

- 7 Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de 3 modelos diferentes A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230400 €. El precio de venta del modelo A era de 320 €, el de modelo B, un 20% más barato que A y el de C un 10% más caro que A. Además, de A y C se han vendido en total el doble de unidades que de B. Plantea un sistema de ecuaciones para calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor y resuélvelo.

Solución.

- x → Electrodomésticos vendidos modelo A.
 y → Electrodomésticos vendidos modelo B.
 z → Electrodomésticos vendidos modelo C.

$$x + y + z = 750$$

$$320x + 256y + 352z = 230400 \quad \xrightarrow{:32} \quad 10x + 8y + 11z = 7200$$

$$x + z = 2y \quad \rightarrow \quad x - 2y + z = 0$$

Restando la primera y la tercera ecuación obtenemos:

$$3y = 750 \quad \rightarrow \quad y = 250 \text{ electrodomésticos}$$

Sustituyendo este valor en la primera y en la segunda ecuación obtenemos un sistema:

$$x + 250 + z = 750 \quad \rightarrow \quad x + z = 500$$

$$10x + 2000 + 11z = 7200 \quad \rightarrow \quad 10x + 11z = 5200$$

Resolvemos ese sistema por reducción:

$$x + z = 500 \quad \xrightarrow{\cdot(-10)} \quad -10x - 10z = -5000$$

$$10x + 11z = 5200 \quad \xrightarrow{\quad} \quad \underline{10x + 11z = 5200}$$

$$z = 200 \text{ electrodomésticos}$$

$$x + z = 500 \quad \rightarrow \quad x + 200 = 500 \quad \rightarrow \quad x = 300 \text{ electrodomésticos}$$

Por tanto, se venden 300 electrodomésticos modelo A, 250 modelo B y 200 modelo C.

- 8 Una oficina necesita adquirir material de papelería. Cuenta con un presupuesto de 600 € y necesita archivadores, cuadernos y carpetas. Los precios de cada artículo por unidad son de 6, 3 y 2 euros respectivamente. El número de cuadernos va a ser la cuarta parte que el de carpetas y el número total de archivadores y carpetas será de 165. Plantea el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

Solución.

$x \rightarrow$ Archivadores.
 $y \rightarrow$ Cuadernos.
 $z \rightarrow$ Carpetas.

$$6x + 3y + 2z = 600$$

$$y = \frac{z}{4} \rightarrow 4y = z$$

$$x + z = 165$$

Sustituimos en la primera y en la tercera ecuación z por $4y$ tenemos el sistema:

$$\begin{array}{lcl} 6x + 3y + 2z = 600 & \xrightarrow{z=4y} & 6x + 3y + 8y = 600 \rightarrow 6x + 11y = 600 \\ x + z = 165 & \xrightarrow{z=4y} & x + 4y = 165 \end{array}$$

Resolvemos ese sistema por reducción:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 11y = 600 & \longrightarrow & 6x + 11y = 600 \\ x + 4y = 165 & \xrightarrow{\cdot(-6)} & -6x - 24y = -990 \\ \hline & & -13y = -390 \rightarrow y = 30 \end{array}$$

$$x + 4y = 165 \rightarrow x + 120 = 165 \rightarrow x = 45$$

Como $z = 4y$ entonces $z = 120$. Por tanto se venden 45 archivadores, 30 cuadernos y 120 carpetas.

- 9 Un inversor quiere comprar acciones de dos clases, A y B. La suma total de acciones adquiridas será como máximo de 1200. Cada acción del tipo A le reportará un beneficio de 0,2 euros y cada acción del B 0,08 euros. Tiene claro que no comprará más de 500 acciones del tipo A. Pero sí está dispuesto a adquirir como mínimo 350 del B. Además, no quiere que el número de acciones B adquiridas sea mayor del triple de acciones A. ¿Cuántas acciones debe comprar de cada tipo para obtener los máximos beneficios? ¿A cuánto ascienden dichos beneficios?

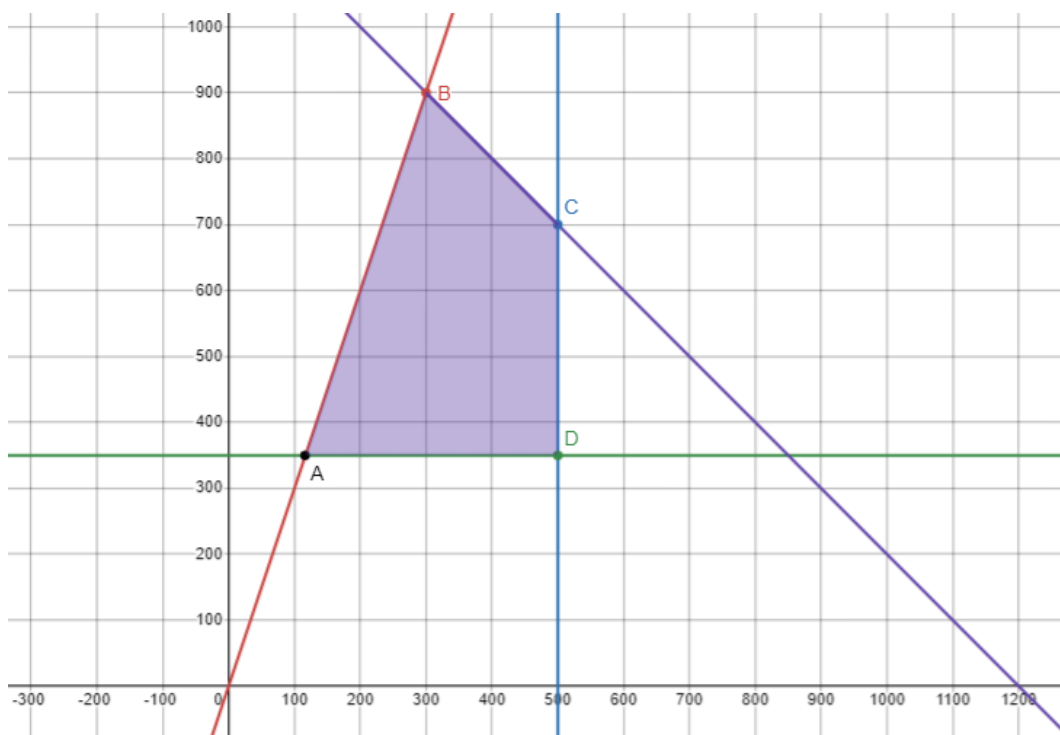
Solución.

$x \rightarrow$ Número de acciones tipo A.
 $y \rightarrow$ Número de acciones tipo B.

$$\text{Max } f(x, y) = 0,2x + 0,08y$$

s.a.

$$\begin{cases} x + y \leq 1200 \\ x \leq 500 \\ y \geq 350 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \end{cases}$$



Vértice A

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x \\ y = 350 \end{array} \right\} x = \frac{350}{3} \rightarrow A = \left(\frac{350}{3}, 350 \right)$$

Vértice B

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1200 \\ y = 3x \end{array} \right\} x + 3x = 1200 \rightarrow x = 300 \rightarrow B = (300, 900)$$

Vértice C

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1200 \\ x = 500 \end{array} \right\} 500 + y = 1200 \rightarrow y = 700 \rightarrow C = (500, 700)$$

Vértice D

$$\left. \begin{array}{l} y = 350 \\ x = 500 \end{array} \right\} D = (500, 350)$$

Cálculo de valores de la función objetivo:

$$f(A) = f\left(\frac{350}{3}, 350\right) = 0,2 \cdot \frac{350}{3} + 0,08 \cdot 350 = \frac{154}{3} = 51,3$$

$$f(B) = f(300, 900) = 0,2 \cdot 300 + 0,08 \cdot 900 = 132$$

$$f(C) = f(500, 700) = 0,2 \cdot 500 + 0,08 \cdot 700 = 156$$

$$f(D) = f(500, 350) = 0,2 \cdot 500 + 0,08 \cdot 350 = 128$$

El máximo beneficio se obtiene comprando 500 acciones tipo A y 700 acciones tipo B. Dicho beneficio máximo asciende a 156 euros.

- 10 Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por cada vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en ese caso?

Solución.

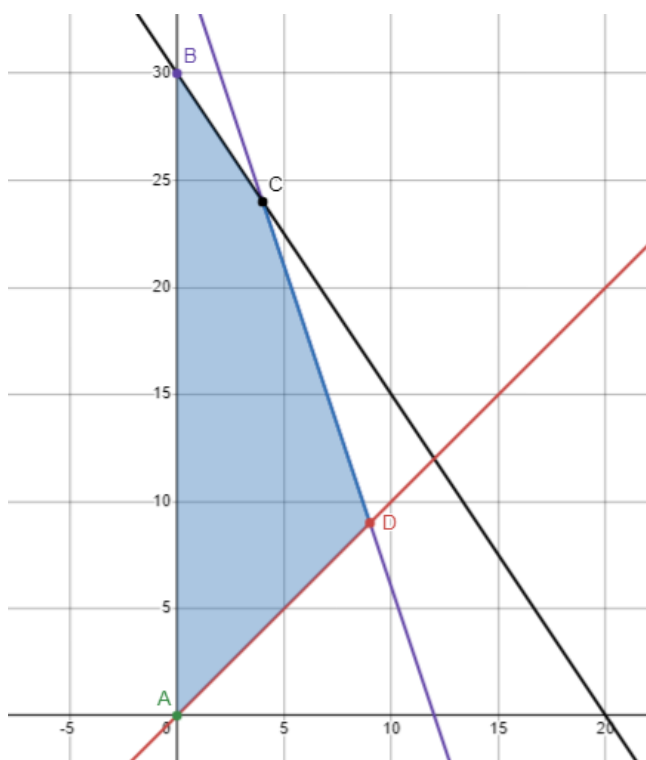
$x \rightarrow$ Vestidos de fiesta.

$y \rightarrow$ Vestidos de calle.

$$\text{Max } f(x,y) = 100x + 65y$$

s.a.

$$\begin{cases} 3x + y \leq 36 \\ 6x + 4y \leq 120 \xrightarrow{:2} 3x + 2y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Vértice A

$$A = (0,0)$$

Vértice B

$$B = (0,30)$$

Vértice C

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 36 \\ 3x + 2y = 60 \end{array} \right\} \rightarrow y = 24 \rightarrow x = 4 \rightarrow C = (4,24)$$

Vértice D

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 36 \\ y = x \end{array} \right\} \rightarrow 4x = 36 \rightarrow x = 9 \rightarrow y = 9 \rightarrow D = (9,9)$$

Cálculo de valores de la función objetivo:

$$f(A) = f(0,0) = 100 \cdot 0 + 65 \cdot 0 = 0$$

$$f(B) = f(0,30) = 100 \cdot 0 + 65 \cdot 30 = 1950$$

$$f(C) = f(4,24) = 100 \cdot 4 + 65 \cdot 24 = 1960$$

$$f(D) = f(9,9) = 100 \cdot 9 + 65 \cdot 9 = 1485$$

El máximo beneficio lo obtiene haciendo 4 vestidos de fiesta y 24 de calle. Dicho beneficio máximo asciende a 1960 euros.

11 En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local destinará dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2 . El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) Por estudios de mercado se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

Solución.

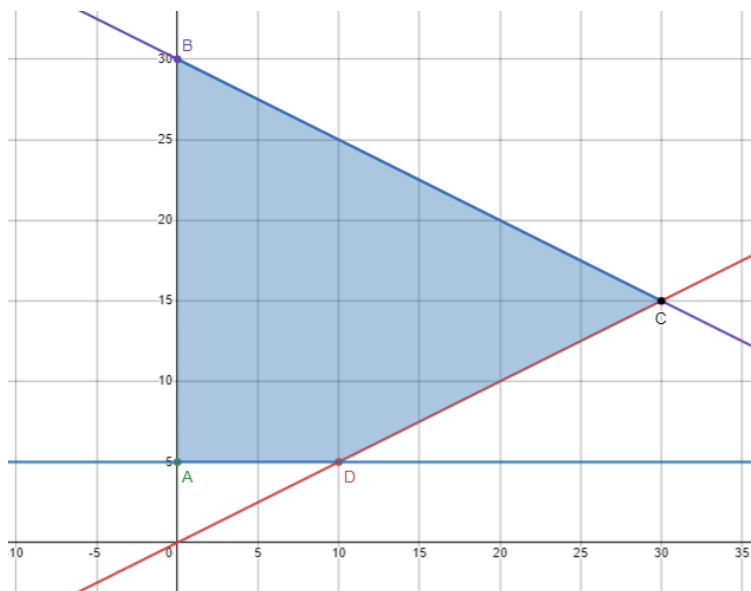
$x \rightarrow$ Mesas altas.

$y \rightarrow$ Mesas bajas.

$$\text{Max } f(x, y) = 20x + 25y$$

s.a.

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 120 & \xrightarrow{:2} & x + 2y \leq 60 \\ y \geq 5 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Vértice A

$$A = (0,5)$$

Vértice B

$$B = (0,30)$$

Vértice C

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x + 2y = 60 \end{array} \right\} \quad 2y + 2y = 60 \rightarrow y = 15 \rightarrow x = 30 \rightarrow C = (30,15)$$

Vértice D

$$\left. \begin{array}{l} x = 2y \\ y = 5 \end{array} \right\} \quad x = 10 \rightarrow D = (10,5)$$

Cálculo de valores de la función objetivo:

$$f(A) = f(0,5) = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 5 = 125$$

$$f(B) = f(0,30) = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 30 = 750$$

$$f(C) = f(30,15) = 20 \cdot 30 + 25 \cdot 15 = 975$$

$$f(D) = f(10,5) = 20 \cdot 10 + 25 \cdot 5 = 325$$

El máximo beneficio se obtiene colocando 30 mesas altas y 15 mesas bajas. Dicho beneficio máximo asciende a 975 euros.

Sí es posible colocar 15 mesas de cada tipo porque el punto (15,15) está claramente en la región objetivo (cumple todas las restricciones).